УДК 536.24

***А.М.НИКИТИН***, НТУ «ХПИ», Харьков

## ВОЗМОЖНОСТЬ ТЕНЗОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ ЛДИС

У даній роботі розглянута задача ідентифікації компонентів тензора Рейнольдса та результатів виміру ЛДВШ. Пропонується варіант рішення на підставі порівняння алгоритмів обробки сигналів лазерного допплерівського вимірника швидкості й Рейнольдса.

This paper consider the problem of identification of Reynolds' tensor components and results LDA-measurements. Offer a variant of the decision which based on comparison of signals-processing algorithm of laser Doppler anemometer and Reynolds' velocity algorithm.

**Введение.** В 2004 году на сайте журнала «Автометрия» [1] была опубликована тема научной дискуссии, которая полностью созвучна излагаемому ниже материалу. Актуальность этой темы поддерживает проблема соответствия результатов измерений методом лазерной доплеровской анемометрии (ЛДА) и параметрами среды, которые использованы в теоретическом описании турбулентных потоков. Сама проблема возникала ранее, и идентичность величин мгновенной и осредненной скоростей [3] для большинства экспериментальных задач обоснована сопоставлением результатов параллельных экспериментов, проведенных методами ЛДА и термоанемометрии. Задача идентификации компонентов тензора турбулентных напряжений подобным способом не решается из-за сложности изготовления термоанемометрических или других зондов с пространственным разрешением, близким к $10^{-5}$ м.

**Постановка задачи.** В данной работе обсуждается вариант задачи идентификации компонентов тензора Рейнолбдса и результатов измерения ЛДИС на основании сравнения алгоритмов обработки сигналов лазерного доплеровского измерителя скорости ЛДИС и осреднения скорости Рейнольса.

**Исходная информация и решение.** Метод ЛДА получает информацию о потоке жидкости или газа в результате обработки спектра сигналов, детектированных фотоприемником непосредственно от выбранной точки потока.

Структура канала обработки сигналов измерителя построена в блочном исполнении (см. рис. 1). Аналоговый блок (4) канала обработки сигналов выполняет функции детектирования, усиления, фильтрования и визуализации спектра. Спектр сигналов фиксируется в дискретном блоке (5) в виде гистограммы $F_e$ и несет информацию о движении частиц жидкости в малом по величине измерительном объеме $\Lambda_e$.

Измерительный объем формируется областью интерференции когерентного модулированного излучения. Размеры интерференционного объема могут быть рассчитаны с необходимой точностью по формулам, приведенным в [2]. Параметры потока оказываются осредненными в трехмерной области с эффективным максимальным размером $\lambda_e \leq 10^{-4}$ м. Это позволяет измерять значения параметров турбулентного потока, аппаратно приведенные к координатам центра тяжести измерительного объема, по величине не превышающего $\Lambda_e \leq 10^{-12}$ м$^3$.

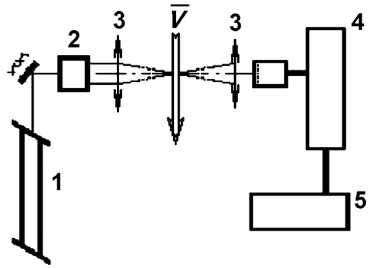


Рисунок 1 – Схема лазерного измерителя: 1 – оптический генератор; 2 – модулятор; 3 – объектив; 4 – аналоговый блок; 5 – дискретный блок; $\overline{V}$ – зона потока жидкости

Оптическая схема (1, 2, 3, рис. 1) формирует ведущий параметр ЛДИС – вектор чувствительности доплеровского измерителя $\left|\overline{k_e}\right| = 2\pi/\lambda$ . Его величина и направление в зоне течения определяются по методике, разработанной в [2, 3]. Интегральный спектр мгновенных откликов фотодетектора с определенной степенью дискретности отображается в блоке (5, рис. 1) и используется в дальнейшей обработке в виде гистограммы $F_e$. Параметры векторов чувствительности $\overline{k_e}$ вместе с гистограммами спектров сигналов $F_e$ составляют достаточный набор исходных данных для последующего определения значений параметров потока в заданной точке измерения.

