

УДК 539.3

**Е.Г.ЯНЮТИН**, докт.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харків

**В.Т.ГРИШАКИН**, ХНАДУ, Харків

### **ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ ДЛЯ ВЯЗКО-УПРУГИХ БАЛОК**

В статті пропонуються засоби розв'язання прямих та обернених задач механіки деформівного твердого тіла на прикладі балок, що перебувають під дією зосередженої рухомої сили. Задачі розглянуті як для балок теорії Кірхгоффа-Лява, так і для балок теорії С.П. Тимошенко. Урахування дисипації енергії коливань здійснено за допомогою моделі Фойгта.

The direct and inverse problems of deformable rigid body mechanics solving methods on example of beams under action of the concentrated mobile force are offered in this article. Problems are considered both for beams of the Khirhgoff theory, and for beams of the Timoshenko theory. The account of fluctuation energy dissipate is carried out by means of Foight model.

Настоящая статья посвящена решению двух обратных задач динамики балок конечной длины. Предполагается, что балки являются вязко-упругими, колебания их нестационарны, а уравнения движения моделируются по двум различным теориям. Под обратными (в данном случае, задачами идентификации неизвестных нагрузок) понимаются задачи, в которых определение внешних сил производят на основе анализа их косвенных проявлений [1-3].

Вначале рассмотрим задачу о колебаниях шарнирно-опертой балки конечной длины при действии подвижной силы с учетом диссипации энергии колебаний с использованием дифференциального уравнения теории Кирхгоффа-Лява, приведенного в работе [4], а именно:

$$\frac{EI}{\rho F} \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \frac{\eta I}{\rho F} \frac{\partial^5 w(x,t)}{\partial x^4 \partial t} + \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q_z(x,t), \quad (1)$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости,  $q_z(x,t) = P(t)\delta(x - V_0 t)$  - интенсивность поперечной нагрузки,  $V_0$  - скорость движения силы. Учет внутреннего трения в балке проводим аналогично тому, как это выполнено в монографии [4], а именно с использованием модели Фойгта, в которой связь между напряжениями и деформациями имеет вид:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Функцию динамического прогиба балки  $w(x,t)$  будем искать с применением рядов Фурье. Решение дифференциального уравнения (1) находим при нулевых начальных условиях и граничных условиях, отвечающих шарнирному опиранию.

Подставив разложение  $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin k\pi x/l$  в (1) и выполнив ряд преобразований, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4 w_k(t) + \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4 \frac{dw_k(t)}{dt} + \frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} \right) \sin \lambda_k x = \frac{1}{\rho F} P(t) \delta(x - V_0 t), \quad (2)$$

где  $\lambda_k = k\pi/l$ .

Используя условие ортогональности для тригонометрических функций, а также учитывая свойство для  $\delta$ -функции, приведем выражение (2) к виду

$$\frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} + \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4 \frac{dw_k(t)}{dt} + \frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4 w_k(t) = \frac{2}{\rho F l} P(t) \sin(\lambda_k V_0 t). \quad (3)$$

Решение дифференциального уравнения (3) будем искать с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени [5]. В пространстве изображений полученное уравнение примет вид

$$s^2 w_k^L(s) + 2n_k s w_k^L(s) + p_k^2 w_k^L(s) = \frac{2}{\rho F l} F_k^L(s),$$

где  $w_k^L(s) \rightarrow w_k(t)$ ;  $F_k^L(s) \rightarrow P(t) \sin \lambda_k V_0 t$ ;  $2n_k = \frac{\eta I}{\rho F} \lambda_k^4$ ;  $p_k^2 = \frac{EI}{\rho F} \lambda_k^4$ .

Используя правила операционного исчисления [5,6], запишем

$$w(x, t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin(\lambda_k V_0 \tau) e^{-n_k(t-\tau)} \frac{\sin p_{\alpha_k}(t-\tau)}{p_{\alpha_k}} d\tau \sin \lambda_k x, p_{\alpha_k} > 0; \quad (4)$$

$$w(x, t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin(\lambda_k V_0 \tau) e^{-n_k(t-\tau)} \frac{\operatorname{sh} p_{\alpha_k}(t-\tau)}{p_{\alpha_k}} d\tau \sin \lambda_k x, p_{\alpha_k} < 0,$$

где  $p_{\alpha_k} = \sqrt{p_k^2 - n_k^2}$ .

