УДК 539.3

Б.Ф.ЗАЙЦЕВ, докт.техн.наук; ***А.В.АСАЕНОК***, канд.техн.наук;
Н.Е.ЕРЕЦКАЯ, аспирант; ИПМаш НАН Украины, Харьков

ТРЕХМЕРНЫЙ МКЭ В РАСЧЕТАХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Побудовані рівняння коливань тіла, що обертається. Застосовано метод скінченних елементів в рухомій разом с тілом системі координат. Досліджено структуру матриць в рівняннях та окремі випадки виродження рівнянь.

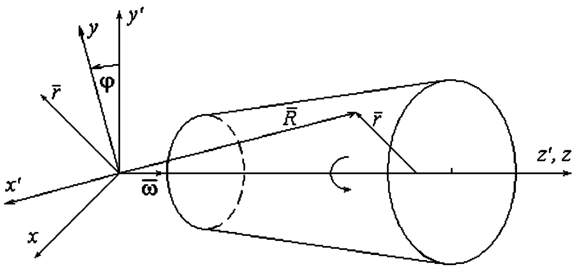
The equations of vibrations of a rotating body are developed. The finite element method in the coordinate system which is moving together with a body is used. The matrix structures into the equations and particular cases of degeneracy of the equations are considered.

Введение. Практические представления о вращающихся элементах или узлах машин обычно связываются с валами передаточных механизмов или роторами энергомашин. Колебания валов (роторов) являются значительной проблемой машиностроения, которая во многом уже исследована и решена. Исследования в области динамики валов имеет большую историю и огромное число публикаций, в которых основополагающее место занимают работы Ф.М. Диментберга [1]. Из проблем динамики валов следует отметить задачи определения критических частот; установившихся и неустановившихся колебаний, связанных с переходом через критические частоты; автоколебаний; влияния характеристик упруговязких опор и сил внешнего и внутреннего трения на колебания, а также задачи колебания валов с дефектами и выявление этих дефектов по изменившимся вибрационным характеристикам, относящиеся к вибрационной диагностике. Преимущественно при теоретических исследованиях использованы стержневые модели, во многих случаях достаточно адекватные реальным конструкциям и поставленным исследовательским задачам.

В последнее время задачам вибрационной диагностики повреждений роторов уделяется значительное внимание, что вызвало значительный поток публикаций по этому направлению [2-4]. Однако возможности стержневых моделей весьма ограничены при моделировании таких явлений как "дыхание" трещины в роторе. Кроме этого для коротких роторов проблематично использование самой модели стержня, а также эта модель неприемлема при определении параметров динамического НДС в роторах у дисков или в других местах резкого изменения формы.

В связи с этим представляется важной возможность моделирования колебаний тела произвольной формы, совершающих вращательное движение. В практических случаях тела, испытывающие вращение, как правило, имеют осесимметричную форму. В общем, трехмерном, случае необходимо применение численного метода, а наиболее подходящим в этом отношении является МКЭ. Задачей данной работы является получение и исследование уравнений колебаний вращающихся тел при применении трехмерного МКЭ.

Уравнения колебаний. При рассмотрении колебательного движения вращающегося тела необходимо отделить от общего движения точек тела его вращательную, переносную составляющую. Для этого следует ввести подвижную систему координат, жестко связанную с телом и вращающуюся вместе с ним. Вводимая система координат показана на рисунке, где x', y', z' – неподвижная, x, y, z – подвижная системы координат, причем $z(z')$ – ось вращения тела и $z = z'$, $\varphi = \omega t$, а ω – угловая скорость вращения. Следует отметить, что при использовании стержневой модели, когда ось стержня лежит на оси вращения z, применение подвижной или неподвижной систем координат особых преимуществ не имеет, исключая отдельные случаи, например вал двоякой жесткости [5]. Таким образом, вектор перемещений тела $\mathbf{u}(x,y,z)$ определяется во вращающейся системе координат.



Для получения уравнений колебаний используется принцип Даламбера, сводящий рассмотрение движения тела к кинетостатическому состоянию, а затем вариационный принцип Лагранжа стационарности состояния равновесия. Вариационное условие стационарности функционала Лагранжа на действительном перемещении имеет вид

$$\delta\Phi = \delta\Pi - \delta A = 0, \tag{1}$$

где Ф – потенциальная энергия системы, П – энергия деформации тела, А – работа внешних сил. Для кинетостатического состояния в выражении работы внешних сил добавляется работа сил инерции, которые определяются абсолютными ускорениями точек тела

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c \tag{2}$$

где $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}_r$, $\mathbf{w}_e$, $\mathbf{w}_c$ – соответственно абсолютное, относительное, переносное и кориолисово ускорения.