Гистограмма спектра сигналов ЛДИС $F_e$ несет информацию об искомых параметрах потока. Использование формулировки эффекта Доплера в виде [6], который устанавливает однозначное соответствие между проекцией вектора мгновенной скорости движущейся среды $u_e$, приведенной к координатам центра измерительного объема $\Lambda_e$, и вектором чувствительности измерителя $\overline{k_e}$ , показывает, что мгновенный отклик фототока приемника не содержит никакой посторонней информации о потоке.

$$u_e = (V \cdot k_e). \qquad (1)$$

Скалярное произведение (1) позволяет определить величину вектора скорости в случае коллинеарности векторов $\overline{V}$ и $\overline{k_e}$ или величину проекции $\overline{V}$ на направление $\overline{k_e}$. Как показывает практика, выполнение условия коллинеарности векторов $\overline{V}$ и $\overline{k_e}$ в большинстве экспериментов затруднительно либо не реально. Оказывается эффективным использование таких конструкций ЛДИС, которые определяют компоненты мгновенных значений параметров потока. Тогда вариант метода ЛДА сводится к привязке данных к единой системе координат.

Между проекцией вектора мгновенной скорости $\overline{V_e}$ и частотой фототока $i(t)$ в некоторый момент времени устанавливается однозначное соответствие. Спектр $F_e(\omega)$ сигналов ЛДИС является отображением в амплитудно-частотной плоскости некоторой совокупности единичных откликов $i(t)$, измеренных на протяжении малого промежутка времени $T$.

Вариант метода ЛДА, использующего методы спектрального анализа конечного числа $N$ откликов фотодетектора $i(t)$, устанавливает достаточность выборки регистраций условием устойчивости энергетического спектра $F_e(\omega)$. Для квазистационарных процессов течения $F_e(\omega)$ можно представить в виде, аналогичном функции вероятности сигнала $i(\omega,t)$ с частотой $\varpi$ в некоторый промежуток времени. Для дифференциальных оптических схем с точностью до констант [2] спектр доплеровского сигнала можно записать в виде:

$$F(\omega,t)=\int\limits_{t-\tau_0}^{t+\tau_0} i^2(\omega,\tau)\cdot exp(-j\omega\tau)\cdot d\tau\,. \qquad (2)$$

Учитывая тот факт, что полезным сигналом в анемометрии считается сигнал, несущий информацию о движении частиц или неоднородностей в потоке, $\tau_0$ принимается конечным. Величина $\tau_0$ определяет точность измерения доплеровского сдвига частоты, а также скорости в исследуемой точке [4] по (1):

$$(\overline{V}\cdot\overline{k_e})=\mu_1(F_e)\left|\overline{k_e}\right|^{-1};\;\; \mu_1(F_e)=\frac{\int\limits_{t-\tau_0}^{t+\tau_0}\omega\cdot i^2(\omega,\tau)\cdot exp(-j\omega\tau)\cdot d\tau}{\int\limits_{t-\tau_0}^{t+\tau_0} i^2(\omega,\tau)\cdot exp(-j\omega\tau)\cdot d\tau}, \qquad (3)$$

$\mu_1(F_e)$ – первый центральный момент спектра $F_e(\omega)$.

Размер интервала интегрирования в (3) в реальных доплеровских измерителях находится в диапазоне ($10^{-3} \div 10^{2}$) с, в зависимости от конструкций оптических схем и быстродействия систем обработки спектров электрических сигналов.

Одноточечные парные корреляции, которые в некоторых работах называют турбулентными напряжениями, определяются по величине дисперсии доплеровского спектра по второму центральному моменту, аналогично (3):

$$\overline{u'_e u'_e}=\mu_2(F_e)\cdot\left|\overline{k}_e\right|^{-2}. \qquad (4)$$

Определение $\mu_2(F_e)$ проводится на том же интервале $2\tau_0$. Как показано в

[6, 7] корреляцию (5) можно сопоставить с состоянием среды в точке течения на площадке с нормалью, совпадающей с направлением вектора $\overline{k_e}$. Учитывая изложенный подход, время формирования спектра сигнала ЛДИС $2\tau_0$ в течение точечных измерений можно ограничить временем достижения устойчивого положением гистограммы спектра в амплитудно-частотной плоскости.

