

УДК 539.3

А.А.ОСЕТРОВ, НТУ «ХПИ», Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ RFM И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Розглядається НДС пологих багат шарових оболонок складної форми у плані з різними видами граничних умов. Математична модель задачі уявляє собою систему рівнянь, яка складена відносно прогину, переміщень у площині оболонки та кутів нахилу нормалі до серединної поверхні згідно з уточненою теорією типу Тимошенко для оболонок. Розв'язок поставленої задачі виконується варіаційно-структурним методом з використанням сплайн-апроксимації невизначених компонент структури розв'язку. Отримані чисельні результати ілюструють ефективність запропонованого методу і створеного програмного забезпечення.

A stressed state of laminated shallow shells with complex plan form and different boundary conditions is being investigated. The governing equations for shallow shells are constructed relatively of deflection, displacements and the turn angle of the middle surface of the shell, according to the Timoshenko's-type refined shell theory. The given problem is solved by variation-structural method using spline-approximation in solution structure undefined components. Obtained numerical results illustrate the effectiveness of the offered method and created software.

Область применения тонкостенных композитных конструкций сегодня представляет собой достаточно широкий спектр отраслей, таких как авиа, авто и кораблестроение, космическая техника, гражданское строительство и др. Такая распространенность приводит к закономерной необходимости расчета, как задач статики, так и динамики тонкостенных конструкций, составленных из многослойных материалов. Наиболее часто применяемым методом для решения такого рода задач является метод конечных элементов[1]. Как показывает обзор литературы, большинство авторов ограничиваются расчетом пологих оболочек прямоугольных в плане. В данной работе применен метод R-функций[2], что наряду с применением сплайн-аппроксимации неопределенных компонент позволило получить новые результаты для оболочек сложной формы в плане при разных видах граничных условиях.

1. Математическая постановка. Рассматривается многослойная полая оболочка постоянной толщины h , собранная из произвольного числа однород-

ных анизотропных слоев постоянной толщины. В соответствии с уточненной теорией первого порядка прямолинейный отрезок, нормальный к координатной поверхности, остается прямым и после деформации, сохраняя свою длину, но изменяет угол наклона к координатной поверхности. Деформации и углы поворота нормали выражаются через перемещения следующим образом[3]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w; \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \beta_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_1; \beta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_2,\end{aligned}\quad (1)$$

где u , v и w – перемещения срединной поверхности, а ψ_1 , ψ_2 – углы поворота нормали к срединной поверхности. Константами k_1 , k_2 представлены кривизны центральной поверхности оболочки.

Для внутренних усилий и моментов в рамках уточненной теории 1-го порядка справедливы следующие соотношения:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ K_{11} & K_{12} & K_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{bmatrix}\quad (2)$$

Поперечные усилия определяются как:

$$Q_1 = k_1^2 C_{55} \beta_1 + k_2^2 C_{45} \beta_2; Q_2 = k_1^2 C_{45} \beta_1 + k_2^2 C_{44} \beta_2, \quad (3)$$

где k_1^2 и k_2^2 – коэффициенты влияния сдвиговых деформаций.

В свою очередь коэффициенты C_{ij} , K_{ij} , D_{ij} определяются с помощью жесткостных характеристик слоев, используя известные формулы[4]:

$$C_{ij} = \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l dz; K_{ij} = \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l z dz; D_{ij} = \sum_{l=1}^N \int_{h_{l-1}}^{h_l} B_{ij}^l z^2 dz, \quad (4)$$

где B_{ij}^l – коэффициенты жесткости l -го слоя с учетом поворота осей ани-

зотропии, N – количество слоев оболочки, $h_l = \left\{ -\frac{h}{2}, h_1, \dots, h_{N-1}, \frac{h}{2} \right\}$ – координаты границ между слоями по толщине оболочки, относительно срединной поверхности, а диапазон изменения значений пар индексов $\langle ij \rangle = \{ \langle 11 \rangle, \langle 12 \rangle, \langle 22 \rangle, \langle 16 \rangle, \langle 26 \rangle, \langle 66 \rangle, \langle 44 \rangle, \langle 45 \rangle, \langle 55 \rangle \}$.

