

УДК 539.3

Н.И.ОБОДАН, докт.техн.наук; ***Н.Б.МАКАРЕНКО***, канд.техн.наук;
Днепропетровский национальный университет

ИДЕНТИФИКАЦИОННЫЙ ПОДХОД В ГРАНИЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Розглядається проблема ідентифікації геометричних параметрів реальної системи за допомогою вимірів відгуків досліджуваної системи на зовнішній вплив. Розв'язання такої задачі зв'язано із знаходженням зворотного оператора для крайової задачі теорії оболонок, що при числовій реалізації приводить до нездоланих труднощів, що визначені поганою обумовленістю задачі. В поданій роботі пропонується підхід, заснований на комбінації чисельного розв'язання послідовних прямих задач, методу оптимізації (метод Ньютона) і методів регуляризації.

The problem of identification of geometrical parameters of real system with the help of measurements of the responses of researched system on external influence is considered. The decision of such task is connected to finding of the inverse operator for a boundary value problem of the theory of shells, which at numerical realization results in insuperable difficulties, which are predetermined by bad conditionality of a task. In the present work the approach based on a combination of the numerical decision of consecutive direct tasks, method of optimization (method of Newton) and regularization methods is offered.

Введение и постановка задачи. Решение обратных задач в механике деформируемого твердого тела для систем с распределенными параметрами яв-

ляется весьма актуальным, поскольку позволяет решать проблемы диагностики состояния различных систем по результатам наблюдений за ними. Проблема состоит в идентификации физических и геометрических параметров реальной системы с помощью измерений откликов исследуемой тонкостенной системы на внешнее воздействие. Решение такой задачи связано с получением обратного оператора для краевой задачи теории оболочек, что при численной реализации приводит к непреодолимым трудностям, определяемым, в первую очередь, плохой обусловленностью задачи. Общие постановки и методы решения некоторых обратных задач с использованием идентификационного подхода развиваются в работах [1–3]. Методы, используемые для решения обратных задач, базируются, как правило, на построении функции Грина в сочетании с методами оптимизации [1, 3]. Именно поэтому существующие решения ограничиваются классическими постановками задач. Достаточно полный обзор работ по обратным задачам в механике деформируемого тела представлен в монографии А.О.Ватульяна [1].

В настоящей работе предлагается подход, основанный на сочетании численного решения последовательности прямых задач, метода оптимизации (метод Ньютона) и методов регуляризации.

Рассматривается тонкостенная конструкция, имеющая нарушения сплошности материала, место расположения, форма и размеры которых подлежат определению. На поверхности конструкции введем конечносвязную область Ω , ограниченную контуром $\Gamma(x,y)$ и внутренними несвязными контурами $\Gamma_k(x,y)$ (x,y – декартовы координаты на плоскости), содержащими в себе пустые области Ω_k . Контур Γ и Γ_k являются гладкими контурами, причем их уравнения представимы в виде $\rho_\Gamma = \rho_\Gamma(x,y)$, $\rho_\Gamma^k = \rho_\Gamma^k(x,y)$, $k = 1, m$, где $\rho_\Gamma, \rho_\Gamma^k$ – непрерывно дифференцируемы.

Деформированное состояние оболочки, следуя И. И. Воровичу [4], опишем обобщенным решением в виде пары функций w, Ψ , удовлетворяющей интегральным тождествам (пространства H_1 и H_2 определены там же):

$$\begin{aligned} (w \cdot \phi)_{H_1} &= \int_{\Omega_0} (C^{ik} C^{jl} \cdot B_{ij} \cdot \phi \cdot \nabla_{kl} \Psi + R^3 \phi) d\Omega_0 ; \\ (\Psi \cdot \theta)_{H_2} &= \int_{\Omega_0} C^{ik} C^{jl} \cdot w \cdot B_{ij} \cdot \nabla_{kl} \theta d\Omega_0 , \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{где } \Omega_0 = \Omega - \sum_{k=1}^m \Omega_k ;$$

$\Psi(x,y)$ – функция усилий, введенная как $T^{ij} = C^{ik} C^{jl} \cdot \nabla_{kl} \Psi$;

T^{ij} – усилия в срединной поверхности,

C^{ik} – составляющие дискриминантного тензора,

∇_{kl} – оператор двукратного дифференцирования,

B_{ij} – коэффициенты квадратичной формы,

R^3 – проекция вектора поверхностной нагрузки на нормаль к поверхности.

