

УДК 539.4:621.313.32

Н.Г.ШУЛЬЖЕНКО, докт.техн.наук;
М.Г.ПАНТЕЛЯТ, канд.физ.-мат.наук; **Н.Г. ГАРМАШ**, канд.техн.наук;
А.Н. САФОНОВ; ИПМаш НАН України, Харьков

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В РОТОРАХ ТУРБОГЕНЕРАТОРОВ ПРИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМАХ

Представлено основні рівняння, що описують просторові нестационарні електромагнітні та теплові поля в роторі турбогенератора і термомеханічний стан ротора на різних режимах експлуатації. Запропоновано математичні моделі зв'язаних процесів, що враховують такі основні фізичні явища і чинники, як залежність електрофізичних, теплофізичних і механічних властивостей матеріалів від температури, а також нелінійні значення магнітної проникності сталі ротора. Методика розрахунку базується на розв'язанні просторових початково-крайових зв'язаних задач електромагнетизму, теплопровідності і термопружності у варіаційних постановках з використанням методу скінченних елементів.

Basic equations describing the spatial transient electromagnetic and thermal fields in the rotor of the turbogenerator and the thermomechanical state of the rotor at different conditions of the exploitation, are presented. Mathematical models of the coupled processes are proposed, taking into account such basic physical phenomena and factors, as dependence of electrophysical, thermophysical and mechanical properties of the materials on temperature, and also nonlinear quantities of the magnetic permeability of the rotor steel. A method of calculation is based on the solution of the spatial initial-regional coupled tasks of electromagnetism, heat conductivity and thermoelasticity in the variation formulation by using the finite element method.

I. Постановка задачи. Ротор современного синхронного турбогенератора является его наиболее нагруженным конструктивным элементом [1, 2]. Общий вид ротора одного из турбогенераторов приведен на рис. 1 [1].

Математическое моделирование электромагнитного, теплового и термочностного состояний роторов синхронных турбогенераторов на различных режимах эксплуатации, таких как двухфазное короткое замыкание, продолжительная несимметричная нагрузка и др., является актуальной научной и прикладной задачей. На рассматриваемых режимах в воздушном зазоре между статором и ротором возникает бегущая волна электромагнитного поля обратной последовательности. Электромагнитное поле вращается относительно ротора турбогенератора в направлении, противоположном направлению вращения ротора, и наводит в нем значительные вихревые токи частотой 100 Гц, которые в основном сосредоточиваются в поверхностном слое толщиной несколько миллиметров (явление скин-эффекта). Вихревые токи вызывают значительные потери [3], существенно неравномерное распределение температур по сечению ротора [4], а также интенсивный локальный нагрев ряда важных конструктивных элементов ротора, в первую очередь, пазовых клиньев (рис. 2), предназначенных для удержания обмотки возбуждения в пазах ротора. Это может привести к возникновению ряда негативных механических явлений в роторе [1, 4, 5]:

- теплового небаланса и, как следствие, повышенные вибрации ротора [1];
- высокого уровня статических термических напряжений в перегретых участках ротора, что может привести к разрушению ротора вследствие возникновения круговых трещин в его теле [4].

Указанные явления существенно снижают остаточный ресурс и надежность эксплуатации турбогенераторов.

Для выработки рекомендаций по режимам эксплуатации и конструкциям турбогенераторов, обеспечивающим надежную работу турбоагрегатов, необходимо выполнить компьютерное моделирование связанных электромагнитных, тепловых и механических процессов в роторах. Рядом авторов выполнены [4 – 8] расчеты распределения электромагнитного поля, потерь и теплового состояния роторов и их конструктивных элементов при различных режимах эксплуатации в двумерной постановке. Использование двумерных

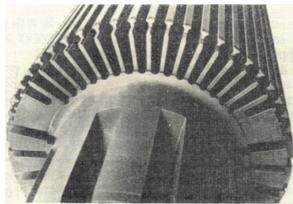


Рисунок 1 – Общий вид ротора турбогенератора



Рисунок 2 – Пазовые клинья ротора синхронного турбогенератора

математических моделей основывается на ряде предположений, в первую очередь [4, 5] на большом отношении длины к диаметру типовых роторов турбогенераторов. Таким образом, предполагается, что ток во всех участках ротора протекает в осевом направлении. Данное предположение не позволяет описать реальный существенно пространственный характер распределения токов и электромагнитного поля в роторах. Таким образом, для получения достоверной информации об электромагнитном, тепловом и термонапряженном состоянии роторов турбогенераторов необходимо выполнить решение трех указанных связанных задач в трехмерной постановке. В литературе отсутствуют решения этой комплексной задачи.

