УДК 539.3:517.968+517.956

Ю.С.ШУВАЛОВА, УкрГАЖТ, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН МЕТОДАМИ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Розглянуто другу основну задачу динаміки тонких пружних пластин у рамках моделі Кірхгофа. За допомогою динамічного аналога потенціалу простого шару задача зводиться до системи нестаціонарних граничних рівнянь. Для прямокутної пластинки отримано явний вигляд граничних інтегральних рівнянь. Одержані чисельні результати.

The second basic dynamic problem for thin elastic plates in Kirchhoff model is under consideration. Its decision is submitted by dynamic analogue of a single layer potential. This representation results in system of the non-stationary boundary equations. The obvious kind of the boundary integral equations is received for a rectangular plate. The numerical results are received.

Введение. Тонкие упругие пластины являются элементами многочисленных конструкций, используемых в аэрокосмической, электронной технике и многих других отраслях промышленности. Поэтому развитие методов вычисления напряжений, возникающих в пластине очень важная задача. В статье предложен вариант метода теории потенциалов, позволяющий свети задачу к системе граничных нестационарных уравнений. При дальнейшей численной реализации рассматривается пластина прямоугольной формы. Метод исследования основан на схеме, развитой в [1–4] в задачах классической динамической теории упругости.

1 Обозначения и постановка задачи. Рассматривается тонкая упругая пластина, занимающая область $\Omega\times\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$, где Ω – некоторая область в R^2 ($h=\mathrm{const}$). Вектор смещения точки (x,x_3) пластины, где $x=(x_1,x_2)$, имеет вид $\left(-x_3\partial_1 u(x,t),-x_3\partial_2 u(x,t),u(x,t)\right)$, где $u(x,t)$ – смещение точки x срединной плоскости пластины в направлении, перпендикулярном этой плоскости в недеформированном состоянии, $\partial_i=\partial/\partial x_i\,, i=1,2.$ Функция $u(x,t)$ является решением смешанной задачи (1.1):

$$
\begin{aligned}
&\rho h\partial_t^2 u(x,t)+\tilde{D}\Delta^2 u(x,t)=q(x,t), \qquad (x,t)\in\Omega\times\mathrm{R}_+,\\
&\begin{cases} u(x,0)=\varphi(x),\\ \partial_t u(x,0)=\psi(x),\end{cases} \qquad x\in\Omega,\\
&\begin{cases} (Qu)(x,t)=g_1(x,t),\\ (-Mu)(x,t)=g_2(x,t),\end{cases} \qquad (x,t)\in\Gamma\times\mathrm{R}_+,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где $\Gamma=\partial\Omega$; $\mathrm{R}_+=(0,\infty)$; $\partial_t=\partial/\partial t$, ∂_n – производная по внешней нормали $n(x)=(n_1(x),n_2(x))$ к контуру Γ, $\boldsymbol{\rho}$ – поверхностная плотность пластины, $\tilde{D}=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – ее цилиндрическая жесткость, $q(x,t)$ – плотность внешних сил, действующих на пластину.

$$
\begin{aligned}
&Qu=-D(\partial_n\Delta u+(1-\nu)\partial_\tau\left[n_1n_2(\partial_2^2u-\partial_1^2u)+(n_1^2-n_2^2)\partial_1\partial_2u\right]),\\
&-Mu=D(\Delta u+(1-\nu)(2n_1n_2\partial_1\partial_2u-n_2^2\partial_1^2u-n_1^2\partial_2^2u)),
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

– операции обобщенной перерезывающей силы и изгибающего момента. $D=\tilde{D}/\rho h$, $\partial_{\boldsymbol{\tau}}$ – производная в направлении касательного к Γ орта $\boldsymbol{\tau}$, полученного из n поворотом на угол $\boldsymbol{\pi}/2$ против часовой стрелки [5].

Поскольку имеющиеся неоднородность можно перенести в краевые условия, то далее будет рассматриваться задача для однородного уравнения колебаний пластины и однородных начальных условий.

