

С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, НТУ «ХПИ», Харьков

О СКОРОСТИ И ДАЛЬНОСТИ ПОЛЕТА ИСКРЫ, КАК ЧАСТИЦЫ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В функциях Эйри побудовано розв'язки рівняння польоту іскри, яка згорас, як легкої сферичної частки змінного радіуса та маси. Виведено компактні формули для обчислення кінематичних характеристик польоту частки за квадратично-поліноміального опору газу, який рухається.

In Airy functions the solutions of the equation of flight a burning spark, as easy spherical particle of variable radius and weight is constructed. The compact formulas for calculation kinematical characteristics of flight a particle are deduced at square-polynomial resistance of motive gas.

Актуальность темы и цель исследования. Летящие, горящие искры являются потенциальным источником зажигания легковоспламеняемых материалов и объектов. Это испаряющиеся нефтепродукты, сельхозобъекты, где хранятся хлопок, солома, сено; участки полей созревших зерновых культур и лесные хвойные массивы в сухое жаркое время года. Поэтому определение кинематических характеристик полета горящих искр является актуальным в обеспечении безопасной жизнедеятельности человека. Эта задача с точки зрения механики сводится к рассмотрению движения частицы переменных размеров и массы. Начало исследований движения тел переменной массы положил И.В. Мещерский [1], что в последующем нашло развитие в [2] и многих других публикациях. Однако в большинстве исследований по механике тел переменной массы внимание сосредоточено на учете переменности массы и движущей реактивной силы. Последняя оказывается очень малой при всестороннем диффузионном сгорании сферического тела, что характерно для сгорающих искр. Здесь главными, влияющими на полет, факторами являются переменность массы и размеров, с чем связано аэродинамическое сопротивление движению. Поэтому изучение движения сгорающих частиц заслуживает отдельного внимания, чему посвящено содержание этой статьи. Целью работы является получение компактных формул для расчета скорости и дальности полета горящей искры в попутно движущемся потоке газа, а также апробация формул путем вычислений.

Основные обозначения и допущения при составлении уравнения движения. Основные упрощения заключаются в пренебрежении действием реактивной силы и веса в системе действующих на частицу сил. Пренебрежение гравитацией не вносит больших погрешностей при рассмотрении полета легких частиц, к которым относятся искры при вылетании их из выхлопных труб ДВС.

Обозначим символом $v = v(t)$ абсолютную скорость полета частицы, а ее значение в момент вылетания из выхлопной трубы – символом v_0 . С этого момента ведем отсчет времени полета t . Поток выхлопного газа в воздухе считаем замедленным, аппроксимируя его скорость выражением

$$V = V(t) = V_0 - at,$$

в котором a, V_0 – положительные постоянные.

Начальную скорость искры принимаем большей, чем скорость газа. При выполнении неравенства $v_0 > V_0$ газовый поток (струя) не разгоняет, а тормозит движение искры, причем будет положительной относительная скорость

$$v_1 = v_1(t) = v(t) - (V_0 - at). \quad (1)$$

Силу аэродинамического сопротивления F_c описываем квадратично-полиномиальной зависимостью

$$F_c = \pi r^2 (k_1 v_1 + k_2 v_1^2),$$

где πr^2 – площадь миделевого сечения частицы; k_1, k_2 – постоянные коэффициенты аэродинамического сопротивления движению.

Таким образом, сила сопротивления меняется не только в связи с изменением относительной скорости, а также – в связи с изменением радиуса r частицы во времени. Далее эту зависимость принимаем в виде

$$r = r(t) = r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t},$$

что согласуется с процессом испарения и сгорания капель жидкого топлива [3,4].

Здесь $r_0 = r(0)$ – начальное значение радиуса; $\varepsilon > 0$ – параметр, характеризующий скорость сгорания искры на промежутке времени $t \in [0; 1/\varepsilon)$.

Принимая плотность частицы ρ постоянной, ее массу, как шара, определяем выражением

$$M = M(t) = \frac{4}{3} \pi \rho r^3.$$

Скорость полета искры под действием силы инерции с учетом силы сопротивления будет решением дифференциального уравнения

$$M \frac{dv}{dt} + \pi r^2 (k_1 v_1 + k_2 v_1^2) = 0,$$

которое после сокращения на M принимает вид

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{r} (\delta_1 v_1 + \delta_2 v_1^2) = 0, \quad (2)$$

где $\delta_{1,2} = \frac{3k_{1,2}}{4\rho}$.