В настоящей работе представлены основные уравнения, описывающие пространственные нестационарные электромагнитные и тепловые поля в роторе турбогенератора, а также термомеханическое состояние ротора. Предложены математические модели связанных процессов, учитывающие такие основные физические явления и факторы, как зависимость электрофизических, теплофизических и механических свойств материалов от температуры, а также нелинейные значения магнитной проницаемости стали ротора. Методика расчета базируется на решении пространственных начально-краевых связанных задач электромагнетизма, теплопроводности и термоупругости в вариационных постановках с использованием метода конечных элементов.

II. Расчет пространственного распределения нестационарного электромагнитного поля. Математическое описание электромагнитных процессов в общем случае представляет собой систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме без учета токов смещения [9, 10]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

дополненную материальными уравнениями, определяющими электрофизические свойства материалов [9, 10]:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad \mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}, \quad (2)$$

где \mathbf{H} – вектор напряженности магнитного поля; \mathbf{B} – вектор индукции магнитного поля; \mathbf{E} – вектор напряженности электрического поля; \mathbf{J} – вектор плотности токов проводимости; μ – магнитная проницаемость; γ – удельная электрическая проводимость.

В общем случае, магнитная проницаемость μ может зависеть от напряженности магнитного поля \mathbf{H} [11, 12].

Конечноэлементный анализ нестационарных трехмерных электромагнитных полей базируется на обоснованном выборе постановки решаемой задачи. Постановка должна обеспечивать однозначное решение соответствующих дифференциальных уравнений методом конечных элементов при минимальной размерности системы линейных алгебраических уравнений, что является важным условием разработки эффективного прикладного программного обес-

печения. Выполнен [13] сравнительный анализ основных постановок задач конечноэлементного анализа нестационарных трехмерных электромагнитных полей. Для численного решения методом конечных элементов уравнений (1), (2) выбраны постановки [13]:

1) постановка $\mathbf{A}, V - \psi$, основанная [10] на использовании следующих величин, описывающих распределение электромагнитного поля:

- векторный магнитный потенциал \mathbf{A} и скалярный электрический потенциал V в проводящих элементах конструкции ротора турбогенератора;
- скалярный магнитный потенциал ψ в непроводящих элементах конструкции турбогенератора и в областях, которые содержат токи сторонних источников (токи обратной последовательности в статоре турбогенератора).

Используемые для компьютерного моделирования нестационарного электромагнитного поля потенциалы \mathbf{A} , V и ψ определяются следующим образом [9 – 14]:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A};$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } V. \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{T}; \quad (4)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \text{grad } \psi,$$

где \mathbf{T} – векторный электрический потенциал.

При использовании данной постановки уравнения электромагнитного поля (1) приобретают следующий вид [10]:

- в проводящих элементах конструкции ротора турбогенератора

$$\text{rot } \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} - \text{grad } \frac{1}{\mu} \text{div } \mathbf{A} + \gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \gamma \text{grad } V = 0; \quad (5)$$

$$\text{div} \left(-\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad } V \right) = 0; \quad (6)$$

- в непроводящих элементах конструкции турбогенератора и в областях с токами сторонних источников:

$$\text{div } \mu \text{ grad } \psi = 0. \quad (7)$$

2) постановка, основанная на использовании векторного магнитного потенциала \mathbf{A} в пределах всей расчетной области турбогенератора, приводящая к решению следующих уравнений в частных производных [13, 15]:

- в проводящих элементах конструкции

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A}; \quad (8)$$

- в непроводящих элементах конструкции и в областях с токами сторонних источников

$$\nabla \frac{1}{\mu} \nabla \mathbf{A} + \mathbf{J}_s = 0, \quad (9)$$

или, в декартовой системе координат, соответственно

$$\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \quad (10)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) + \mathbf{J}_s = 0, \quad (11)$$

где \mathbf{J}_s – вектор плотности тока стороннего источника.

