

С.А. НАЗАРЕНКО, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ», Харьков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МУЛЬТИФИЗИЧНОГО АНАЛИЗА КОНСТРУКЦИЙ ДЛЯ CALS ТЕХНОЛОГИЙ

Розглядаються проблемні питання, що виникають при розробці математичних моделей складних конструкцій за наявності дії полів різної природи. Розроблені методи аналізу послідовноз'язаних, сильноз'язаних, слабоз'язаних мультифізичних просторових скінчено-елементних моделей систем. Обґрунтовано використання сукупності методів аналізу при дослідженні життєвого циклу об'єктів нової техніки.

The complex of theoretical, calculable and applied questions of elements product lifecycle management are studied. Coupled-field analyses are useful for solving problems where the coupled interaction of phenomena from various disciplines of physical science is significant. There are basically 3 methods of coupling distinguished by the finite element formulation techniques used to develop the matrix equations.

Интенсификация рабочих процессов в современных конструкциях, подвергающихся воздействию тепловых, гидроаэромеханических, электромагнитных и других полей, усовершенствование технологий изготовления, потребность в эксплуатации по состоянию обуславливают необходимость высокого уровня интеграции наукоемких технологий виртуального моделирования жизненного цикла инновационных изделий. Современный этап развития промышленности связан с CALS (Continuous Acquisition and Life-cycle Support), PLM (Product Lifecycle Management), ИПИ (Информационная поддержка жизненного цикла изделий) – концепцией, объединяющей принципы и технологии поддержки жизненного цикла продукции на всех его стадиях, основанной на использовании постоянно развивающейся интегрированной информационной среды (единого информационного пространства (ЕИП)), обеспечивающей единообразные способы управления процессами и взаимодействия всех участников: заказчиков (включая государственные учреждения и ведомства), поставщиков (производителей), эксплуатационного и ремонтного персонала, реализованной в соответствии с требованиями системы международных, государственных и отраслевых стандартов, регламентирующих правила указанного взаимодействия преимущественно посредством электронного обмена данными. Стратегия PLM предусматривает двухэтапный план создания ЕИП: 1) автоматизация отдельных процессов (или этапов) ЖЦ изделия и представление данных на них в электронном виде; 2) интеграция автоматизированных процессов и относящихся к ним данных, представленных в электронном виде, в рамках ЕИП [1-5]. Прогресс современной вычислительной техники позволяет исследовать проблему жизненного цикла изделий как результат взаимодействия огромного числа конструкторских, технологических и производственных факторов. Для ее эффективного решения необходимо развитие методического, программного, лингвистического, информационного, технического и математического обеспечения жизненного цикла изделий. Сложность задачи формулировки функционала полной ожидаемой эффективности жизненного цикла

конструкций, включающей затраты, связанные с проектированием, подготовкой производства, изготовлением, коррективной эксплуатацией, отказом; противоречивость критериев, большое число разнохарактерных варьируемых переменных, неформализуемость некоторых ограничений, различная точность и детерминированность моделей, требования унификации не позволяют решать математически строго задачу оптимизации непосредственно для полной модели. Данная работа посвящена проблемам мультифизического моделирования, анализа и синтеза конструкций для CALS технологий. Широкий спектр фундаментальных и прикладных проблем, характерный для таких задач, способствовал появлению множества теоретических исследований, в которых анализ эффектов связанности выводится на уровень краевых задач математической физики [6]. Особое значение в настоящее время приобретают вопросы мультифизического анализа чувствительности и оптимизации [7,8].

Целью данной работы была формализация на основе единой комплексной научно-методологической концепции математических моделей конструкций, обладающих высоким уровнем адекватности реальным физико-механическим процессам различной природы, исследование вариантов совокупности и структуры специфических связей, проиллюстрированное демонстрацией решенных задач. Процесс декомпозиции физико-механической модели на компоненты является плохо формализуемым творческим процессом. На базе использования методов и принципов системного и объектно-ориентированного анализа можно осуществить декомпозицию абстрактной модели на составляющие и связи между ними, а также реализовать их формальное описание. От правильности выбранной стратегии зависит эффективность и точность решения.