Потенциальная энергия деформации полой оболочки имеет вид

$$V = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + N_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + M_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + M_{12} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \right) d\Omega + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_1 \beta_1 + Q_2 \beta_2) d\Omega, \quad (5)$$

а работа внешних сил при условии воздействия только поперечных нагрузок принимает вид $A = \iint_{\Omega} q w d\Omega$, где q – интенсивность внешней нагрузки, а Ω – область, ограничивающая форму оболочки в плане.

С учетом вышеупомянутых предположений вариационная постановка сводится к нахождению минимума функционала

$$J = V - A, \quad (6)$$

2. Метод решения. При нахождении минимума функционала (6) воспользуемся методом Ритца совместно с методом R-функций (RFM) [2]. Для построения системы базисных функций рассмотрим следующие виды граничных условий:

1. Край $x = \text{const}$ шарнирно закреплен, тогда

$$v = w = \psi_2 = N_1 = M_1 = 0; \quad (7)$$

2. Край $y = \text{const}$ шарнирно закреплен, тогда

$$u = w = \psi_1 = N_2 = M_2 = 0. \quad (8)$$

Для представленных типов краевых условий структуры решения, удовлетворяющие геометрическим граничным условиям, имеют вид:

1. Шарнир при $x = \text{const}$

$$u = P_1; \quad v = \omega_2 P_2; \quad w = \omega_2 P_3; \quad \psi_1 = P_4; \quad \psi_2 = \omega_2 P_5, \quad (9)$$

где $\omega_2 = 0$ – уравнение участка шарнирно закрепленной границы, параллельного оси ou .

2. Шарнир при $y = \text{const}$

$$u = \omega_1 P_1; \quad v = P_2; \quad w = \omega_1 P_3; \quad \psi_1 = \omega_1 P_4; \quad \psi_2 = P_5, \quad (10)$$

где $\omega_1 = 0$ – уравнение участка шарнирно закрепленной границы, параллельного оси ox .

В случае смешанных граничных условий, когда шарнирное закрепление происходит по всей границе оболочки, структура решения примет вид

$$u = \omega_1 P_1; \quad v = \omega_2 P_2; \quad w = \omega P_3; \quad \psi_1 = \omega_1 P_4; \quad \psi_2 = \omega_2 P_5, \quad (11)$$

где $\omega = 0$ – уравнение всей границы области, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 – неопределенные компоненты структуры решения.

Аппроксимацию неопределенных компонент P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 будем выполнять с помощью сплайнов Шенберга 3-го порядка [5]. Пусть область, совпадающая с планформой оболочки погружается в окаймляющий прямоугольник $\Pi = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Каждая неопределенная компонента P_i , заданная на равномерной сетке (с количеством разбиений N по оси ox и M по оси oy :

$x_i = a + i \frac{b-a}{N}, y_j = c + j \frac{d-c}{M}$) может быть представлена в виде

$$P_l = \sum_k a_k^{(l)} \Psi_k^{(l)}(x, y), \quad (12)$$

где

$$\Psi_k^{(l)}(x, y) = B_3 \left(\frac{N(x-a)}{b-a} - i \right) B_3 \left(\frac{M(y-c)}{d-c} - j \right) \quad (13)$$

Причем сплайн $B_3(x)$ определяется как

$$B_3(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ 0,25(x+2)^3 & -2 < x \leq -1 \\ -0,75x^3 - 1,5x^2 + 1 & -1 < x \leq 0 \\ 0,75x^3 - 1,5x^2 + 1 & 0 < x \leq 1 \\ -0,25x^3 + 1,5x^2 - 3x + 2 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & 2 < x < +\infty \end{cases} \quad (14)$$