Рассмотрим процедуру осреднения скорости Рейнольдса [5]. Мгновенная скорость $\overline{V}$ представляется в виде суммы векторов осредненной скорости $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}$ и вектора мгновенной пульсационной скорости $\overrightarrow{v(t)}$. При этом идентификация вводимых понятий достигается применением теоремы о среднем с интегрированием по временному интервалу $t_R$

$$\overrightarrow{\overrightarrow{V}}(t) = \frac{1}{t_R} \int\limits_{t - t_R/2}^{t + t_R/2} \overline{V}(t) \cdot dt_R \text{ – вектор осредненной скорости,} \tag{5}$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \overline{V}(t) - \overrightarrow{\overrightarrow{V}}(t) \text{ – вектор пульсационной скорости.} \tag{6}$$

Продолжительность интервала интегрирования $t_R$ выбирается такой, что увеличение его не вызывает изменений вектора осредненной скорости $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}$:

$$\lim_{\Delta t_R \to 0}\left[\Delta \overrightarrow{\overrightarrow{V}}(t)\right] = \lim_{\Delta t_R \to 0}\left[\overrightarrow{\overrightarrow{V_{(t_R+\Delta t_R)}}}(t) - \overrightarrow{\overrightarrow{V_{(t_R)}}}(t)\right] \to 0 \text{ или}$$

$$\lim_{\Delta t_R \to 0}\left[\frac{1}{t_R}\int\limits_{t-(t_R+\Delta t_R)/2}^{t+(t_R+\Delta t_R)/2} \overline{V}(t) \cdot dt_R - \frac{1}{t_R}\int\limits_{t-t_R/2}^{t+t_R/2} \overline{V}(t) \cdot dt_R\right] \to 0. \tag{7}$$

Выделяемый по (7) доминантный уровень распределения параметра $\overrightarrow{\overline{\overline{V}}(x_i, t)}$ в области течения может рассматриваться в качестве информативного в дальнейшем изучении потока до тех пор, пока вектор пульсационной скорости $\overrightarrow{v(x_i, t)}$ можно считать малым и пригодным для моделирования. При этом случайная вектор-функция $\overrightarrow{v(x_i, t)}$ из (6), определенная в том же интервале $t_R$, что и вектор осредненной скорости $\overrightarrow{\overrightarrow{V}}$, должна удовлетворить условие

$$\frac{1}{t_R}\int\limits_{t-t_R/2}^{t+t_R/2} \overrightarrow{v(x_i, t)} \cdot dt_R = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \tag{8}$$

В то же время величина

$$\rho \cdot \overline{uv} = \frac{\rho}{t_R}\int\limits_{t-t_R/2}^{t+t_R/2}\left[\overrightarrow{u(x_i, t)} \cdot \overrightarrow{v(x_i, t)}\right] \cdot dt_R \neq 0, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{9}$$

представляет собой компонент тензора Рейнольдса, если $\overrightarrow{u(x_i, t)} \cdot \overrightarrow{v(x_i, t)}$ являются соответствующими координатными проекциями в декартовой системе координат. Формула (9) записана для сред с постоянной плотностью в точке исследования, что не является существенным для проблемы интерпретации результатов измерения ЛДИС. Это удобно при выделении из тензора Рейнольдса тензора кинематических корреляций $\overline{u_i u_j}$

$$\left[\pi_{ij}\right]=\left[\rho\cdot\overline{u_i u_j}\right]=\rho\cdot\left[\overline{u_i u_j}\right];\quad i,j=x,y,z \tag{10}$$

$\left[\overline{u_i u_j}\right]$ – представляет собой трехмерный тензор второго ранга с девятью независимыми компонентами в общем случае.

