

УДК 539.3

Е.Г.ЯНИЮТИН, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков
Г.А.ГНАТЕНКО, ХНАДУ, Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНОГО НАГРУЖЕНИЯ БАЛКИ

В статті розглядаються пряма і обернена задача теорії пружності про імпульсну дію на пружну балку скінченної довжини. Пропонується методика визначення закону зміни нестационарної дії в часі. Наводяться результати чисельних експериментів з ідентифікації невідомого навантаження на основі вихідних даних аналітичних і експериментальних досліджень.

The direct and inverse problems of the theory of elasticity for finite length beam under pulse loading are considered. The methods for determining the time dependent pulse action are obtained. The numerical results for identification of unknown nonstationary action based on analytical and experimental initial data are presented.

Зачастую при проектировании различных конструкций возникают вопросы правильного выбора величины и характера изменения во времени нагрузок воздействующих на них. Этому может способствовать умение решения так называемых обратных задач, связанных с непосредственной идентификацией воздействующих сил. Ряд таких задач и способы их эффективного решения представлены, например, в монографиях [1, 2].

Одна из таких задач по определению ударного воздействия на упругую балку конечной длины падающего груза рассмотрена в настоящей статье.

Вначале опишем механическую систему, которая положена в основу решения задачи.

Пусть воздействие равномерно распределенной по некоторой площадке нагрузки с интенсивностью $P(t)$ на однопролетную шарнирно-опертую балку длиной l эквивалентно схеме изображенной на рис. 1.

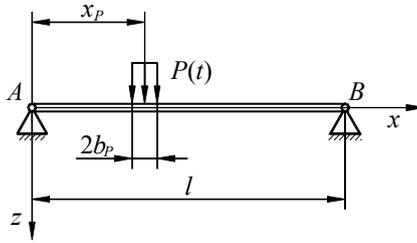


Рисунок 1

Исследование поперечных колебаний балки производится на основе модели теории типа Тимошенко [3], а именно с использованием общеизвестной системы дифференциальных уравнений, которая имеет вид:

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k' \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) FG = q(x, t); \\ EI \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + k' \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \Psi \right) FG - \rho I \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $q(x, t)$ – закон распределения нагрузки, включающий в себя функцию изменения нестационарного во времени воздействия $P(t)$.

Решение системы дифференциальных уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий получим путем разложения искомых функций в тригонометрические ряды. Форма записи этого решения показана ниже:

$$w(x, t) = \frac{4}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k x_p \sin \lambda_k b_p}{\lambda_k} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 (-1)^i C_{ik} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \sin \lambda_k x; \quad (2)$$

$$\Psi(x, t) = \frac{4b}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_k x_p \sin \lambda_k b_p}{\lambda_k} \int_0^t P(\tau) \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik} D_k} \sin \omega_{ik} (t - \tau) d\tau \cos \lambda_k x,$$

$$\text{где } \lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad a = \frac{k'G}{\rho}; \quad b = \frac{k'GF}{\rho I}; \quad c = \frac{E}{\rho},$$

$$D_k = \sqrt{\left((a+c)\lambda_k^2 + b \right)^2 - 4ac\lambda_k^4}; \quad \omega_{1,2k}^2 = \frac{(a+c)\lambda_k^2 + b \pm D_k}{2}; \quad C_{ik} = \frac{b + c\lambda_k^2 - \omega_{ik}^2}{\omega_{ik} D_k}.$$

Отметим, что в уравнение (2) входит функция $P(t)$, которая предполагается неизвестной.

Целью процедуры идентификации (определения, восстановления) является отыскание неизвестного закона изменения нагрузки $P(t)$ по данным регистрируемых параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) или перемещениям. В случае регистрации закона изменения деформаций ε_x в некоторой точке на балке с координатой x_s , на основании выражения $\varepsilon_x = z \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}$ (z – выбираемое расстояние от нейтральной оси балки до плоскости регистрации), получим следующее аналитическое соотношение:

$$\int_0^t P(\tau)K(t-\tau)d\tau = \varepsilon_x(t), \quad (3)$$

$$\text{где } K(t) = \frac{2bh}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin \lambda_k x_p \sin \lambda_k b_p \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{\omega_{ik} D_k} \sin \omega_{ik}(t) \sin \lambda_k x_s.$$

Укажем, что в этом уравнении неизвестная функция $P(t)$, а функция $\varepsilon_x(t)$, входящая в правую часть уравнения, является заданной и измеряется, например, в процессе соответствующего численного или натурального экспериментов. Уравнение (3) является интегральным уравнение Вольтерра I-го рода, решение которого можно получить с помощью различных способов, в том числе и численных. Однако, при неточно заданной правой части уравнения, что естественно, поскольку исходные данные зачастую получаются из наблюдений, решение получается неустойчивым, ввиду некорректности задачи, обусловленной спецификой решения интегральных уравнений Вольтерра I-го рода [4]. Далее будет применен эффективный метод приближенного решения уравнения с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [1, 5]. Метод позволяет получить приближенное решение уравнений типа (3), устойчивое к малым изменениям исходных данных.