Для определения пространственного и временного распределения электромагнитного поля уравнения (5) – (7) или (8), (9) решаются в декартовой системе координат методом конечных элементов [9]. Нестационарная задача электродинамики решается с использованием неявной конечно-разностной схемы Крэнка-Николсона [16]:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t}(t + \Delta t) = [A_i(t + \Delta t) - A_i(t)] \frac{2}{\Delta t} - \frac{\partial A_i}{\partial t}(t), \quad (12)$$

где A_i – соответствующая пространственная компонента векторного магнитного потенциала; Δt – величина шага по времени.

В областях, которые содержат токи сторонних источников (в статоре турбогенератора) задается плотность тока обратной последовательности при коротком замыкании двух фаз турбогенератора [6] либо при длительном несимметричном режиме эксплуатации [7].

Магнитная проницаемость μ ряда материалов, используемых в конструкции турбогенератора (в первую очередь, стали ротора) зависит от напряженности магнитного поля \mathbf{H} [11, 12]. Зависимость индукции магнитного поля \mathbf{B} и магнитной проницаемости μ от напряженности магнитного поля \mathbf{H} схематически представлена на рис. 3. Для учета указанной существенно нелинейной зависимости при решении задачи расчета нестационарного электромагнитного поля на каждом временном шаге используются эффективные итерационные алгоритмы [11, 12].

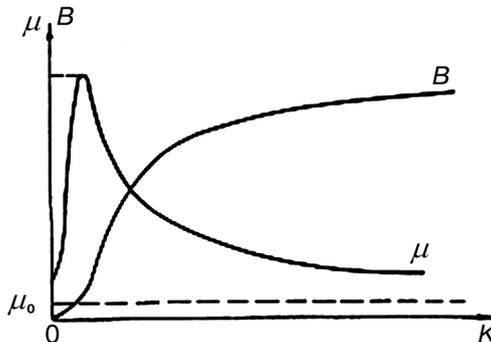


Рисунок 3. Магнитные характеристики стали ротора турбогенератора

Полученное в результате решения задачи пространственное и временное

распределение электромагнитного поля позволяет определить распределение вектора плотности вихревых токов \mathbf{J} и добавочных потерь от токов обратной последовательности Q (внутренних источников тепла) для последующего решения задачи теплопроводности [5 – 7]:

$$\mathbf{J} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \gamma \text{grad } V \quad \text{либо} \quad \mathbf{J} = -\gamma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (13)$$

(в зависимости от реализуемой формулировки задачи расчета электромагнитного поля);

$$Q = \frac{1}{\gamma} J^2. \quad (14)$$

III. Расчет пространственного распределения нестационарного теплового поля. Полученное в результате решения задачи электродинамики пространственно-временное распределение внутренних источников тепла (добавочных потерь) (14) используется в качестве правой части для решения нестационарного уравнения теплопроводности [4]:

$$\text{div}(\lambda \text{grad } T) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - Q \quad (15)$$

или в декартовой системе координат [5]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q, \quad (16)$$

где T – температура; ρ – плотность; c – теплоемкость; λ – теплопроводность материала.

Теплофизические свойства материалов (плотность, теплоемкость и теплопроводность) зависят от температуры.

Для определения пространственного и временного распределения температуры уравнение (15) решается в декартовой системе координат методом конечных элементов. Нестационарная задача теплопроводности решается с использованием неявной конечно-разностной схемы Кранка-Николсона [17], аналогичной (12):

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t + \Delta t) = \left[T(t + \Delta t) - T(t) \right] \frac{2}{\Delta t} - \frac{\partial T}{\partial t}(t), \quad (17)$$

где Δt – величина временного шага данной задачи.

Задача теплопроводности решается методом конечных элементов [18] с граничными условиями, описывающими условия водяного или водородного охлаждения конструктивных элементов турбогенератора [1, 2, 19]. Методика и программное обеспечение для решения трехмерной нелинейной нестационарной задачи теплопроводности представлены в работе [18].