Системы базисных функций для примера шарнирного закрепления (7) в соответствии с их структурным представлением (9) имеют вид:

$$\begin{aligned} u_k &= \Psi_k^{(1)}(x, y); & v_k &= \omega_2 \Psi_k^{(2)}(x, y); & w_k &= \omega_2 \Psi_k^{(3)}(x, y); \\ \Psi_{1k} &= \Psi_k^{(4)}(x, y); & \Psi_{2k} &= \omega_2 \Psi_k^{(5)}(x, y). \end{aligned} \quad (15)$$

Неизвестные коэффициенты $a_k^{(l)}$ в разложении (12) определяются из условия минимума функционала (6) посредством метода Рунге, который позволяет свести задачу к решению системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial a_k^{(l)}} = 0. \quad (16)$$

Численная реализация предложенного метода решения основана на совмещении аналитических возможностей математического пакета Maple[6] и ряда быстрых программных модулей, отвечающих за численные методы интегрирования и линейной алгебры, написанных на языке программирования C++.

3. Численные результаты. Исследуем НДС квадратной в плане двухслойной [0/90] полой сферической оболочки [7] под действием синусоидальной нагрузки $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$. Значения параметров жесткости слоев приняты следующими: $E_1 = 19,2 \cdot 10^6$; $E_2 = 1,56 \cdot 10^6$; $G_{12} = 0,82 \cdot 10^6$; $G_{23} = 0,523 \cdot 10^6$; $G_{13} = G_{12}$; $\nu_{12} = 0,24$. Граничные условия для этой задачи приняты в виде шарнирного закрепления по всей границе области, отношение толщины к характерному геометрическому размеру примем $h/a = 0,1$. Тогда структура решения примет вид (11), где $\omega_2 = x(a-x)/a$ и $\omega_1 = y(a-y)/a$; $\omega = \omega_1 \wedge_0 \omega_2$, а $\vee_0, \wedge_0 - R$ – операции [2].

В табл. 1 представлено сравнение полученных результатов для безразмерного параметра $\bar{w} = wh^3 E_2 10^2 / (q_0 a^4)$ центрального прогиба исследуемых обо-

лочек при разных значениях кривизны, с результатами других авторов (CST – классическая теория, FSDT – теория первого порядка типа Тимошенко, HSDT – теории более высоких порядков).

Таблица 1 – Безразмерный параметр \bar{w} прогиба оболочек для разных кривизн

R/a	Источник результатов				
	Сетка сплайнов	Данная работа	HSDT [7]	FSDT [8]	CST [8]
5	4x4	1,4351	1,4150	1,4393	1,3185
	8x8	1,4342			
	16x16	1,4342			
	20x20	1,4342			
10	4x4	1,5561	1,5329	1,5566	1,4211
	8x8	1,5552			
	16x16	1,5551			
	20x20	1,5551			
50	4x4	1,5993	1,5748	1,5984	1,4574
	8x8	1,5984			
	16x16	1,5983			
	20x20	1,5983			
Пласт.	4x4	1,6011	1,5766	1,6001	1,4589
	8x8	1,6002			
	16x16	1,6001			
	20x20	1,6001			

Сходимость полученных результатов (табл. 1) при различных сетках сплайнов и их сравнение с известными в литературе, свидетельствует о достоверности предложенного метода и разработанного программного обеспечения. Также стоит отметить, что изменение кривизны сферической оболочки (табл. 1) в диапазоне кривизн от $k_1 = k_2 = 0$ до $k_1 = k_2 = 0,2$ приводит к уменьшению безразмерного параметра центрального прогиба на 10 %.