2 Динамический потенциал. Пусть $\Phi(x,t)$ – фундаментальное решение уравнения колебаний пластины, удовлетворяющее уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\partial_t^2\Phi(x,t)+D\Delta^2\Phi(x,t)=\delta(x,t),\\
&\Phi(x,t)=0, \qquad t<0,
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{\delta}(x,t)$ – функция Дирака. Несложные вычисления дают явный вид фундаментального решения:

$$\Phi(x,t)=\frac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{D}}\operatorname{si}\left(\frac{|x|^2}{4\sqrt{Dt}}\right),$$

где $\operatorname{si}(z)=-\int\limits_z^\infty\frac{\sin\mu}{\mu}d\mu$ – интегральный синус, $\theta(t)$ – характеристическая функция полуоси $(0,\infty)$.

Запаздывающий потенциал простого слоя с заданной на $\Gamma\times R$ гладкой двухкомпонентной плотностью вводится формулой:

$$(V\vec{\alpha})(x,t)=\int\limits_\Gamma\int\limits_R(\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_1(y,\tau)+\partial_{n,y}\Phi(x\text{-}y,t\text{-}\tau)\alpha_2(y,\tau))ds_y d\tau\ , \quad (2.1)$$

где $\partial_{n,y}$ – операция нормальной производной, действующая по переменной y.

Потенциал $V\vec{\alpha}$ удовлетворяют однородному уравнению колебаний пластины в $\Omega\times R_+$, а если плотность равна нулю при $t<0$, то и нулевым начальным условиям. Для потенциала $V\vec{\alpha}$ справедливы формулы скачков:

$$\begin{aligned}(QV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t)&=\pm\alpha_1(x,t)+(QV\vec{\alpha})^0(x,t),\\(-MV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t)&=\pm\alpha_2(x,t)+(-MV\vec{\alpha})^0(x,t),\end{aligned}\qquad (x,t)\in\Gamma\times R_+,\qquad (2.2)$$

Представив решения задачи (1.1) потенциалом простого слоя $u(x,t)=(V\vec{\alpha})(x,t)$, получим систему граничных уравнений

$$\begin{cases}(QV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t)=g_1(x,t),\\(-MV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t)=g_2(x,t),\end{cases}\qquad (x,t)\in\Gamma\times R_+.\qquad (2.3)$$

Однозначная разрешимость поставленной задачи была доказана в [5] в однопараметрической шкале пространств соболевского типа.

3 Применение метода потенциалов к тонкой упругой пластине прямоугольной формы. Рассмотрим тонкую упругую пластину прямоугольной формы (рис. 1).

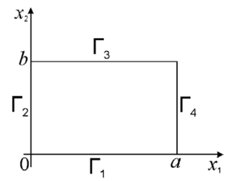


Рисунок 1

Учитывая формулы скачков (2.1), из системы (2.2) получен явный вид интегральных граничных уравнений. Далее приведем представление системы для $x=(x_1;0)\in\Gamma_1$ $(0<x_1<a)$:

$$\frac{1}{2}\alpha_1(x,t)+\sum_{k=1}^2\left[\int\limits_\Gamma\alpha_k(y,t)Q_k(x-y,t)ds_y+\int\limits_0^\infty\int\limits_\Gamma\frac{\alpha_k(y,t)-\alpha_k(y,\tau)}{(t-\tau)^2}\tilde{Q}_k(x-y,t-\tau)ds_y d\tau\right]=g_1(x,t)\,,$$

$$\frac{1}{2}\alpha_2(x,t)+\sum_{k=1}^2\left[\int\limits_\Gamma\alpha_k(y,t)M_k(x-y,t)ds_y+\int\limits_0^\infty\int\limits_\Gamma\frac{\alpha_k(y,t)-\alpha_k(y,\tau)}{(t-\tau)^2}\tilde{M}_k(x-y,t-\tau)ds_y d\tau\right]=g_2(x,t)\cdot$$

1) Пусть $y=(s,0)\in\Gamma_1$, тогда

$$Q_1(x-y,t)=0,\ M_2(x-y,t)=0,$$

$$Q_2(x-y,t) = -\frac{t\sqrt{D}}{\pi}\cdot\frac{3(1-\nu)}{(x_1-s)^4}\sin\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}t} + \frac{2-\nu}{2\pi(x_1-s)^2}\cos\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}t} \approx$$

$$\approx \frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)^2} - \frac{3(x_1-s)^2}{128\pi D t^2},$$

$$M_1(x-y,t) = -\frac{\nu t\sqrt{D}}{\pi(x_1-s)}\sin\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}t} + \frac{(1+\nu)\sqrt{D}}{2\pi(x_1-s)^2}\int_0^\infty \theta(t-\tau)\sin\frac{(x_1-s)^2}{4\sqrt{D}(t-\tau)}d\tau \approx$$

$$\approx -\frac{\nu}{4\pi} + \frac{(1+\nu)}{8\pi}\ln t - \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^4}{1536\pi D t^2}.$$