С точки зрения формальной логики все многообразие расчетных физико-механических технологий жизненного цикла инновационных изделий можно классифицировать следующим образом. Рассмотрим вначале двухуровневые модели процессов с учетом их взаимного влияния друг на друга, которые являются комбинацией различных по физической природе процессов и, как следствие, расчетных схем взаимодействия. Введем следующие виды степеней связанности структурных элементов системы (для примера взята стационарная конечно-элементная модель): последовательная (при одностороннем действии)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22}(\bar{y}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2(\bar{y}_1) \end{Bmatrix}; \quad (1)$$

сильная (полная)

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix}; \quad (2)$$

слабая с учетом обратных связей (при двустороннем взаимодействии)

$$\begin{bmatrix} K_{11}(\bar{y}_2) & 0 \\ 0 & K_{22}(\bar{y}_1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_1(\bar{y}_2) \\ \bar{F}_2(\bar{y}_1) \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

где K_{11} , K_{21} , K_{22} – обобщенные матрицы жесткости; \bar{y}_1 и \bar{y}_2 – обобщенные

вектора узловых переменных, \bar{F}_1 и \bar{F}_2 – обобщенные вектора нагрузок. Развитие на подпункты носит условный методологический смысл, поскольку физический процесс может иметь комплексный и взаимовлияющий характер. Предполагается, что связь между подмоделями однозначна, алгоритмизируема и корректна. Такая трактовка дает возможность формализовать процесс и распространить традиционный инструментарий анализа и синтеза. Моделирование структурными уравнениями, ориентированными на конкретный класс объектов, может включать большое количество методов из различных областей с применением различных CAD/CAM/CAE-систем. Это может быть осуществлено как в ручном режиме, так и путем создания специализированных автоматизированных систем. Основная цель применения данного математического обобщения, реализуемого в едином информационном пространстве жизненного цикла инновационных изделий, заключена в повышении точности результатов, минимизации затрат времени на подготовку модели и трансляции промежуточных данных. При этом необходимо или использование единой информационной базы для всех этапов жизненного цикла, или разработка специальных процедур согласования структур данных на различных этапах.

Примерами конструкций, для которых важен учет взаимодействия физических полей различной природы (2) с сильной степенью связности, являются пьезоэлектрические устройства акустической электроники. Отличие полевых уравнений пьезоэффекта керамических сред от аналогичных уравнений классической теории упругости обусловлено необходимостью введения дополнительных термодинамических переменных, характеризующих электрическое состояние среды. В результате вместо 15 переменных, описывающих механическое упругое поле (перемещения, деформации и напряжения), приходим к 22-м переменным (векторы напряженности и индукции электрического поля, электростатический потенциал). Исходными соотношениями состояния для данной задачи будут уравнения пьезоэффекта, описывающие электромеханическое преобразование, квазистатические уравнения Максвелла, уравнения движения элемента среды; а также геометрические соотношения Коши. Основные разрешающие уравнения для процессов, изменяющихся во времени, могут быть непосредственно получены из обобщенного вариационного принципа Гамильтона-Остроградского $\delta \int (T - \Pi + W) dt = 0$, где T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия (является наиболее важной энергетической характеристикой произвольной системы, выраженной через компоненты выбранного пространства состояний и при необходимости может включать, например, энергию электрической индукции для трехмерного пьезоэлектрического тела), W – работа приложенных сил. Конечноэлементные соотношения в матричной форме для пьезоэлемента представляются в виде:

$$\begin{bmatrix} [M_{yy}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{y}\} \\ \{\ddot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{y}\} \\ \{\dot{\phi}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{yy}] & [K_{y\phi}] \\ [K_{\phi y}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y\} \\ \{\phi\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ \{L\} \end{Bmatrix},$$

где точка над переменной означает производную по времени, $[M_{yy}]$ – мат-

рица масс; $[C]$ – матрица демпфирования; $[K_{yy}]$ – матрица жесткости; $[K_{\phi\phi}]$ – матрица диэлектрической проницаемости; $[K_{y\phi}]$ – матрица пьезоэлектрической связи; $\{F\}$ – вектор механической нагрузки; $\{L\}$ – вектор электрической нагрузки; $\{y\}$ и $\{\phi\}$ – вектора узловых перемещений и потенциалов.