Запишем интегральное уравнение (3) в операторной форме

$$Az \equiv \int_0^t K(t, \tau)z(\tau)d\tau = u(t); \quad z \in Z, \quad u \in U, \quad (4)$$

где z – искомая функция; u – функция, соответствующая правой части уравнения (3). A – некоторый математический оператор, который переводит $z \in Z$ в элементы $u \in U$ (Z и U – некоторые метрические пространства).

Для отыскания приближенного решения согласно методу А. Н. Тихонова [5], задача по решению уравнения (4) заменяется задачей отыскания минимума сглаживающего функционала, который для данного уравнения примет вид:

$$M^\alpha [z, u_\delta] = \|Az - u_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \|z\|_{W_2^1}^2. \quad (5)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации.

Способом решения такого рода задач является регуляризация матричного уравнения [5], получающегося в результате перехода к конечномерной задаче путем аппроксимации интегралов. При этом решается СЛАУ следующего вида

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{u}_\delta. \quad (6)$$

где \mathbf{A} – матрица, являющаяся конечно-разностным аналогом оператора в уравнении (4), взятым на сетке с равномерным шагом $\Delta t = t/M$; \mathbf{A}^T – транспонированная к \mathbf{A} матрица; \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица размерности $M \times M$, явное выражение которой представлено в [5]. Значение параметра α можно вычислить, например, на основании принципа невязки [5].

При выполнении процедуры идентификации использовались результаты исследований, опубликованные в монографиях [6, 7]. В этих работах приведены результаты исследований по ударному нагружению балок падающим гру-

зом. В качестве исходных данных для идентификации нагрузки рассмотрены как деформации, так и прогибы балки.

В монографии [6] было изучено явление упругого удара по балке конечной длины на основе волнового уравнения Тимошенко. Авторами монографии были получены численные значения (решена прямая задача) прогиба при деформировании стального рельса Р-4а путем сбрасывании на него стального шара радиусом 11,48 см с высоты 25 см. Авторами настоящей статьи, используя указанные данные прогиба в центре балки, совпадающей с точкой удара, были восстановлены значения силы, возникающей в месте соприкосновения балки с шаром. Идентификация проводилась на основе следующих исходных данных: $l = 0,8$ м; $F = 39,45 \cdot 10^{-4}$ м²; $k' = 0,35$.

На рис. 2 приведены результаты восстановления нагрузки. Кривая 1 соответствует исходным данным прогиба для идентификации (взята непосредственно из рис. 72, а, б монографии); кривая 2 – значения силы, полученные авторами монографии в результате решения прямой нелинейной задачи ($\tau = 0,2022 \cdot 10^{-5}$ с для каждого графика). Кривая 3 – график восстановленного ударного нагружения (контактной силы взаимодействия) с применением метода А. Н. Тихонова.

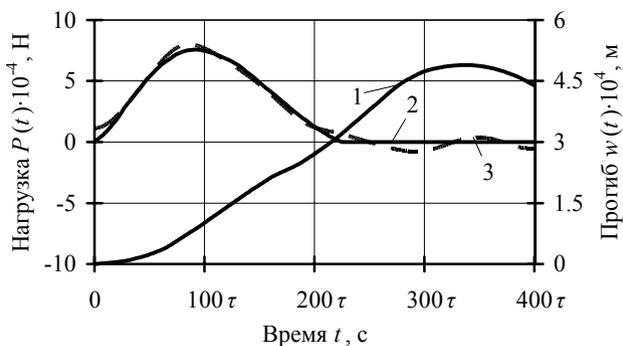


Рисунок 2

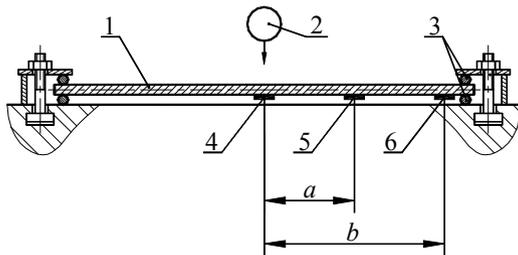
Отметим, что кривые, приведенные на рис. 2, свидетельствуют о высокой достоверности полученных результатов идентификации.

Авторы монографии [7] приводят результаты экспериментальных исследований при ударном нагружении балки, схема которого приведена на рис 3.