IV. Расчет напряженно-деформированного состояния ротора турбогенератора. Методика и программное обеспечение для определения трехмерного термонапряженного состояния элементов турбомашин описаны в работе [18].

Для решения задачи используется вариант инкрементальной теории, основанный на модифицированном подходе Лагранжа с применением модифицированных тензоров напряжений Кирхгофа и модифицированных тензоров деформаций Грина в координатах (X_1, X_2, X_3) [20]. Путь деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний $V^0, V^1, \dots, V^{(n)}, V^{(n+1)}$. В состоянии $V^{(n)}$ на прямоугольном параллелепипеде в исходной системе координат X_1, X_2, X_3 определен тензор напряжений Эйлера σ_{ij}^E , который находится в равновесии с приложенными массовыми \vec{F}_i и поверхностными \vec{P}_i силами, отнесенными к единичному объему в состоянии $V^{(n)}$. Напряжения в этом случае трактуются как остаточные. Под действием сил $\Delta \vec{F}_i, \Delta \vec{P}_i$ тело переходит в состояние $V^{(n+1)}$ и на его гранях возникают напряжения $\sigma_{ij}^E + \Delta \sigma_{ij}$ (рис. 4). Приращения деформаций на $n + 1$ шаге при использовании координат X_1, X_2, X_3 , имеют вид [18]:

$$2\Delta e_{ij} = \frac{\partial \bar{r}^{(n+1)}}{\partial X_i} \frac{\partial \bar{r}^{(n+1)}}{\partial X_j} - \frac{\partial \bar{r}^{(n)}}{\partial X_i} \frac{\partial \bar{r}^{(n)}}{\partial X_j} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial X_j} \quad (18)$$

и образуют модифицированные тензоры приращений деформаций Грина. В соответствии с принципом виртуальной работы в состоянии $V^{(n+1)}$ имеем [20]:

$$\iiint_{V^{(n+1)}} [(\sigma_{ij}^E + \Delta \sigma_{ij}) \delta \Delta \varepsilon_{ij} - (F_i + \Delta F_i) \delta \Delta u_i] dV^{(n+1)} - \iint_{S^{(n+1)}} (P_i + \Delta P_i) \delta \Delta u_i dS^{(n+1)} = 0,$$

где $dV^{(n)} = dX_1 dX_2 dX_3$.

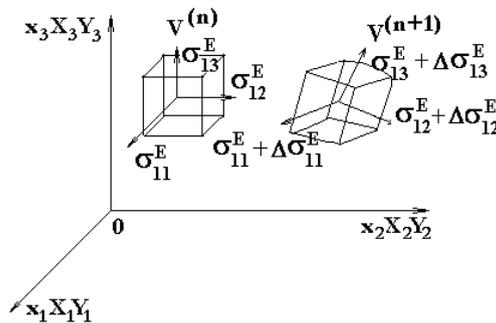


Рисунок 4 – Деформация элемента объема тела

Линеаризуя это уравнение и зависимости физического закона

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0, \quad (19)$$

где

$$2\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Delta u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial X_i},$$

а затем применяя обычную процедуру метода конечных элементов, получаем систему разрешающих уравнений для произвольного конечного элемента в виде [18]:

$$\sum_{j=1}^8 (K_{ij} + K_{ij}^G) \Delta u_j = \Delta Q_i + \Delta \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

Здесь K_{ij}^G – инкрементальные физическая и геометрическая матрицы жесткости.