Разбиваем Γ_1 на n частей, на каждой из которых считаем плотности $\alpha_k(y,t)$ постоянными ($\alpha_{ki}(y,t) = const,\ i = \overline{1,n}$).

$$\int_{\Gamma_1}\alpha_2(y,t)Q_2(x-y,t)ds_y = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{2i}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)^2} - \frac{3(x_1-s)^2}{128\pi D t^2}ds = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{2i}(s,t)\left[\frac{1+\nu}{4\pi(x_1-s)} + \frac{(x_1-s)^3}{128\pi D t^2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i}.$$

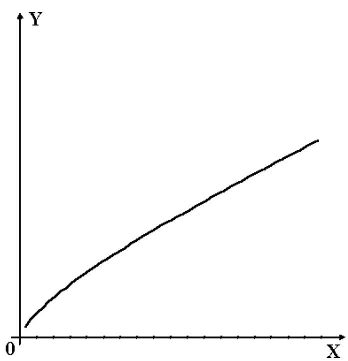
Замечание. Первое слагаемое понимаем как интеграл в смысле Адамара

$$\int\frac{dy}{y^2} = \mathrm{Re}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\frac{dy}{(y+i\varepsilon)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\frac{y^2-\varepsilon^2}{(y^2+\varepsilon^2)^2}dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{y\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2} = -\frac{1}{y}+c\ .$$

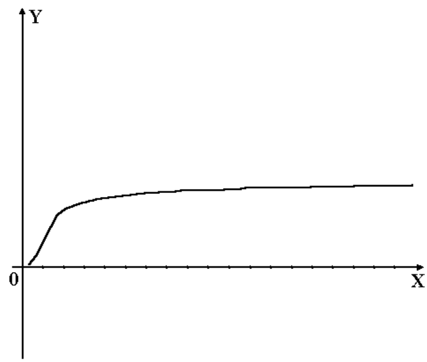
$$\int_{\Gamma_1}\alpha_1(y,t)M_1(x-y,t)ds_y = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\int_{a_{i-1}}^{a_i}\frac{(1+\nu)\ln t - 2\nu}{8\pi} - \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^4}{1536\pi D t^2}ds = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{1i}\left[\frac{((1+\nu)\ln t - 2\nu)s}{8\pi} + \frac{(1+5\nu)(x_1-s)^5}{7680\pi D t^2}\right]_{a_{i-1}}^{a_i}$$

2) на остальных частях границы $\Gamma_i,\ i = \overline{1,3}$

Интегралы $\int_{\Gamma_i}\alpha_k(y,t)Q_k(x-y,t)ds_y$, $\int_{\Gamma_i}\alpha_k(y,t)M_k(x-y,t)ds_y$, $k = 1,2$ вычисляются аналогично.