Составляющие ускорения в формуле (2) определяются следующими выражениями:

– относительное ускорение в подвижных осях с ортами **i, j, k**

$$\mathbf{w}_\mathrm{r} = \ddot{\mathbf{u}} = \ddot{u}_x\mathbf{i} + \ddot{u}_y\mathbf{j} + \ddot{u}_z\mathbf{k}\ ; \tag{3}$$

– ускорение переносного вращательного движения

$$\mathbf{w}_\mathrm{e} = -\omega^2 x\mathbf{i} - \omega^2 y\mathbf{j} - \omega^2 u_x\mathbf{i} - \omega^2 u_y\mathbf{j}\,, \tag{4}$$

причем первые два слагаемые постоянны, а вторые переменны и зависят от перемещений;

– кориолисово ускорение

$$\mathbf{w}_\mathbf{c} = -2[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}] = -2\omega\dot{u}_y\mathbf{i} - 2\omega\dot{u}_x\mathbf{j}\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{v}\{\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z\}$ – скорость точек тела в подвижных координатах.

Построение решения (1) выполняется с применением конечноэлементных аппроксимаций перемещений **u**, скоростей **v** и ускорений **w** тела

$$\mathbf{u} = \sum_i \mathbf{u}_i(t)N_i(x,y,z)\,; \qquad \mathbf{v} = \sum_i \dot{\mathbf{u}}_i(t)N_i(x,y,z)\,;$$

$$\mathbf{w} = \sum_i \ddot{\mathbf{u}}_i(t)N_i(x,y,z)\,, \tag{6}$$

где $\mathbf{u}_i, \dot{\mathbf{u}}_i, \ddot{\mathbf{u}}_i$ – перемещения, скорости, ускорения в узлах конечного элемента (КЭ); N_i – функции формы КЭ.

Определение вариаций δП, δА при аппроксимациях (6) составляет стандартную процедуру МКЭ дискретизации задачи. При этом приходят к матричным соотношениям, в частности для вариации энергии деформации

$$\delta\Pi = ([\mathbf{K}]\mathbf{u})\delta\mathbf{u}^\mathbf{T}\,,$$

где $[\mathbf{K}]$ – матрица жесткости тела.

Возникающие отличия определяются частью работы внешних сил, вызванной инерционными силами. Работа этих сил A_{in} на возможном перемещении в объеме v КЭ равна

$$\delta\mathrm{A}_{in} = -\int_v \rho\mathbf{w}\cdot\delta\mathbf{u}dv\,, \tag{7}$$

а с учетом (2) представима в виде

$$\delta\mathrm{A}_{in} = \delta\mathrm{A}_r + \delta\mathrm{A}_e + \delta\mathrm{A}_c, \tag{8}$$

где соответственно $\delta\mathrm{A}_r$, $\delta\mathrm{A}_e$, $\delta\mathrm{A}_c$, – работы, относящиеся к относительной, переносной и кориолисовой составляющим абсолютного ускорения.

Подставляя формулы (6) в (3)-(5), а затем в (7), (8), получим следующие выражения для работ на КЭ

$$\delta\mathrm{A}_r = -\sum_i \sum_k m_{ik}(u_{ix}\delta u_{kx} + u_{iy}\delta u_{ky} + u_{iz}\delta u_{kz})\,,$$

$$\delta\mathrm{A}_e = \sum_i \sum_k \omega^2 m_{ik}(u_{ix}\delta u_{kx} + u_{iy}\delta u_{ky}) + \sum_k \omega^2 (P_{kx}\delta u_{kx} + P_{ky}\delta u_{ky})\,, \tag{9}$$

$$\delta A_c = \sum_i \sum_k 2\omega m_{ik} (\dot{u}_{iy} \delta u_{kx} - \dot{u}_{ix} \delta u_{ky}) ,$$

где $m_{ik} = \int\limits_v \rho N_i N_k dv$; $P_{kx} = \int\limits_v \rho x N_k dv$; $P_{ky} = \int\limits_v \rho y N_k dv$.