Исследуем НДС двухслойной [0/90] пологой оболочки двойкой кривизны со сложной формой плана (рис. 1) при условии шарнирного закрепления на всей границе. Параметры жесткости слоев примем такими же, как и в предыдущей задаче, а внешнюю нагрузку рассмотрим двух видов: синусоидальную

$$q = q_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \text{ и равномерную } q = q_0.$$

Геометрические параметры оболочки примем в виде $a/b = 1$; $2a/R_1 = 0,1$; $h/2a = 0,1$; $a_1/a = 0,8$; $b_1/b = 0,8$. Структуру решения для шарнирно закрепленной оболочки выберем в виде (11), где

$$\omega = (f_3 \wedge_0 f_4) \wedge_0 (f_1 \wedge_0 f_2); \quad \omega_1 = ((f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6)) \wedge_0 f_1;$$

$$\omega_2 = ((f_3 \vee_0 f_4) \vee_0 ((f_7 \vee_0 f_8) \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10}))) \wedge_0 f_2; f_1 = (b^2 - y^2) / 2b;$$

$$f_2 = (a^2 - x^2) / 2a; f_3 = (y^2 - b_1^2) / 2b_1; f_4 = (x^2 - a_1^2) / 2a_1;$$

$$f_5 = -(x^2 + y^2 + 2a_1x + a_1^2 - b_1^2) / 2b_1; f_6 = -(x^2 + y^2 - 2a_1x + a_1^2 - b_1^2) / 2b_1;$$

$$f_7 = (x^2 + y^2 + x(a_1 + a) - 2yb_1 + aa_1 + b_1^2) / (a_1 - a);$$

$$f_8 = (x^2 + y^2 - x(a_1 + a) - 2yb_1 + aa_1 + b_1^2) / (a_1 - a);$$

$$f_9 = (x^2 + y^2 + x(a_1 + a) + 2yb_1 + aa_1 + b_1^2) / (a_1 - a);$$

$$f_{10} = (x^2 + y^2 - x(a_1 + a) + 2yb_1 + aa_1 + b_1^2) / (a_1 - a).$$

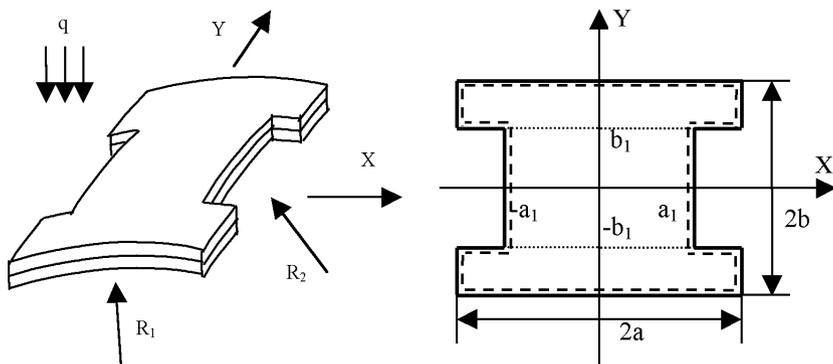


Рисунок 1 – Форма оболочки

В табл. 2 представлены результаты в виде безразмерного параметра для центрального прогиба $\bar{w} = wh^3 E_2 10^2 / (q_0 (2a)^4)$ и изгибающих моментов $\bar{M}_1 = M_1 10^2$; $\bar{M}_2 = M_2 10^2$, для разных значений кривизны $2a/R_2 = 0,2; 0,1; 0,05$ и двух видов внешней нагрузки.

На рис. 2 представлены графики распределения безразмерного параметра прогиба и моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2 соответственно в сечении $y = 0$ для случая синусоидальной нагрузки и разных значений кривизны $2a/R_2 = 0,2; 0,1; 0,05$, когда кривизна $2a/R_1 = 0,1$.