Динамическое состояние среды в точке стационарного изотермического потока, описываемое уравнениями Рейнольдса [5], в принятых обозначениях

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}U_j=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}+\nu\Delta U_i+\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(-\overline{u_i u_j}\right);\\ \dfrac{\partial U_j}{\partial x_j}=0;\end{cases},\qquad i,j=1,2,3. \tag{11}$$

Система уравнений Рейнольдса в виде (11) связывает с каждым из слагаемых определенные физические эффекты. Первое слагаемое $\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j}U_j$ соответствует «конвективному переносу»; второе – $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x_i}$ влиянию инерционных сил; $\nu\Delta U_i$ – явлению диффузии и $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i u_j}\right)$ – эффекту «генерации турбулентности». Как видим из (11), все феноменологические модели турбулентности пытаются оценить и учесть величину последнего слагаемого.

Принимая во внимание два похода, сформированные в разное время и различными технологиями, сопоставляя формулы (3), (4) и (5), (9), (10), можно установить соответствие между временным интервалом аппаратного формирования спектра сигналов ЛДИС и временем осреднения в процедуре Рейнольдса. Для квазистационарных течений равенство $2\tau_0 = t_R$ очевидно.

Предположим, что в течение малого интервала времени $(t \pm k\cdot\tau_0)$ измерены все девять независимых компонентов тензора турбулентных корреляций

$$\begin{bmatrix}\overline{u_x u_x} & \overline{u_x u_y} & \overline{u_x u_z}\\ \overline{u_y u_x} & \overline{u_y u_y} & \overline{u_y u_z}\\ \overline{u_z u_x} & \overline{u_z u_y} & \overline{u_z u_z}\end{bmatrix}=\overline{u_i u_j}\ ;\quad i,j=x,y,z\ . \tag{12}$$

В этом случае парная корреляция в произвольном направлении $\overline{u'_e u'_e}$ может быть вичислена [5] по известным значениям координатных косинусов $l_{ei}$, которые определяют это направление в принятой системе координат

$$\overline{u_i u_j} \cdot l_{ei} \cdot l_{ej} = u'_e u'_e ; \quad i, j = x, y, z . \tag{13}$$

Очевидно, если направление вектора чувствительности измерителя $\overline{k_e}$ задано в пространстве декартовых координат значениями направляющих косинусов $l_{ei}$, то измеряемая по (4) и определенная по (13) величины $\overline{u'_e u'_e}$ эквивалентны:

$$\overline{u'_e u'_e} = \mu_2(F_e) \cdot \left|\overline{k_e}\right|^{-2} = \overline{u_i u_j} \cdot l_{ei} \cdot l_{ej} ; \qquad i, j = x, y, z . \tag{14}$$

Связь между величинами компонентов $\overline{u_i u_j}$ и измеряемыми величинами $\overline{u'_e u'_e}$ по формуле (14) линейна и позволяет выбрать такие направления измерения, что измеренные значения парных корреляций однозначно определят полный набор компонентов тензора.

Адаптированный в [6, 7] для измерений компонентов тензора турбулентных корреляций вариант метода ЛДА позволяет получать оценку ошибки в процессе измерения. Для определения ошибок использовался метод избыточной информации, что позволило получить следующие выражения. Оценка максимальной относительной ошибки проекций осредненной скорости в точке измерения

$$\delta_U = \left[ \sqrt{2}\big/2 \left(U_x + U_z\right) - U_3 \right] \Big/ U_3 \tag{15}$$

максимальной относительной ошибки величины при измерении компонентов тензора турбулентных корреляций

$$\delta_\pi = 1 - \frac{\left\{ a^2 \alpha^2 \left[ \sigma_2(F_2) + \sigma_2(F_1) \right] - 2\left[ u'_x u'_x - u'_x u'_z + \left(a^2 + 1\right) u'_z u'_z \right] \sin^2 \gamma \right\}}{2(a-1)^2 u'_y u'_y \cos^2 \gamma} . \tag{16}$$