На контуре Γ необходимо предварительное выполнение условий:

$$w|_{\Gamma} = \tilde{w} \text{ и (или) } \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = \tilde{\chi}, \quad (2)$$

где n – направление нормали к контуру, χ – угол поворота. Условия свободного края на любых контурах Γ_k являются естественными для обобщенного решения (1).

Пусть известны следы решения (1) $U^*_{pi}, p = \overline{1, N}, i = \overline{1, 3}$ в точках с координатами (x_p, y_p) ; $(x_p, y_p) \in \Omega$. Задача состоит в определении функций $\rho_{\Gamma}^k(x, y)$, для которой решение $U(\rho_{\Gamma}^1, \rho_{\Gamma}^2, \dots, \rho_{\Gamma}^m)$ краевой задачи (1), (2) удовлетворяет условиям

$$U_{pi} - U^*_{pi} = 0; \quad p = \overline{1, N}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Метод решения

Построим дискретную модель рассматриваемой оболочки путем конечно-элементного разбиения многосвязной области Ω с границами $\Gamma, \Gamma_k, k = \overline{1, m}$. Введем сетку дискретизации, узлы которой имеют координаты $(x_i, y_i), i = \overline{1, L}$. Функции U, Φ можно аппроксимировать через их узловые значения [5]:

$$U = \sum_{i=1}^L U_i H_i(x, y); \quad \Phi = \sum_{i=1}^L H_i(x, y), \quad (4)$$

где H_i – функции формы,

L – число узлов элемента.

Для описания ломаной используем вектор $X = \{x_d, x_d\} = X\{z_j\}; d = \overline{1, D}; j = \overline{1, 2D}$. После подстановки (4) в (1) и интегрирования система разрешающих алгебраических уравнений принимает вид

$$K \cdot W = P, \quad (5)$$

где K – матрица жесткости,

W – вектор перемещений $W = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_1, v_1, w_1\}$,

P – проекция вектора нагрузки $R = \{R^1, R^2, R^3\}$.

Решение системы уравнений (5) проводится на основе конечноэлементного пакета прикладных программ аналогично [6]. Для решения задачи (1)–(4) составим функцию невязки $\Delta^2(\rho_{\Gamma}) = (\tilde{U} - U^*)^T \cdot (\tilde{U} - U^*)$, где \tilde{U} – вектор решения краевой задачи (1), (2) при заданных векторах $X^k = \{z_j^k\}$. Необходимо при заданных векторах нагрузки и перемещений определить вектор X так, чтобы удовлетворялось условие

$$\Delta X \Rightarrow \min_x. \quad (6)$$

Это условие приводит к соотношению [6]:

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot \Delta, \quad (7)$$

где элементы матрицы $A = \{a_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial u_p}{\partial z_j} \right\}, i, j = \overline{1, M}$ определяются численно,

путем решения соответствующих прямых задач. В случае, когда $2D = M = N$, в качестве алгоритма идентификации вектора X на основе условия (7) и решения прямой задачи (5) можно использовать алгоритм Гаусса-Ньютона в форме

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - A^{-1} [M \times M] \Big|_{X^{(n)}} \cdot \Delta(X^{(n)}).$$

Так как задача (1) – (4) является некорректной [1], матрица A плохо обусловлена и требует регуляризации. Регуляризация матрицы A проводится в два этапа:

1. выбор информативных точек сравнения (x_p, y_p) , $p = (p_1, \dots, p_N)$, $p = \overline{1, P}$, где N – заданное число точек измерения, и информативных точек аппроксимации (x_d, y_d) ; $d \in d_1, \dots, d_N$, для которых выполняется условие

$$\left(a_{ii} - \sum_{j=1}^M |a_{ij}| \right) \Rightarrow \max_i, i = \overline{1, M}. \quad (8)$$