Заметим, что эти формулы учитывают различные значения величин вязкого трения и дают возможность рассчитывать прогибы балки без всяких ограничений, накладываемых на исходные данные.

Необходимость рассмотрения обратных задач связана, например, с открывающейся в результате их решения возможностью определения напряженно-деформированного состояния конструкций без априорного знания о воздействующих на них нагрузках. В состав комплекса операций, необходимых для решения обратной задачи для балки конечной длины, может входить установка датчика в произвольной точке исследуемой балки, прогибы которой необходимо фиксировать для определения нагрузки.

Идентификация подвижной нагрузки была проведена для балки с прямоугольным поперечным сечением и следующими характеристиками: длина  $l = 2$  м; ширина  $b = 0,15$  м; высота поперечного сечения  $h = 0,1$  м; площадь поперечного сечения  $F = bh = 0,015$  м<sup>2</sup>; осевой момент инерции  $I = bh^3/12 = 1,25 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>; плотность материала  $\rho = 0,795 \cdot 10^4$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости  $E = 0,206 \cdot 10^6$  МПа; величина силы  $P = 1$  кН; скорость движения силы  $V_0 = 50$  м/с.

В математическом плане обратная задача сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра I-го рода [1-3], а именно

$$w_0(t) = \int_0^t P(\tau) K(t-\tau, \tau) d\tau, \quad (5)$$

где  $K(t, \tau)$  - ядро интегрального уравнения.

Исследуемая обратная задача относится к классу некорректных задач математической физики [7]. Известно, что решение таких задач возможно лишь с применением специальных регуляризирующих алгоритмов. Поэтому используем общую операторную форму записи выражения (5) в виде  $w = A \cdot q$  и, применяя регуляризирующий алгоритм А.Н.Тихонова, запишем сглаживающий параметрический функционал для уравнения (5) в виде

$$M^\alpha[q] = \|w^\delta - A \cdot q\|_{L_2}^2 + \alpha \|q\|^2, \quad (6)$$

где  $w^\delta$  - вычисляемые с некоторой погрешностью измерения  $\delta$  перемещения балки в точке  $x_0$ ;  $q$  - искомая функция, в данном случае подвижная сила;  $A$  - математический оператор, такой что  $A \cdot q = w$ ;  $\alpha$  - параметр регуляризации.

В пространстве Соболева [7] функционал (6) примет вид

$$M^\alpha[q] = \int_0^T \left( w^\delta(t) - \int_0^t q(\tau) K(t-\tau, \tau) d\tau \right)^2 dt + \alpha \int_0^T (q^2(t) + (q'(t))^2) dt,$$

где  $T$  – время завершения исследуемого процесса (наблюдения за ним).

Как показали исследования [1-3], эффективным способом решения таких задач следует считать регуляризацию матричного уравнения, согласно которой решается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{q} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{w}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \cdot \sin(\lambda_k \cdot V_0 t)$ ;  $\mathbf{q}$  – вектор, определяющий изменение силы во времени;  $\mathbf{C}$  – трехдиагональная матрица, представленная в монографии [7].

На рис. 1 изображены результаты идентификации неизвестного подвижного нагружения. В качестве исходных данных для обратной задачи было принято изменение прогиба в точке с координатой  $x = l/4$ , вычисленное по формулам (4) – результат решения прямой задачи (см. кривую 2), а кривая 3 – та же кривая, после наложения на нее пятипроцентного «шума», а также нескольких случайных «амплитудных выбросов». Укажем, что на рисунке 1 сплошной линией (кривая 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки.