Согласно (1) $\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} - a$. Поэтому из (2) получаем

$$\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{r} (\delta_1 v_1 + \delta_2 v_1^2) - a = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) ищем при начальном условии

$$v_1(0) = v_0 - V_0. \quad (4)$$

Замкнутое решение задачи Коши в функциях Эйри. Перейдем в (3) от переменной t к переменной $\xi = \sqrt{1 - \varepsilon t}$. Поскольку

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\xi} \frac{dv_1}{d\xi}; \quad r = r_0 \xi; \quad \xi(0) = 1,$$

вместо выражений (3) и (4) получаем

$$\frac{dv_1}{d\xi} - \alpha_2 \left(v_1 + \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \right)^2 + \frac{2a}{\varepsilon} \xi + \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_2} = 0; \quad (5)$$

$$v_1(1) = v_0 - V_0; \quad (6)$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{2}{\varepsilon r_0} \delta_{1,2}.$$

Выразим v_1 через вспомогательную функцию $w(\xi)$ по формуле

$$v_1 = -\frac{1}{\alpha_2} w^{-1} \frac{dw}{d\xi} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}. \quad (7)$$

Этим преобразованием уравнение (5) сводим к виду

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{2a\alpha_2}{\varepsilon} \left(\xi + \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} \right) w = 0. \quad (8)$$

Общим решением (8) есть

$$w = c_1 Ai(b\eta) + c_2 Bi(b\eta). \quad (9)$$

Здесь $b = \sqrt[3]{\frac{2a\alpha_2}{\varepsilon}}$; $\eta = \xi + \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2}$; c_1, c_2 – произвольные постоянные; $Ai(x)$,

$Bi(x)$ – функции Эйри.

Продифференцировав решение (9) согласно (7), находим, что

$$v_1(t) = -\frac{b}{\alpha_2} \frac{c Ai'(b\eta) + Bi'(b\eta)}{c Ai(b\eta) + Bi(b\eta)} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}. \quad (10)$$

Здесь $Ai'(x)$, $Bi'(x)$ – производные функций Эйри; $c = c_1 c_2^{-1}$ – произвольная постоянная, которую определяем с помощью начального условия (6), что приводит к выражению

$$c = -\frac{Bi'(\eta_0) + v_* Bi(\eta_0)}{v_* Ai(\eta_0) + Ai'(\eta_0)}, \quad (11)$$

где $\eta_0 = \left(\frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} + 1 \right) b$; $v_* = \frac{1}{b} \left(\alpha_2 (v_0 - V_0) + \frac{\alpha_1}{2} \right)$.

Учитывая (1) и (10), получаем формулу скорости полета искры

$$v(t) = V_0 - at - \frac{b}{\alpha_2} \frac{c Ai'(b\eta) + Bi'(b\eta)}{c Ai(b\eta) + Bi(b\eta)} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_2}, \quad (12)$$

в которой $\eta = \eta(t) = \frac{\alpha_1^2 \varepsilon}{8a\alpha_2} + \sqrt{1 - \varepsilon t}$.

Функции Эйри и их производные затабулированы в [5], [6]. Поэтому, вы-

числение $v(t)$ можно проводить с помощью таблиц.

Расчет существенно упрощается, если не учитывать замедление скорости потока газа. При $a = 0$ решение уравнения (5) представляется в элементарных функциях и имеет вид

$$v_{1a}(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2(v_0 - V_0)} \right) \exp[\alpha_1(1 - \sqrt{1 - \varepsilon t})] - 1 \right\}^{-1}.$$

Оно удовлетворяет начальному условию (4).

Вычисление пролетаемого искрой пути. Путь S , представляемый интегралом

$$S = \int_0^t v(t) dt, \quad (13)$$

для решения (13) не выражается в замкнутом виде через известные функции. Поэтому для вычисления S в общем случае приходится проводить численное интегрирование. Однако, на начальном участке полета, когда $\varepsilon t \leq 0,5$, а искра является наиболее пожароопасной, можно построить приближенную формулу определения пути. Чтобы получить ее разложим S на два слагаемых

$$S = S_{II} + \Delta S, \quad (14)$$

$$\text{где } S_{II} = \int_0^t v_{1II}(t) dt + V_0 t; \quad \Delta S_n = \int_0^t [v(t) - v_{1II}(t) - V_0] dt.$$