Выражения (15) и (16) получены для целевой схемы измерителя, поэтому дальнейшие преобразования и выводы не могут претендовать на общность. В то же время, предполагая достоверность равенства $2\tau_0 = t_R$ можно оценить предельную величину ошибки, которая укажет качество самой реализованной конструкции ЛДИС. Опираясь на величину спектральной ошибки $\delta_F$, которую распространим на все измеряемые спектры сигналов, можно показать, что $\delta_{\mu 2} = 2\ \delta_{\mu 1} = 2\delta_F$, а, учитывая, что $\delta_\pi \approx \delta_{\mu 2}$ (15) и (16) получим:

– для компонентов корреляций $\delta_\pi = 5 \cdot \delta_{\mu 2} = 10 \cdot \delta_F$,
– для проекций скорости $\delta_U = 4 \cdot \delta_F$.

Предельная точность измерений определена в [3], которая оценивает величину относительной ошибки измерения скорости $\delta_{U0} \approx \Omega/\omega = 10^{-7}$. Можно ожидать, что аналогичная величина предельной ошибки измерения компонентов тензора турбулентных корреляций составит $\delta_\pi \approx 10 \cdot \Omega/4 \cdot \omega = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$. Это значит, что точность измерений величин компонентов тензора турбулентных корреляций $\left[\overline{u_i u_j}\right]$, которая опубликована в [6] может быть улучшена.

**Представление результатов эксперимента.** Графический интерпретатор измеряемых параметров потока представляет изображения вектора осредненной скорости, годограф диагональных компонентов или «парных пульсационных корреляций» (*пунктирная линия*) и *сплошная линия* для недиагональных компонентов. Система координат XY на диаграммах совпадает с общей системой координат модели.

Все рисунки и диаграммы выполнены в относительных масштабах. Величины приведенные на каждой диаграмме позволяют определить реальный масштаб изображений и проводить количественный анализ. При этом масштаб скорости не совпадает с масштабом компонентов напряжений, но для всех компонентов на данной диаграмме справедлив один и тот же масштаб. В качестве тестового направления выбрано направление, аналогичное главной оси тензора корреляций, направление для которого выполняется условие равенства нулю смешанных кореляций.

Приведенные диаграммы некоторых точек измерения в модели канала ленточнопоточного типа [4] позволяют наглядно представить некоторые особенности течения и подтверждают возможность точного описания турбулентных течений с помощью системы уравнений Рейнольдса.

Эпюры напряженного состояния демонстрируют проявление физических эффектов, выделяемых в системе уравнений (1), с учетом легенды, справедливой для всех приведенных диаграмм:

▬▬▬▬ – вектор осредненной скорости потока $U$;

— — — – годограф парных турбулентных корреляций $\overline{u'_e u'_e}$;

———— – годограф непарных турбулентных корреляций $\overline{u'_e u'_o}$.

где вектор скорости и тестовое направление составляют углы, близкие к $\pm\pi/2$ (рис. 2), «инерционные эффекты» – $\dfrac{\partial P}{\partial x_i}$, соответствует преобладанию величин нормальных напряжений (рис. 3), «диссипация турбулентности» – $\mu\Delta U_i$, отмечается соразмерностью величин компонентов напряжений (рис. 4), «генерация турбулентности» – $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\overline{u_i u_j}\right)$, характерна в случае если направления вектора скорости и тестовое составляют углы, близкие к кратным $\pm\pi/2$ (рис. 5).