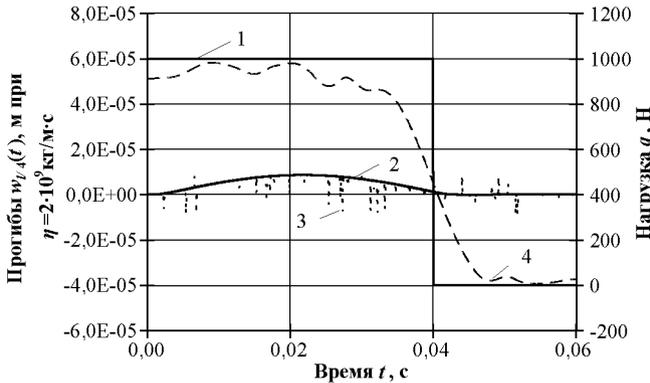


Рисунок 1

Аналогичные исследования могут быть проведены и для уточненной модели балки С.П. Тимошенко, позволяющей учитывать влияние инерции вращения поперечного сечения и сдвига, что особенно важно при изучении балок относительно малой длины. Для учета в такой балке эффектов поперечного, вращательного и вязкоупругого затуханий по Фойгту можно воспользоваться системой дифференциальных уравнений, впервые полученных S.H. Crandall и A. Yildiz, которые приведены в монографии [8]:

$$\begin{cases} c^2 \left( 1 + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b^2 \left( 1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial t}; \\ a^2 \left( 1 + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho F} q_z(x, t) + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases} \quad (8)$$

где  $a = \sqrt{k' G / \rho}$ ;  $b = \sqrt{k' G F / \rho I}$ ;  $c = \sqrt{E / \rho}$ ;  $E I$  – изгибная жесткость;  $F$  –

площадь поперечного сечения балки;  $G$  – модуль сдвига;  $k'$  – коэффициент формы поперечного сечения;  $\rho$  – плотность материала;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – коэффициенты поперечного и вращательного затуханий;  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – коэффициенты затухания от действия окружающей среды.

В соответствии со стандартной методикой разделения переменных,  $\left( w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \sin k\pi x/l, \psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \sin k\pi x/l \right)$  на основе уравнений (8) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_k(t)}{dt^2} + (b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2) \frac{d\psi_k(t)}{dt} + (b^2 + c^2 \lambda_k^2) \psi_k(t) - b^2 \lambda_k \left( \varepsilon_2 \frac{dw_k(t)}{dt} + w_k(t) \right) = 0; \\ \frac{d^2 w_k(t)}{dt^2} + (a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) \frac{dw_k(t)}{dt} + a^2 \lambda_k^2 w_k(t) - a^2 \lambda_k \left( \varepsilon_2 \frac{d\psi_k(t)}{dt} + \psi_k(t) \right) = \frac{2}{\rho Fl} P(t) \sin \lambda_k V_0 t. \end{cases}$$

В пространстве изображений указанная система дифференциальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} (s^2 + s(b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2) + b^2 + c^2 \lambda_k^2) \psi_k^L(s) - b^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) w_k^L(s) = 0; \\ (s^2 + s(a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) + a^2 \lambda_k^2) w_k^L(s) - a^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) \psi_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} F_k^L(s). \end{cases} \quad (9)$$

Решение системы уравнений (9) в пространстве изображений можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \psi_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} \frac{b^2 \lambda_k (s \varepsilon_2 + 1) F_k^L(s)}{s^4 + a_{3k} s^3 + a_{2k} s^2 + a_{1k} s + a_{0k}}; \\ w_k^L(s) = \frac{2}{\rho Fl} \frac{(s^2 + s b_{1k} + b_{0k}) F_k^L(s)}{s^4 + a_{3k} s^3 + a_{2k} s^2 + a_{1k} s + a_{0k}}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{где } b_{0k} = b^2 + c^2 \lambda_k^2;$$

$$b_{1k} = b^2 \varepsilon_2 + c^2 \varepsilon_1 \lambda_k^2 + \beta_2;$$

$$a_{0k} = a^2 c^2 \lambda_k^4;$$

$$a_{1k} = b_{0k} (a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) + a^2 \lambda_k^2 b_{1k} - 2a^2 b^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2;$$

$$a_{2k} = b_{1k} (a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1) + b_{0k} + a^2 \lambda_k^2 (1 - b^2 \varepsilon_2^2);$$

$$a_{3k} = b_{1k} + a^2 \varepsilon_2 \lambda_k^2 + \beta_1.$$

Согласно правилам операционного исчисления [5] в пространстве оригиналов выражения для искомых функций примут вид