Смещение $u(t)$ в средней точки пластины под постоянной нагрузкой q = const



Смещение $u(t)$ в средней точке пластины под нагрузкой $q = t^2(t-5)^2$

Рисунок 2

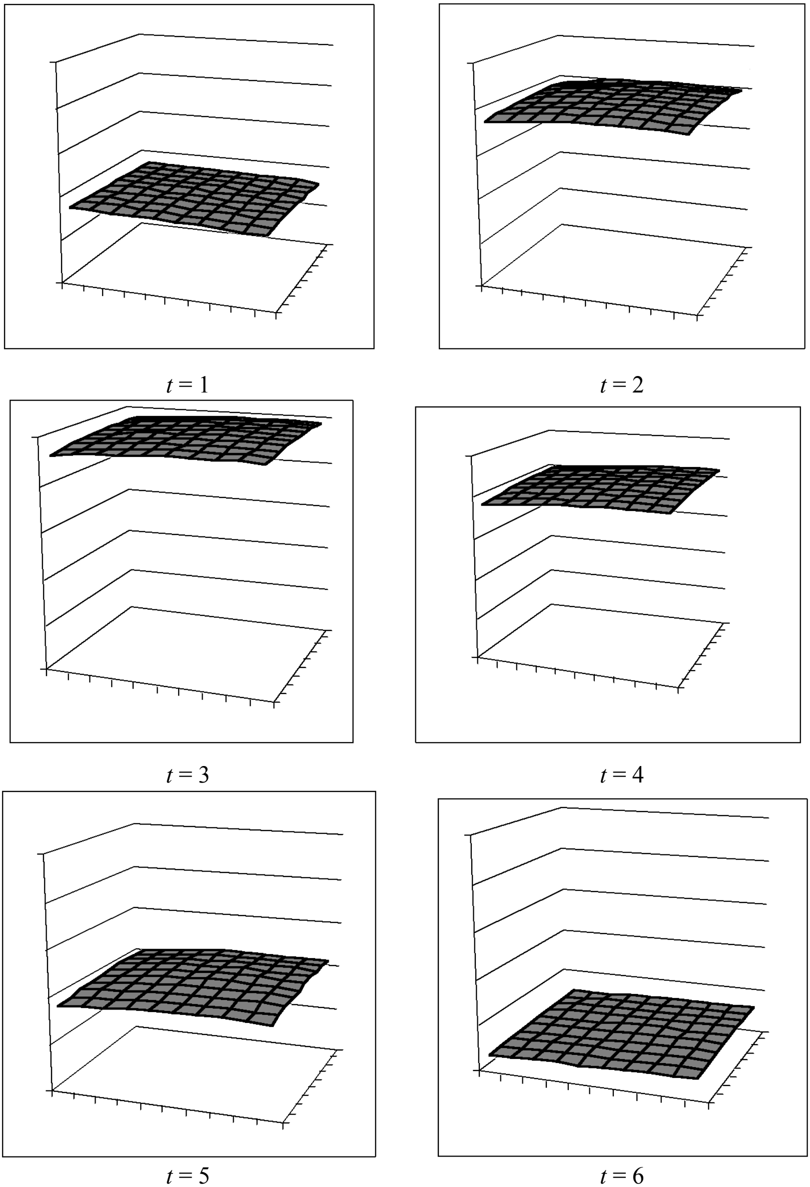


Рисунок 3

4. Численные результаты. Для численной реализации возьмем пластину размеров $1 \times 1 \times 0{,}1$. Коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м^3, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа.. Края пластины свободны. То есть решается задача вида

$$\rho h \partial_t^2 u(x,t) + \tilde{D}\Delta^2 u(x,t) = q(x,t), \qquad (x,t) \in (0,1)\times(0,1)\times(0,+\infty),$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 0, \\ \partial_t u(x,0) = 0, \end{cases} \qquad x \in (0,1)\times(0,1),$$

$$\begin{cases} (Qu)(x,t) = 0, \\ (-Mu)(x,t) = 0, \end{cases} \qquad (x,t) \in \Gamma \times \mathrm{R}_+,$$

Рассмотрим различные варианты нагрузок $q(x,t)$.

Смещение точек пластины во времени под нагрузкой $q(x,t) = q_0 \sin t$.

Вывод. Построен динамический аналог потенциала простого слоя для второй основной задачи динамики тонких упругих пластин, который позволяет определять смещение любой точки пластины в произвольный момент времени без использования методов типа конечных разностей или конечных элементов.

Список литературы: 1. *Chudinovich I.Yu.* The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems // Math. Methods Appl. Sci., – 1993. – {\bf 16.} – P. 203-215. **2.** *Chudinovich I.Yu.* The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 2. Methods for approximate solutions. // Math. Methods Appl. Sci. – 1993. – {\bf 16} – P. 217-227. **3.** *Chudinovich I.Yu.* Methods of potential theory in the dynamics of elastic media. // Russian J. Math. Phys. – 1993. – {\bf 1.} – P. 427-446. **4.** *Chudinovich I.Yu.* On the solution of the boundary equations in problems of elastic wave diffraction on the spatial cracks // Differencial'nye uravneniya. – 1993, – {\bf 29} – P. 1648-1651. (In Russian). **5.** *Chudinovich I.Yu., Gassan Yu.S.* Boundary Equations in basic Dynanic Problems for Thin Elastic Plates // Вісник Харківського національного університету, серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2000. – № 475. – С.250-258.

Поступила в редколлегию 03.11.2008.