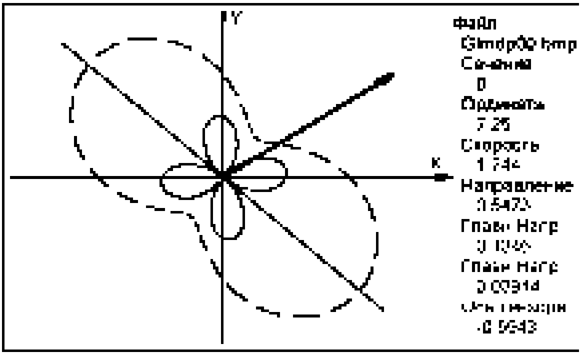


Рисунок 2

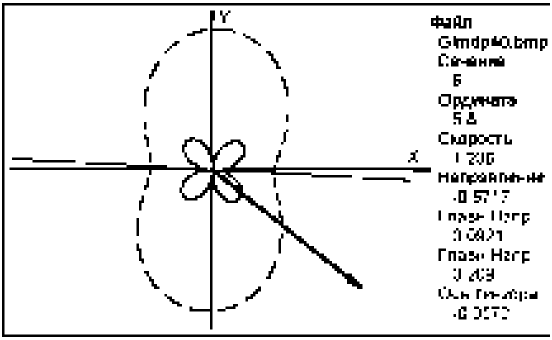


Рисунок 3

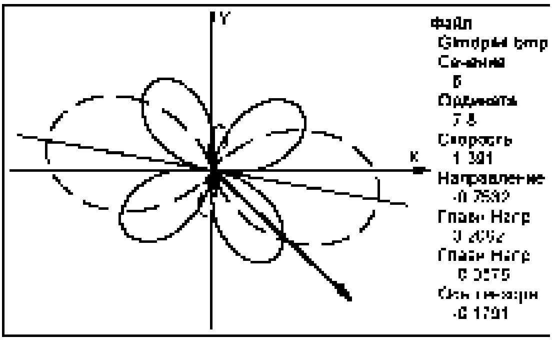


Рисунок 4

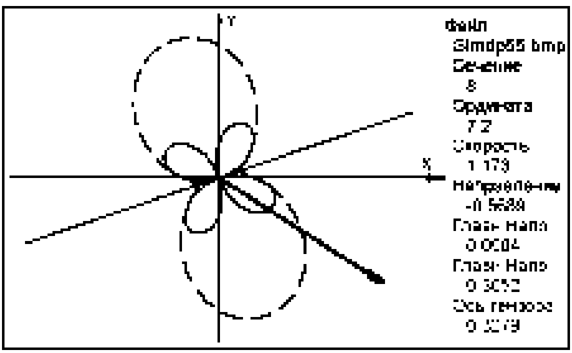


Рисунок 5

«Конвективный перенос» соответствует $\dfrac{\partial U_i}{\partial x_j} U_j$, преобладает в точках

**Выводы.** В результате сопоставления методов представления и обработки сигналов ЛДИС и осреднения Рейнольдса показана идентичность интервала времени аппаратного интегрирования при формировании спектра сигналов и времени осреднения в процедуре Рейнольдса.

Показана возможность однозначного соответствия (14) между измерениями одноточечных корреляций пульсаций лазерным доплеровским анемометром и значениями компонентов тензора Рейнольдса в одноименной системе уравнений.

Для ЛДИС, адаптированного к измерению величин компонентов тензора турбулентных корреляций, определена минимальная ошибка, возможная в случае стационарного турбулентного течения.

**Список литературы:** **1.** Автометрия. – Новосибирск, изд-во СО РАН, 2004. – №№ 4-6. – http://www.sibran.ru/avtw.htm. **2.** *Дубнищев Ю.Н., Ринкевичус Б.С.* Методы лазерной допплеровской анемометрии. – М.: Наука, 1982. – 304 с. **3.** *Дубнищев Ю.Н. и др.* Лазерной допплеровские измерители скорости. – Новосибирск: Наука СО, 1975. – 164 с. **4.** *Дюррани Т., Грейтид К.* Лазерные системы в гидромеханических измерениях. – М.: Энергия, 1980. – 336 с. **5.** *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука. 1978. 735 с. **6.** *Никитин А.М.* Измерение кинематических параметров турбулентных течений // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск: «Энергетические и теплотехниыеские процессы и оборудование». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 29. – С. 35-42. **7.** *Товажнянский Л.Л., Никитин А.М. и др.* Лазерная диагностика потоков. Часть 1. Двумерные модуляторы лазерного излучения // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск: «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2004. – № 12. – С. 139-146.

*Поступила в редакцию 06.10.2008.*