Для примера рассмотрим задачу расчета пьезоэлектрического датчика-преобразователя. Пьезокерамический преобразователь представляет собой куб из материала PZT4 с поляризацией вдоль оси. Электроды размещены на поверхностях, ортогональных оси поляризации. Рассматривались группы частот колебаний, соответствующих, как короткозамкнутой цепи, так и разомкнутой. Подэлектродная область представляет собой эквипотенциальную поверхность и специальным образом не моделируется. Для короткозамкнутой цепи верхний и нижний электроды заземляются (напряжение на электродах равно нулю). Для случая разомкнутой цепи заземляется только верхний электрод. Случай короткозамкнутой цепи представляет собой возбуждение преобразователя приложенным к электродам потенциалом, а случай разомкнутой цепи – возбуждение зарядом. Преобразователь моделировался четвертью куба с приложенными граничными условиями симметрии по поверхностям раздела. Для исследования использовались трехмерные КЭ. Распределение интенсивностей напряжений на соответствующих формах собственных колебаний приведено на рис. 1 и 2. В качестве формы иллюстрации результатов сделана тоновая заливка на поверхности. Светлыми тонами показана зона близких к нулю интенсивностей напряжений, темными – экстремальных.

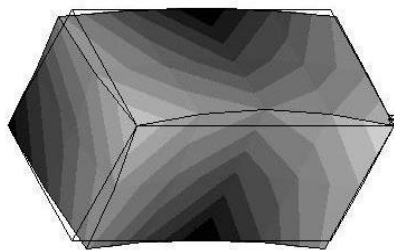


Рисунок 1 – Третья собственная форма. Короткозамкнутая цепь.

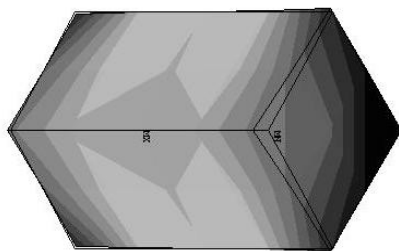


Рисунок 2 – Пятая собственная форма. Разомкнутая цепь.

Недостатком моделей сильной связанности является увеличение размерности и ширины ленты системы разрешающих уравнений, преимуществом – возможность достижения решения за одну итерацию.

Примерами конструкций, для которых необходим учет воздействия последовательно связанных физических полей различной природы (1), являются устройства радиоэлектронной аппаратуры, подверженные механическим и тепловым воздействиям. В общем виде математическая модель сильной (полной) связанности описывается системами уравнений в частных производных: теплопереноса и термоупругости в перемещениях [6]

$$c_{ij}\rho_{ij}\left(\frac{\partial T_i}{\partial t}+k_1\bar{V}_j\nabla T_i\right)=\nabla(\lambda_{ij}\nabla T_i)-k_2(3\lambda_i^*+2\mu_i^*)\alpha_{T_i}T_{0i}\operatorname{div}\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial t}+k_3Q_i^{HC}+Q_i^y; \quad (4)$$

$$\rho_{ij}\frac{\partial^2\bar{U}_i}{\partial t^2}=\mu_i^*\nabla^2\bar{U}_i+(\lambda_i^*+\mu_i^*)\overline{\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{U}_i}-(3\lambda_i^*+2\mu_i^*)\alpha_{T_i}\overline{\operatorname{grad}(T_i-T_{0i})}, \quad (5)$$

где $T_i(x, y, z, t)$ – температурное поле приборов; $\bar{U}_i(x, y, z, t)$ – векторное поле перемещений при деформациях приборов; $\bar{V}_j(x, y, z, t)$ – векторное поле скоростей сред теплоносителей; ∇^2 – оператор Лапласа; $c_{ij}, \rho_{ij}, \lambda_{ij}, \alpha_{T_i}$ – теплофизические параметры материалов (теплоемкости, плотности, теплопроводности, коэффициент линейного расширения); T_{0i} – номинальная температура; λ_i^*, μ_i^* – коэффициенты Ляме; t – время; Q_i^{HC}, Q_i^y – приведенные мощности источников тепловыделяющих (хладопроизводящих) элементов; k_1, k_2, k_3 – коэффициенты (принимает значения 0 или 1), отражающие связанный характер процессов, протекающих в устройствах. К системам уравнений необходимо добавить начальные и граничные условия с учетом особенностей крепления и внешнего теплообмена данных устройств.