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_k V_0 \tau \sum_{j=1}^4 \frac{(\omega_{j,k}^2 + b_{1k} \omega_{j,k} + b_{0k}) e^{\omega_{j,k}(t-\tau)}}{4\omega_{j,k}^3 + 3a_{3k} \omega_{j,k}^2 + 2a_{2k} \omega_{j,k} + a_{1k}} d\tau \sin \lambda_k x; \\ \psi(x, t) &= \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin \lambda_k V_0 \tau \sum_{j=1}^4 \frac{b^2 \lambda_k (\omega_{j,k} \varepsilon_2 + 1) e^{\omega_{j,k}(t-\tau)}}{4\omega_{j,k}^3 + 3a_{3k} \omega_{j,k}^2 + 2a_{2k} \omega_{j,k} + a_{1k}} d\tau \cos \lambda_k x. \end{aligned} \quad (11)$$

Расчеты по приведенным формулам проводились с использованием среды

Mathcad [9]. В формулах (11) значения величин  $\omega_{j,k}$  ( $j = 1-4$ ) являются комплексными и находятся как корни полинома, входящего в знаменатель уравнения (10), в той же среде. Отметим, что в Mathcad операции с комплексными числами производятся в автоматическом режиме.

Обратная задача для рассматриваемой балки теории С.П.Тимошенко аналогична ранее описанному расчетному случаю для балки теории Кирх-гоффа-Лява. Коэффициенты затухания принимались равными  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = 10^{-3}$  с и  $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 200$  с<sup>-1</sup>, что позволяет учесть затухание колебаний балки не только за счет внутреннего трения в материале, но и за счет вязкости окружающей среды, что моделирует поведение балки, погруженной, например, в жидкость. Применение регуляризирующего алгоритма заключается во введении сглаживающего параметрического функционала (6), после чего задача сводится к решению регуляризированной системы линейных алгебраических уравнений (7).

На рис. 2 изображены результаты идентификации неизвестной подвижной силы, действовавшей на балку теории Тимошенко. В качестве исходных данных было принято изменение прогиба в точке с координатой  $x = l/4$ , вычисленное по формулам (11) – результат решения прямой задачи (см. кривую 2). Кривая 3 «зашумлена» аналогично предыдущему расчетному случаю. Сплошной линией на рис. 2 (кривая 1) показано изменение во времени силы, принимаемой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки.

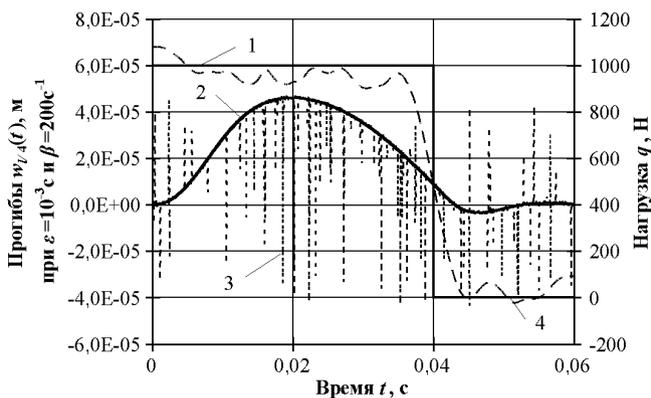


Рисунок 2

На основе представленных на рисунках результатов можно сделать вывод, что процедура применения сглаживающего функционала А.Н. Тихонова в проблемах о колебаниях балок при наличии в уравнениях их движения диссипативных членов может эффективно использоваться при решении обратных задач. Ранее эта процедура использовалась при идентификации подвижных нагрузок для абсолютно упругих балок [1-3]. Основную цель своих дальнейших исследований по развитию задач данного направления авторы видят в их обобщениях на деформируемые объекты более сложных геометрических форм.

**Список литературы:** 1. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Гришакин В.Т. Идентификация подвижных нагрузок, воздействующих на балки и плиты // Збірник наукових праць Національного гірничого університету. – 2006. – № 24. – С. 145-150. 2. Янютин Е.Г., Гнатенко Г.О., Гришакин В.Т. Розв'язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // Машинознавство. – 2007. – С. 18-23. 3. Воропай А.В., Янютин Е.Г., Гришакин В.Т. Некорректные обратные нестационарные задачи для балок и пластин при сложном нестационарном нагружении // Вісник Харківського національного університету. – № 775. – Харків. – 2007. – С. 73-80. 4. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. - М.: Наука, 1960. – 186 с. 5. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 6. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с. 7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с. 8. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. - 272 с. 9. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.

*Поступила в редколлегию 20.11.2008*