Для этого определяются значения выражений $a_{ii} - \sum_{j=1}^M |a_{ij}|$ по всем строкам матрицы A с расположением последовательности значений по мере их убывания. Первые P значений из всех возможных и определяют номера тех строк матрицы A , которые являются строками регуляризированной матрицы \tilde{A} . Из числа M столбцов выбираются те D , которые усиливают условие (8). Число P соответствует заданному количеству точек измерений (i_1, \dots, i_P) , а номера узлов (j_1, \dots, j_P) – точкам дискретизации, в которых проводятся измерения, и точкам восстановления значений X соответственно. Число P выбирается как соответствующее условию

$$\|A(X^{(n)}, P) \cdot X^{(n)} - \Delta(X^{(n)}, P)\| \rightarrow \inf_P. \quad (9)$$

2. Если значение $\det \tilde{A}$ близко к нулю, используется регуляризирующий функционал А. Н. Тихонова [7], в результате чего нормальное решение уравнений типа (6) приближенно заменяется на решение системы

$$(\alpha \cdot E + A^T(X^{(n)}) \cdot A(X^{(n)})) \cdot X^{(n)} = A^T(X^{(n)}) \cdot \Delta(X^{(n)}), \quad (10)$$

где E – единичная матрица. Для определения параметра α по невязке используется условие [1, 2, 7], выполнение которого зависит от величины α :

$$\|A(X^{(n)}) \cdot X^{(n)} - \Delta(X^{(n)})\| \leq \varepsilon, \quad (11)$$

где ε – заданный малый параметр.

Сформулируем последовательность действий при идентификации дефекта:

1. Формирование дискретной модели и начального приближения $X^0 = \{z_j\}$, $j = \overline{1, 2D}$ с помощью алгоритма, реализующего метод конечных элементов: вычисляется вектор характерных перемещений для соответствующей системы и определяются границы области, где $\delta > \gamma$ ($\delta = |U_p^*(\rho_f) - \bar{U}_p|$, \bar{U}_p – перемещения для системы без дефекта), γ – малое число.

2. Численное построение матрицы A .
3. Выбор элементов, составляющих матрицу \tilde{A} .
4. Регуляризация матрицы \tilde{A} .
5. Определение вектора $X = \{z_j\}$ (если $\det \tilde{A} \approx 0$) с заданной точностью.
6. Определение числа P из условия (9) и соответствующего вектора X .

Результаты расчетов и выводы

Изложенный алгоритм был применен для решения обратной задачи восстановления размера и формы пробойны в оболочечной конструкции по результатам наблюдений. В качестве наблюдений использовались решения соответствующих прямых задач для тонкостенных цилиндрических панелей с различными формами повреждений. Исследована возможность определения при помощи изложенной методики размеров, формы и мест расположения дефекта, наличие которого обусловило выявленное поведения реальной конструкции под действием известного воздействия.

В качестве исследуемой конструкции рассматривалась тонкая (толщина $h = 10^{-3}$ м) стальная (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu = 0,3$) квадратная в плане (сторона $a = 1$ м) цилиндрическая панель, защемленная по угловым точкам, а в серединах сторон нагруженная силами $P = 1$ Н. Панель разбивалась сеткой 50×50 на треугольные конечные элементы с шестью степенями свободы в узлах (всего 5000 элементов). Приращение для построения матрицы A бралось равным 10^{-3} м, для начального приближения формы границы дефекта выбиралось $\delta = 1 \cdot 10^{-4}$. Рассматривались панели, имеющие сквозные треугольные и круглые отверстия в центральной и в угловой частях панели.