В монографии произведено описание установки и параметров измерительного комплекса, с помощью которого производилась регистрация параметров НДС. Там же приведены осциллограммы, характеризующие деформационный процесс, и графики изменения напряжений на поверхности балки, а также ее прогибов.

Нагружение балки производилось в среднем сечении путем сбрасывания сферического стального шара массой 1,725 кг с высоты 10 см. В процессе исследования регистрировались осциллограммы деформаций (напряжений), по

результатам которых авторами монографии были построены графики изменения напряжений в среднем сечении балки и на расстоянии 33 см от середины балки.



1 – исследуемая балка; 2 – ударник; 3 – элементы опирания; 4-6 – тензодатчики
Рисунок 3

Идентификацию внешней нагрузки произведем по данным осевых деформаций на нижней поверхности балки. Переход от напряжений к осевым деформациям, учитывая вид напряженного состояния балки, осуществлялся на основе выражения $\epsilon_x = \sigma_x/E$.

В процессе процедуры идентификации принималось, что усилие взаимодействия между шаром и балкой моделировалось равномерно распределенным по некоторой площадке, размер которой определялся на основе механических соображений по известным зависимостям теории контактного взаимодействия тел [8].

Результаты сопоставления полученных функций нагрузки приведены на рис. 4. Кривые 1, 2 соответствуют функциям нагрузки, восстановленным по данным, регистрируемым для двух различных сечений балки; кривая 3 – усредненное значение силы, рассчитанное как среднее арифметическое для значений этих двух кривых.

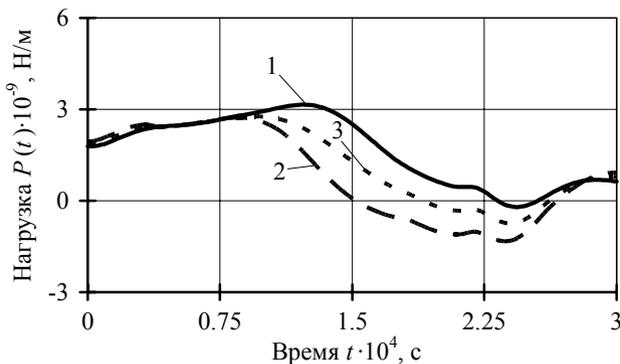


Рисунок 4

Представленные на рис. 4 результаты указывают на удовлетворительное совпадение теоретических (идентифицированных) и экспериментальных ре-

зультатов. Заметим, что на этих рисунках наблюдаются и некоторые несоответствия результатов. Опишем ряд причин, которые могут вызывать некоторое рассогласование. Во-первых, неизбежны неточности в полученных экспериментальных значениях, которые послужили исходными данными при проведении процедуры идентификации. В монографии авторы не указывают точность полученных значений напряжений и возможный уровень погрешности. Во-вторых, упрощенный вариант взаимодействия элементов системы (балка – падающий шар) был выбран при процедуре идентификации, соответствующим постоянной области нагружения. В принципе, в реальности эта область является переменной во времени в процессе ударного взаимодействия. В-третьих, используемые методы регуляризации, при проведении процедуры идентификации, позволяют получить решение, лишь приближенное к точному решению. Указанное является свойством решения некорректных обратных задач с помощью численных методов. Возможны и другие неточности, например точность описания нестационарного поведения балки уравнениями теории Тимошенко. Причины такого типа указывались в монографии [1] при обсуждении вопроса о сравнении теоретических результатов с экспериментальными данными по ударному нагружению полусферической оболочки. Эти причины могут порождать неточности в значениях величин сил ударного взаимодействия, например, заключающихся в некоторых отрицательных значениях контактного давления.

В целом приведенный на рис. 2, 4 графический материал свидетельствует об эффективности разработанной методики идентификации внешних нагрузок, воздействующих на балки конечной длины, в случае их экспериментального ударного нагружения.

Однако следует подчеркнуть, что в выбранном примере идентификации достоверные результаты, по-видимому, имеют место лишь на временном промежутке $0 - 1,5 \cdot 10^{-4}$ с, на котором существенных отрицательных значений контактного давления не наблюдается

Список литературы: 1. *Янютин Е.Г., Янчевский И.В.* Импульсное воздействие на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: ХГАДТУ, 2001. – 184 с. 2. *Янютин Е.Г., Янчевский И.В.* и др. Задачи импульсного деформирования. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 3. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с. 4. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – Киев: Наукова думка, 1986 – 544 с. 5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с. 6. *Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 340 с. 7. *Колодяжный А.В., Севрюков В.И.* Ударные и импульсные воздействия на конструкции и материалы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 168 с. 8. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989.–510 с.

Поступила в редколлегию 25.11.2008