Суммируя (9) по КЭ получим работу сил инерции тела, которую следует учесть в вариационном уравнении (1). Систему разрешающих уравнений в матричном виде получим, приравнивая в (1) величины при вариациях узловых перемещений $\delta\mathbf{u}_k \{\delta u_{kx}, \delta u_{ky}, \delta u_{kz}\}$, причем каждому узлу отвечает три уравнения движения. В итоге уравнения колебаний вращающегося тела в связанной с ним системе координат могут быть представлены в следующем матричном виде

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} - 2\omega[\mathbf{M_2}]\dot{\mathbf{u}} + ([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}_1])\mathbf{u} = \omega^2\mathbf{P} . \qquad (10)$$

Рассмотрим структуру матриц [M], [M1], [M2], которые формируются элементами mik формул (9), причем заметим, что матрица [M] является стандартной матрицей масс тела. Подматрицы размером 3×3, соответствующие трем строкам k-го узла и трем столбцам i-го узла для матриц [M], [M1], [M2], имеют вид

$$[\mathbf{M}]_{ki} = \begin{bmatrix} m_{ki} & 0 & 0 \\ 0 & m_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & m_{ki} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{M}_1]_{ki} = \begin{bmatrix} m_{ki} & 0 & 0 \\ 0 & m_{ki} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{M}_2]_{ki} = \begin{bmatrix} 0 & m_{ki} & 0 \\ -m_{ki} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структура подматриц $[\mathbf{M}]_{ki}$, $[\mathbf{M}_1]_{ki}$ – симметрична, а $[\mathbf{M}_2]_{ki}$ – антисимметрична. Соответственно этому матрицы $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{M}_1]$ являются симметричными, а матрица $[\mathbf{M}_2]$ – несимметричной (антисимметричной). Отметим, что численное решение начальной задачи для уравнения (10), которое обычно выполняется с применением разностной схемы [6], предусматривает обращение так называемой эффективной матрицы жесткости, составленной из матриц исходного уравнения. В связи с этим десимметризация исходных матриц существенно повышает трудоемкость численного интегрирования уравнения (10).

Уравнение (10) при $\omega = 0$ приобретает стандартный вид уравнений движения тела при дискретизации МКЭ [6], а для стационарного состояния ($\dot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}} = 0$) переходит в уравнения равновесия тела под действием центробежных сил. Вектор правой части уравнения (10) обусловлен центробежными силами, причем, если главный вектор этих сил в произвольном сечении тела равен нулю, то небаланс отсутствует. В противном случае имеет место небаланс распределения массы тела относительно оси *z*. В равновесном состоянии при отсутствии небаланса тело испытывает радиальное растяжение. При этом перемещения точек малы по отношению к радиусам-векторам в сечении, перпендикулярном оси *z*, а вследствие этого матрицей ω^2 $[\mathbf{M}_1]$ в (10) можно пренебречь в сравнении с матрицей жесткости $[\mathbf{K}]$. В случае небаланса, а также при существенной изгибной податливости тела относительно оси *z* (характерно для протяженных вдоль оси *z* тел с большими промежутками между опорами) реализуется состояние прецессии. При этом НДС тела можно рассматривать как комбинацию радиального растяжения и изгиба, а в уравнении (10) все матрицы при векторе перемещения $\mathbf{u}$ сохраняются.

Внешние силы должны быть добавлены в правую часть (10), причем с учетом переменности направлений осей x, y, например вес тела в этих осях становится переменной нагрузкой.

Уравнения (10), полученные для общего трехмерного случая, по виду коррелируют с уравнениями колебаний во вращающейся системе координат, полученными в простом случае для стержня с точечной массой [5].

Заключение. В трехмерной постановке получено матричное уравнение МКЭ колебаний вращающегося тела в подвижной системе координат, связанной с телом. Матрицы масс, входящие в уравнение, имеют как симметричную, так и несимметричную структуру. Рассмотрены частные примеры вырождения уравнения в известные случаи.

Полученные уравнения могут быть использованы для исследования колебаний вращающихся конструкций, где не применимы стержневые модели, в частности для роторов, содержащих трещины.

Список литературы: **1.** Изгибные колебания вращающихся валов / *Ф.М.Диментберг*. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 245 с. **2.** Численный анализ колебаний системы турбоагрегат-фундамент / *Н.Г.Шульженко, Ю.С.Воробьев*. – К.: Наукова думка, 1991. – 232 с. **3.** Rotor dynamics / *J.Kicinski*. – Gdansk: widawnictwo I MP PAN, 2006. – 539 p. **4.** *Bachschmid N.* Cracks in rotating shafts: experimental behaviour, modelling and identification // SURVEILLAN 5 CETIM, Senlis (2004). **5.** Прикладная теория механических колебаний / *В.Л.Бидерман*. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с. **6.** Численные методы анализа и метод конечных элементов / *К.Бате, Е.Вильсон*. – М. Стройиздат, 1982. – 448 с.

Поступила в редколлегию 14.07.2008.