В соответствии с табл. 2 и рис. 2 изменение одной из кривизн оболочки приводит к повышению значения момента \bar{M}_1 для случая равномерно распределенной нагрузки почти на 14 %, что на 6 % больше, нежели в случае синусоидальной нагрузки. В то же время изменения значений момента \bar{M}_2 в обоих случаях не превышают 3 %. Сопоставление результатов табл. 1 и табл. 2 для случая сферической оболочки с кривизной $k_1 = k_2 = 0,1$ показывает, что появление шарнирно закрепленных вырезов приводит к уменьшению значения безразмерного центрального прогиба на 35 %, что сопоставимо с результатом применения синусоидальной нагрузки вместо равномерно распределенной к оболочке с вырезом (табл. 2).

Таблица 2 – Безразмерный прогиб \bar{w} и моменты $\bar{M}_1; \bar{M}_2$ двухслойной оболочки

$2a/R_2$	Сетка сплайнов	Синусоид. нагрузка			Равном. нагрузка		
		\bar{w}	\bar{M}_1	\bar{M}_2	\bar{w}	\bar{M}_1	\bar{M}_2
0,2	20x20	0,9869	3,1474	2,7469	1,4183	4,4121	3,6256
	40x40	0,9927	3,2002	2,7578	1,4277	4,4903	3,6429
	60x60	0,9948	3,2188	2,7619	1,4312	4,5181	3,6493
0,1	20x20	1,0148	3,3191	2,6901	1,4595	4,6621	3,5480
	40x40	1,0207	3,3744	2,7007	1,4690	4,7444	3,5648
	60x60	1,0229	3,3940	2,7046	1,4726	4,7736	3,5711
0,05	20x20	1,0244	3,3917	2,6474	1,4735	4,7679	3,4882
	40x40	1,0303	3,4482	2,6579	1,4831	4,8518	3,5048
	60x60	1,0325	3,4682	2,6617	1,4867	4,8816	3,5109

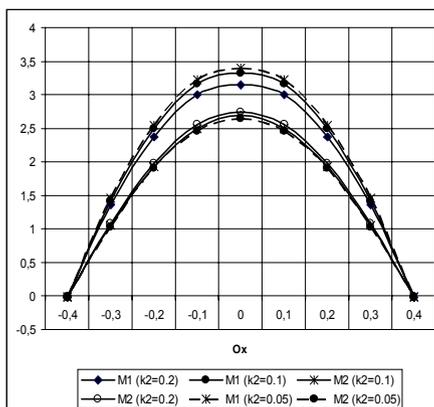
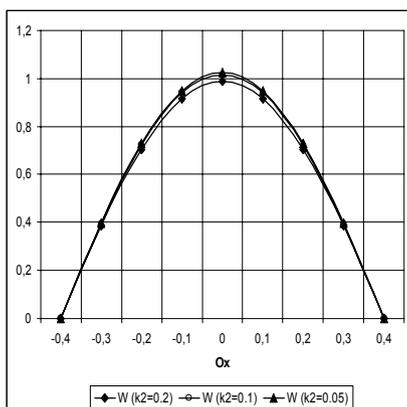


Рисунок 2 – Значения параметров прогиба \bar{w} и моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_2

В дальнейшем предполагается, что база алгоритмов и программное обеспечение будут использованы для исследования колебаний оболочек.

Список литературы: 1. *K. S. Sai Ram, T. Sreedhar Babu* Study of bending of laminated composite shells. Part I: shells without cutout // *Comp. structures.* – 51. – 103-116 (1999). 2. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 552 с. 3. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М., 1956. 4. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с. 5. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с. 6. *Дьяконов В.* Maple 9 в математике, физике, образовании. – "СОЛОН-Пресс", 2004. – 688 с. 7. *C.P. Wu, Y.W. Chi* Asymptotic solutions of laminated composite shallow shells with various boundary conditions // *Acta Mechanica.* – 132. – 1-18 (1999). 8. *Kheider A. A., Librescu L., Frederick D.* A shear deformable theory of laminated composite shallow shell-type panels and their response analysis Part II: Static response // *Acta Mechanica.* – 77. – 1-12 (1989).

Поступила в редакцию 22.11.2008