Рассмотрим установившийся режим, когда температурное поле можно считать стационарным. Этот режим устанавливается при достаточно долгом прогреве после включения, постоянной внешней температуре и является основным рабочим режимом. После декомпозиции, состоящей в разделении системы (модели) на подсистемы (подмодели, задача анализа включает в себя: 1) задачу стационарной теплопроводности $\Lambda\bar{T}=\bar{Q}$, где Λ – матрица теплопроводности, \bar{Q} – вектор обобщенной тепловой нагрузки; 2) задачу термоупругости $K_{yy}\bar{y}_t=\bar{F}_t$, где \bar{y}_t – обобщенный вектор термоупругих перемещений. Решение задачи теплопроводности определяет нагрузки для задачи термоупругости. Температурное нагружение оказывает двоякое действие: вызывает дополнительные статические напряжения, связанные с возникновением градиента температур, а также в некотором диапазоне изменяет физико-механические характеристики материала. Задача анализа резонансного состояния сводится к матричной проблеме $[K_{yy}+G(\bar{y}_s)-\lambda M_{yy}]\bar{y}_d=0$, где $G(\bar{y}_s)$ – матрица «геометрической» жесткости (приведенных начальных напряжений), формируемая на решении \bar{y}_s статической задачи (температура + силовые факторы). Совместное решение задачи теплофизики и механики позволяет, с одной стороны, экономить затраты времени (например, за счет генерации единой КЭ сетки), а с другой стороны – более адекватно задавать нагрузки. Основным отличием моделей с последовательной (слабой) степенью связанности от сильной степени является отсутствие недиагональных блоков K_{21} в глобальных матрицах. Часто последовательная связь не только эффективнее сильной, но и более удобна, так как имеется возможность выполнять расчеты независимо. Температурные напряжения, возникающие в платах радиоэлектронной аппаратуры и вызывающие разрушения вследствие: наличия температурного градиента; несвободного теплового

расширения отдельных частей платы или невозможности этого (фиксация платы в направляющих штырях); подробно исследованы в работах [9,10].

Необходимость подавления колебаний плат обусловлена возможной потерей электрического контакта как внутри платы, так и контакта платы с периферией, при больших амплитудах колебаний, что может привести к аварийной ситуации. Поэтому при проектировании необходимо решать задачи о поиске собственных частот плат бортовых компьютеров, все элементы которых (процессор, микросхемы и т.п.) расположены на стеклотекстолитовой пластине. При расчете плата представляется в виде кусочно-однородной пластины. Для исследования был выбран оболочечный КЭ shell63, у которого шесть степеней свободы в каждом из 4 узлов, а также КЭ типа mass21, т.е. сосредоточенные массы, которые заменяют различные элементы платы. На рис. 3 приведены формы колебаний и интенсивностей напряжений платы.

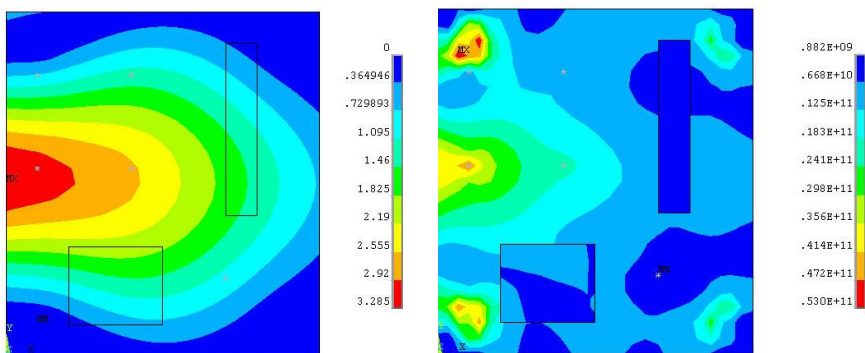


Рисунок 3 – 1-ая собственная частота

Примером конструкций, для которых важен учет воздействия слабосвязанных физических полей различной природы (3), являются резонансные приборы. Особенностью таких задач является учет обратных связей (при двустороннем взаимодействии) и необходимость нескольких итераций при решении нелинейной задачи. Ультразвуковые колебания высокой интенсивности вызывают существенный разогрев системы. Соответствующая связанная нелинейная математическая модель включает стационарные уравнения теплопроводности $\Lambda \vec{T} = \vec{Q}(\vec{\sigma}(\vec{v}_d))$, в которых функция тепловых источников строится по форме резонансных динамических напряжений как доля интенсивности гистерезисных потерь, и уравнения собственных колебаний $[K_{yy}(\vec{T}) - \omega^2 M_{yy}(\vec{T})] \vec{v}_d = 0$, включающие зависимость физико-механических характеристик и геометрии элемента от распределения температуры. При этом выполняются итерации между различными физическими анализами до тех пор, пока не будет достигнут желаемый уровень сходимости. При двустороннем взаимодействии (3) в анализе сложного взаимодействия «жидкость — конструкция» (Fluid Structure Interaction, FSI) необходимо учесть деформации конструктивных элементов и

повторить расчет параметров движения среды для новой геометрии. Общая расчетная схема может носить нестационарный характер, при этом временные шаги могут быть различными. Схемы решения с точки зрения сбалансированного сочетания точности, полноты, строгости и затрат ресурсов. Таким методом решаются задачи флаттера несущих поверхностей, вибраций в лопаточных машинах, искусственных сердечных клапанах и т.д.