Функцией $v_{1II}(t)$ выше обозначили аппроксимацию $v_1(t)$ на промежутке $t \in [0; 1/(2\varepsilon)]$, которая аналитически интегрируется по t . В качестве такой принимаем

$$v_{1II}(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[\left(1 + \frac{\alpha_1}{(v_0 - V_0)\alpha_2} \right) \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon\alpha_1 t\right) - 1 \right]^{-1}. \quad (15)$$

Для нее

$$S_{II} = \frac{2}{\varepsilon\alpha_2} \left\{ \ln \left[\left(\frac{(v_0 - V_0)\alpha_2}{\alpha_1} + 1 \right) \exp\left(\frac{1}{2}\varepsilon\alpha_1 t\right) - \frac{(v_0 - V_0)\alpha_2}{\alpha_1} \right] - \frac{\varepsilon\alpha_1 t}{2} \right\} + V_0 t. \quad (16)$$

Второе слагаемое в формуле (14) можно приближенно вычислить по формуле трапеций

$$\Delta S \approx \frac{1}{2} t [v(t) - v_{1II}(t) - V_0]. \quad (17)$$

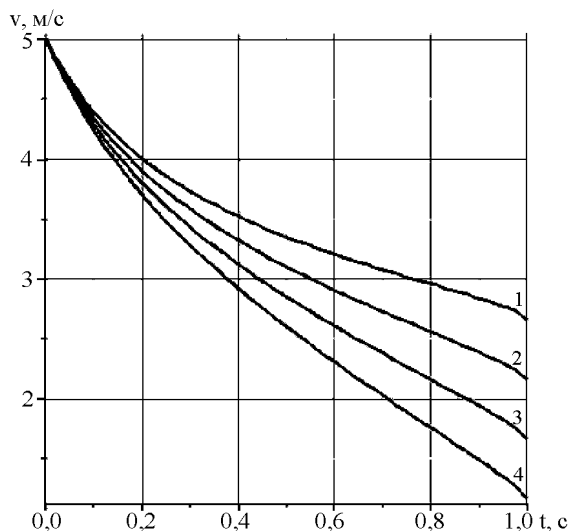
Таким образом, приближенное вычисление пути сводится к применению формул (12), (14), (15), (16) и (17).

Результаты расчетов и выводы. Изучим, как влияет ускорение a на скорость полета искры v , для этого примем следующие исходные данные: $r_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ м; $k_1 = 5 \cdot 10^{-1}$ Н·с/м³; $k_2 = 8 \cdot 10^{-1}$ Н·с²/м⁴; $V_0 = 3$; $v_0 = 5$ м/с;

$\varepsilon = 1 \text{ с}^{-1}$; $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. Цифрами 1,2,3,4 на рисунке обозначены зависимости, полученные для значений $a = 0,5$; 1; 1,5; 2 м/с. С увеличением ускорения, вызывающего уменьшение скорости потока газа, падает скорость искры.

Проверим точность приближенной формулы (14). Для этого сравним результаты, полученные по формуле (14), с результатами численного интегрирования (13). Расчет проведен при $a = 0,5 \text{ м/с}^2$ и предыдущих остальных исходных данных. Результаты расчета представлены в таблице.

Сопоставляя значения дальности полета, полученные численно из (13) и по формуле (14), можно сделать вывод о высокой точности предложенных расчетных формул.



Зависимости скорости полета от времени для различных a

Значения дальности полета S , полученные различными способами

$t, \text{ с}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Числ. инт. (13)	0,467	0,886	1,272	1,634	1,977
По форм. (14)	0,467	0,884	1,269	1,629	1,970

Выводы. Расчетная апробация полученных формул показала, что они приводят к результатам, которые согласуются с физическими представлениями о рассматриваемом процессе. Поэтому, после идентификации входящих в них параметров, формулы могут применяться для расчета кинематических характеристик искры в конкретных условиях полета.

Список литературы: 1. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с. 2. *Космодемьянский А.А.* Курс теоретической механики. Ч. 2, 3-е изд. – М.: Просвещение, 1966. – 398 с. 3. *Воинов А.Н.* Сгорание в быстроходных поршневых двигателях. – М.: Машиностроение, 1977. – 277 с. 4. *Абрамчук Ф.И., Марченко А.П., Разлейцев Н.Ф.* и др. Со-

временные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности. – Киев: Техника, 1992. – 272 с. 5. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. 6. *Смирнов А.Д.* Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 260 с.

Поступила в редколлегию 11.11.2008