Суммируя соответствующие члены, представляющие вклад каждого конечного элемента при узловых параметрах, получаем систему разрешающих уравнений для приращений перемещений на $(n + 1)$ -м шаге. Затем, используя (18) и (19), получаем приращения напряжений, которые преобразуются в компоненты напряжений Эйлера для следующего шага по формулам [18]:

$$\sigma_{ij}^E + \Delta \sigma_{ij}^E = \frac{\frac{\partial Y_i}{\partial X_k} \frac{\partial Y_j}{\partial X_i} (\sigma_{ki}^E + \Delta \sigma_{ki}^E)}{\partial(Y_1, Y_2, Y_3) / \partial(X_1, X_2, X_3)}.$$

Физические соотношения (19) получаем в предположении о представлении тензора приращений деформаций в виде суммы, в общем случае, упругой, температурной, пластической и вязкоупругой компонент [18]:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^T + \Delta \varepsilon_{ij}^p + \Delta \varepsilon_{ij}^c.$$

Приращения упругих деформаций определяются по закону Гука [18]:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^e = A_{ijkm} (T^{(n+1)}) \Delta \sigma_{km} + \Delta A_{ijkm} \sigma_{km},$$

где A_{ijkm} – тензор упругой податливости материала при температуре в конце шага,

$$\Delta A_{ijkm} = A_{ijkm} (T^{(n+1)}) - A_{ijkm} (T^{(n)}).$$

Приращения температурных деформаций [18]:

$$\Delta \varepsilon_{ii}^T = \alpha_i (T^{(n+1)}) T^{(n+1)} - \alpha_i (T^{(n)}) T^{(n)},$$

$$\Delta \varepsilon_{ij}^T = 0, \quad i \neq j.$$

Выражения для приращений компонент пластической деформации и ползучести зависят от используемой теории. Для изотропного материала с изотропным упрочнением для активного нагружения компоненты пластической деформации вычисляются по формулам [21]:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{3}{2\sigma_i} \right)^2 \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) S_{ij} \left[S_{km} \Delta \sigma_{km} + \frac{2}{3} (\sigma_i - \sigma_T) \right],$$

где σ_i , σ_T – интенсивность напряжений и предел текучести в начале шага; E , E_k – модуль Юнга и касательный модуль, определяемый по диаграмме деформирования материала в конце шага; S_{ij} – девиатор напряжений.

Решение данной задачи позволяет определить напряженно-деформированное состояние ротора турбогенератора (пространственное распределение упругих либо пластических механических напряжений и деформаций) в различные моменты времени в соответствующем температурном поле ротора.

V. Расчет связанных электромагнитных, тепловых и механических процессов. Электромагнитные, тепловые и механические процессы в роторах

турбогенераторов взаимосвязаны друг с другом (рис. 5). Бегущая волна электромагнитного поля обратной последовательности наводит в роторе вихревые токи, пространственно-временное распределение плотности которых определяется по формулам (13) как результат решения уравнений (5)–(7) или (10), (11). Вихревые токи вызывают добавочные потери (внутренние источники тепла) Q (14), которые приводят к неравномерному нагреву ротора и представляют собой правую часть нестационарного уравнения теплопроводности (16). Полученное распределение температуры T позволяет определить напряженно-деформированное состояние ротора (см. раздел IV статьи).

Кроме того, изменяющееся в процессе работы турбогенератора тепловое поле ротора существенно влияет на электромагнитные процессы, поскольку электрофизические свойства материалов (удельная электрическая проводимость γ и магнитная проницаемость μ [22]) в общем случае зависят от температуры. В связи с этим, решение трехмерных связанных задач электромагнетизма и теплопроводности необходимо выполнять следующим образом [4, 5]. При начальной температуре выполняется расчет электромагнитного поля и определяются внутренние источники тепла для последующего решения задачи теплопроводности. По результатам расчета теплового поля определяются электрофизические свойства материалов, соответствующие полученным значениям температуры. Решение связанных задач повторяется до достижения сходимости итерационного процесса, после чего определяется напряженно-деформированное состояние ротора, соответствующее полученному распределению температуры.



Рисунок 5 – Взаимосвязи между процессами в роторах турбогенераторов

VI. Заключение. В работе описана разработанная методика математического моделирования связанных электромагнитных, тепловых и механических процессов в роторах синхронных турбогенераторов на различных режимах эксплуатации. На основе разработанной методики создается программное обеспечение, предназначенное для расчета трехмерного электромагнитного, теплового и механического состояния конструктивных элементов роторов. Результаты будут использоваться при оценке термopочности и срабатывания ресурса роторов по наиболее напряженным зонам.