После сборки, состоящей в преобразовании модели, реализующей поставленную цель из заданных или определяемых подмоделей (структурно связанных и устойчивых), возможно построение многоуровневых иерархических систем. Так в случае излучателя, работающего на большой глубине в жидкости и изготовленного из пьезоактивного материала, для достижения хорошего соответствия математической модели реальному поведению конструкции необходимость учитывать и связь напряженно-деформированного и электрических полей в конструкции:

$$\begin{cases} [K_{yy}]\bar{y}_s = \bar{F}_s; & \{[K_{yy}] + [G(y_s)] - \omega^2[M_{yy}]\}\bar{y} + [K_{y\varphi}]\bar{\varphi} - [R]^T \bar{p} = 0 \\ [K_F]\bar{p} - \omega^2[M_F]\bar{p} - \omega^2\rho[R]\bar{y} = 0; & [K_{\varphi y}]\bar{y} + [K_{\varphi\varphi}]\bar{\varphi} = 0 \end{cases}$$

где $[M_F]$, $[K_F]$ – матрицы масс и жесткости жидкости; $[R]$ – матрица взаимосвязи «давление-перемещение», определяемая из условия совместности на границе конструкции с жидкостью \bar{p} – вектор узловых давлений.

Данное исследование позволило провести классификацию задач анализа мультифизических конечноэлементных моделей различной степени связанности, позволяющую построить схему для декомпозиции комплексной проблемы на ряд отдельных физических задач, и успешно апробировать разработанный математический аппарат на ряде конструкций. Анализ структуры и типов связей между отдельными задачами служит основой схемы последовательности решения общей проблемы. Использование единой расчетной модели для мультифизического моделирования позволяет минимизировать время, обычно затрачиваемое на подготовку множества расчетных моделей, преобразование и передачу данных от одной расчетной модели в одной системе к другой модели в другой системе. Классификация может служить основой последующей унификации и стандартизации подходов. Дальнейшим направлением исследований является применение математического аппарата при исследовании жизненного цикла ряда современных конструкций, а также его развитие на проблемы оптимизации и анализа чувствительности.

Список литературы: 1. *Piegl L.A.* Ten challenges in computer-aided design // Computer-aided design. – 2005. – № 37. – P. 461-470. 2. *Lvov G.* The integrated information technologies on principles CALS at designing, manufacture and operation of high technology production // 7 Magdeburger Maschinenbau-Tage. – 11 bis 12 Oktober 2005. – PP. 259-263. 3. <http://www.cimdata.com/>. 4. *Кунву Ли.* Основы САПР (CAD/CAM/CAE). – СПб.: Питер, 2004. – 560 с. 5. *Ткачук Н.А., Грищенко Г.Д., Чепурной А.Д., Орлов Е.А., Ткачук Н.Н.* Конечно-элементные модели элементов сложных механических систем: технология автоматизированной генерации и параметризованного описания // Механіка та машинобудування. – 2006. – № 1. – С. 57–79. 6. Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Под общ. ред. А.Н.Гузя. – Киев: Наукова думка, 1987-1989. 7. *Назаренко С.А.* Анализ чувствительности конструкций при воздействии физических полей различной природы //

Вестник НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 119-122. **8.** *Симсон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин А.Ю., Марусенко С.И.* Проблемы мультидисциплинарной оптимизации элементов конструкций. CFD-анализ // Вестник НТУ «ХПИ». – 2004. – № 47. – С. 19-22. **9.** *Повгородний В.О.* Прогнозирование показателей надежности механических конструкций бортовой аппаратуры Автореф. дис. канд. техн. наук: Харьков, 2004. – 20 с. **10.** *Щемелинин Д.А.* Проблемы моделирования механических и тепловых процессов в блоках и печатных платах электронных приборов и пути их решения на основе 3D моделей // Объединенный научный журнал / Агенство научной печати. – Москва, 2007. – № 17(205). – С. 57-65.

Поступила в редколлегию 25.11.2008.