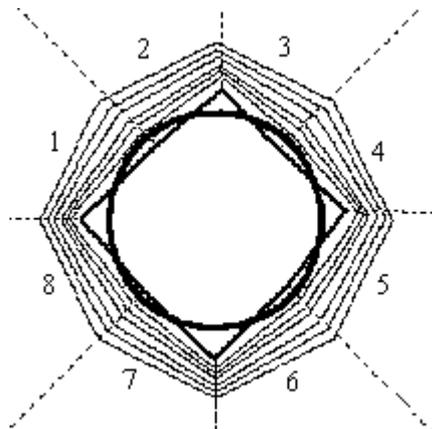


Рисунок 1 – Приближение формы круглого отверстия по 8 точкам

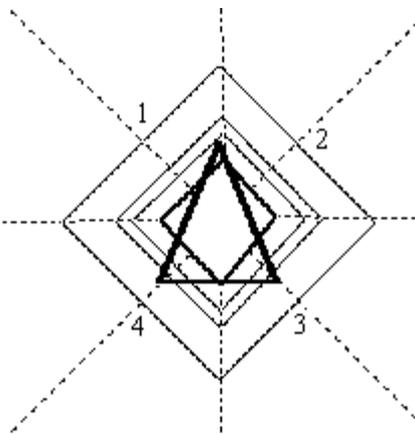


Рисунок 2 – Приближение формы треугольного отверстия по 4 точкам

На рисунках приведены результаты идентификации формы дефекта с заданной точностью $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-6}$ вычислений по невязкам. Пунктирными линиями

обозначены элементы разбиения области. Жирными линиями на рисунках обозначены действительные границы отверстия, тонкими линиями обозначены контуры приближений (цифрами отмечены звенья ломаной начального приближения), линиями средней толщины – результат приближений формы и места расположения дефекта. Заданная точность расчетов с помощью метода Ньютона достигалась за 5 – 12 итераций. Рис. 1 соответствует процессу определения места расположения центрального круглого отверстия, граница которого приближается 8-звенной замкнутой ломаной. На рис. 2–4 проиллюстрировано влияние расположения и числа звеньев P (4, 4 и 3 соответственно) ломаной, аппроксимирующей контур сквозного треугольного отверстия, расположенного в угловой части панели, на окончательный результат идентификации формы повреждения. Рис. 4 соответствует минимальной норме (9).

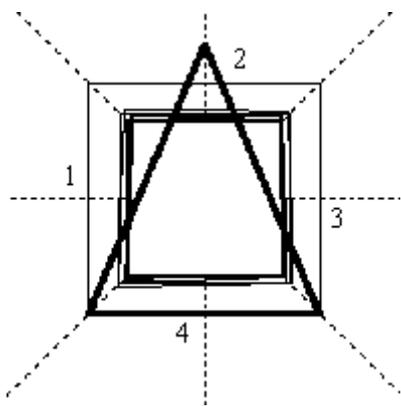


Рисунок 3 – Приближение формы треугольного отверстия по 4 точкам

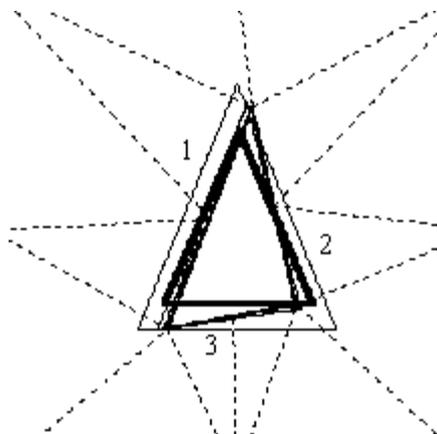


Рисунок 4 – Приближение формы треугольного отверстия по 3 точкам

Полученные результаты показывают, что предлагаемая методика позволяет идентифицировать повреждения таким образом, что могут быть определены не только расположение дефекта, но и его форма. Было установлено, что при наличии близко расположенных дефектов их идентификацию удастся провести только путем специального подбора значения ε или получая огибающую области дефекта.

Список литературы: 1. Ватуляна А.О. Обратные задачи в механике деформируемого тела. – М.: Физматлит, 2007. 2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. 3. Скопецкий В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – Київ, Наукова думка, 2002. 4. Ворovich И.И. Математические проблемы нелинейной теории полых оболочек. – М.: Наука, 1989. 5. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 6. Ободан Н.И., Шульга А.С. Идентификация дефектов в деформируемых телах // Проблемы машиностроения. – 2005. – 1. – С. 33-37. 7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.

Поступила в редколлегию 10.11.2008