Список литературы: 1. Турбогенераторы. Расчет и конструкция / Титов В.В., Хуторецкий Г.М., Загородная Г.А. и др. – Л.: Энергия, 1967. – 895 с. 2. Хуторецкий Г.М., Токов М.И., Толвинская Е.В. Проектирование турбогенераторов. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 256 с. 3. Данилевич Я.Б., Кашарский Э.Г. Добавочные потери в электрических машинах. – М.: ГЭИ, 1963. – 214 с. 4. Bhargava S.C. Negative-sequence currents, losses and temperature rise in the rotor of a turbogenerator during transient unbalanced operation. – Electric Machines and Power Systems. – 1983, V. 8. – P. 155–168. 5. Пантелют М.Г., Шульженко Н.Г. Математическое моделирование двухмерных электромагнитных и тепловых полей в роторе турбогенератора // Электротехника и электромеханика. – 2004. – № 3. – С. 84–86. 6. Шульженко Н.Г., Панте-

лят М.Г., Руденко Е.К., Петушкова С.А., Зозулин Ю.В. Влияние материала пазовых клиньев на распределение электромагнитного поля, плотности тока и потерь от токов обратной последовательности в роторе турбогенератора при двухфазном коротком замыкании // Электротехника и электромеханика. – 2005. – № 3. – С. 61–64. 7. Шульженко Н.Г., Пантелеят М.Г., Руденко Е.К., Зозулин Ю.В. Добавочные потери в роторе турбогенератора при продолжительной несимметричной нагрузке // Электротехника и электромеханика. – 2006. – № 1. – С. 54–57. 8. Васьяковский Ю.Н., Цивинский С.С., Гайденко Ю.А. Оптимизация концевых клиньев ротора турбогенератора для повышения надежности его работы в несимметричных режимах // Электротехника и электромеханика. – 2004. – № 3. – С. 26–28. 9. Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. – М.: Мир, 1986. – 229 с. 10. Biró O., Preis K. On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three-dimensional eddy currents // IEEE Transactions on Magnetics. – 1989. – V. 25, No. 4. – P. 3145–3159. 11. Biró O., Preis K., Richter K.R. Various FEM formulations for the calculation of transient 3d eddy currents in nonlinear media. – IEEE Transactions on Magnetics. – 1995. – V. 31, No. 3. – P. 1307–1312. 12. Pantelyat M.G. Numerical analysis of impulse electromagnetic fields in soft ferromagnetic materials // International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 1999. – V. 10. – P. 185–192. 13. Пантелеят М.Г., Шульженко Н.Г. Использование векторного магнитного потенциала в конечно-элементном анализе нестационарных трехмерных электромагнитных полей в проводящих средах // Электротехника и электромеханика. – 2007. – № 5. – С. 42–47. 14. Biró O., Preis K. Finite element analysis of 3-D eddy currents // IEEE Transactions on Magnetics. – 1990. – V. 26, No. 2. – P. 418–423. 15. Gong L., Unbehauen R. The 3-D computations of edge induction heating using semi-analytical method and FEM // Electrical Engineering. – 1996. – V. 79. – P. 189–195. 16. Pantelyat M.G. Coupled electromagnetic, thermal and elastic-plastic simulation of multi-impulse inductive heating // International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics. – 1998. – V. 9. – P. 11–24. 17. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А.Н. Подгорный, П.П. Гонтаровский, Б.Н. Киркач и др. – Киев: Наукова думка, 1989. – 232 с. 18. Шульженко Н.Г., Матюхин Ю.И., Гонтаровский П.П., Гармаи Н.Г. Моделирование кинетики трехмерных термомеханических полей в элементах турбомашин // Вібрації в техніці та технологіях. – 2004. – № 6 (38). – С. 26–30. 19. Каиарский Э.Г., Чемоданова Н.Б., Шапиро А.С. Потери и нагрев в массивных роторах синхронных машин. – Л.: Наука, 1968. – 198 с. 20. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с. 21. Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демьянушко, Р.А. Дульнев, Р.Н. Сизова. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с. 22. Pantelyat M.G., Shulzhenko N.G. On approximation for magnetization curves // Proceedings of the 12th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering, Graz, Austria, 2006. – P. 96–99.

Поступила в редколлегию 31.03.2008.