

УДК 539.3

Е.И.ЛЮБИЦКАЯ, НТУ «ХПИ», Харьков

ИЗГИБ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Розглянуто геометрично нелінійний згин тонких ортотропних пологих оболонок при поперечному навантаженні які взаємодіють з пружною основою типу Вінклера. На базі теорії R-функцій та варіаційних методів надано розв'язки задачі для оболонок складної форми в плані; наведено алгоритм знаходження верхнього та нижнього критичного навантаження. Досліджено закономірності впливу форми плану та жорсткості основи на напружено-деформований стан ортотропних оболонок.

Geometrically nonlinear behavior of orthotropic shallow shells subjected to the transverse load and resting on Winkler's foundation is investigated. On base of R-function theory and variational methods problem's solution for shells with complex plan form is proposed. The algorithm to finding upper and lower critical loads is developed. Influence of plan form, foundation modulus on a stress-deformation state of orthotropic shells is presented.

В данной работе предлагается один из возможных подходов к решению задач геометрически нелинейного изгиба ортотропных пластин и пологих оболочек, имеющих в плане произвольную форму, под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки при учете влияния упругого основания типа Винклера. Подход базируется на применении вариационно-структурного метода R-функций (RFM) [1], методов последовательных нагружений и Ньютона [2]. Для решения задачи о закритической деформации использованы идеи, предложенные в работе [3], которые базируются на методе продолжения по

параметру.

В рамках классической геометрически нелинейной теории [4, 5] разрывающая система дифференциальных уравнений в смешанной форме, описывающая поведение ортотропных пологих оболочек на упругом основании типа Винклера, имеет следующий вид:

$$L_1(D_{ij})W + \Delta_k \Phi - L(W, \Phi) = q - pW; \quad (1)$$

$$L_2(A_{ij})\Phi + \Delta_k W + \frac{1}{2}L(W, W) = 0, \quad (2)$$

где $W(x,y)$, $\Phi(x,y)$ – прогиб и функция усилий, q – заданная поперечная нагрузка, k_1 , k_2 – главные кривизны оболочки, $\Delta_k = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, L_1 , L_2 – линейные дифференциальные операторы [5], p – коэффициент жесткости упругого основания.

На границе области искомые функции W , Φ должны удовлетворять крайевым условиям, зависящим от способа опирания оболочки. Если условия закрепления соответствуют скользящей заделке, то крайевые условия выглядят следующим образом:

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0; \quad \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

Для условий скользящего шарнира:

$$W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0; \quad \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

где n и τ – нормаль и касательная к границе области.

Чтобы получить решение поставленной задачи, нелинейную систему (1)-(2) необходимо сначала линеаризовать. Один из распространенных методов линеаризации – метод последовательных нагружений (МПН) [2]. Суммарная величина нагрузки разбивается на n частей δQ_i ($i = \overline{1, n}$). Общее напряженно-деформированное состояние определяется как сумма состояний на каждом этапе нагружения оболочки, в пределах которого деформации считаются малыми по сравнению с толщиной,

$$W^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta W_i; \quad \Phi^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta \Phi_i.$$

Неизвестные функции приращений прогиба и напряжений δW_i и $\delta \Phi_i$ отыскиваются из линейной системы следующего вида:

$$L_1(D_{ij})\delta W_i + \Delta_k \Phi^{(i-1)} - L(\delta W_i, \Phi^{(i-1)}) - L(W^{(i-1)}, \delta \Phi_i) = \delta Q_i - p\delta W_i; \quad (5)$$

$$L_2(A_{ij})\delta \Phi_i + \Delta_k W^{(i-1)} + \frac{1}{2}L(W^{(i-1)}, \delta W_i) = 0.$$

Здесь $W^{(i-1)}$ и $\Phi^{(i-1)}$ – функции, соответствующие значению нагрузки на $(i-1)$ -м шаге нагружения. Уравнения (5) необходимо дополнять соответ-

вующими граничными условиями.

В ходе многократного повторения процедуры увеличения нагрузки в решении накапливаются нежелательные погрешности. Поэтому целесообразно уточнить решение, например, с помощью метода Ньютона-Канторовича, более подробное описание которого можно найти в работах [2, 4].

Для решения последовательности линеаризованных задач изгиба ортотропной пологой оболочки применяется вариационный метод Ритца. В результате задача сводится к нахождению точки стационарности соответствующего функционала. Согласно вариационному методу Ритца, искомые функции приращений прогиба δW и напряжений $\delta \Phi$ раскладываются в ряд по некоторой полной системе координатных функций $\{W_j\}$, $\{\Phi_j\}$, удовлетворяющих заданным граничным условиям:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N_1} a_j W_j ; \quad \delta \Phi = \sum_{j=N_1+1}^{N_2} a_j \Phi_j ,$$

где a_j – неопределенные коэффициенты разложений.

Для областей со сложной геометрией построение необходимых последовательностей координатных функций весьма затруднительно, однако применение метода RFM позволяет справиться с подобными трудностями. Прежде всего, с помощью R-функций строится уравнение границы заданного плана оболочки $\omega(x,y) = 0$ [1, 6], а также структурные формулы решения краевой задачи. Если, например, на части контура оболочки ω_1 граничные условия соответствуют скользящей заделке, а на остальной части ω_2 – скользящему шарниру, то структурные формулы, удовлетворяющие главным (кинематическим) граничным условиям, могут быть выбраны как:

$$\delta W = \omega \omega_1 P_1 ; \quad \delta \Phi = \omega^2 P_2 . \quad (6)$$

Здесь P_1, P_2 – неопределенные компоненты структурных формул, которые представляются в виде разложения в ряд по полной системе функций, например, по степенным полиномам $\{\varphi_i\}$, $\{\Psi_i\}$:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i ; \quad P_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i \Psi_i . \quad (7)$$

При определенных геометрических параметрах исследуемой пологой оболочки, а также при достижении определенного уровня ее нагружения зависимость прогиба оболочки от величины внешнего давления может быть неоднозначной. Наряду с исходной формой равновесия становится кинематически возможной другая, смежная форма равновесного состояния. К сожалению, методы МПН и Ньютона не позволяют определять верхнюю и нижнюю критические нагрузки, при которых происходит «хлопок» пологой оболочки. Подход, позволяющих строить кривую деформирования с последовательным прохождением через все критические точки, в сочетании с теорией R-функций, был использован в работах [7, 8] для изотропных и ортотропных пологих оболочек. В данной работе метод развит для ортотропных оболочек на упругом основании.

Применение предложенного алгоритма дает возможность проводить ши-

рокий вычислительный эксперимент на базе программного комплекса POLE-RL [9]. Ниже приведены некоторые примеры задач, решение которых выполнено с помощью разработанного подхода.

Задача 1. Геометрически нелинейный изгиб сферической изотропной панели с круглым планом радиуса $R = 0,1$ (м) на упругом основании типа Винклера (рис. 1) под действием равномерно распределенной нагрузки q . Физические и геометрические параметры оболочки следующие: толщина $h = 0,01$ (м), радиусы кривизны $k_1 = k_2 = 4$ (1/м), модуль упругости $E = 20,4$ (МПа), коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, коэффициент жесткости основания $p = 4,7$ (кН/м³).

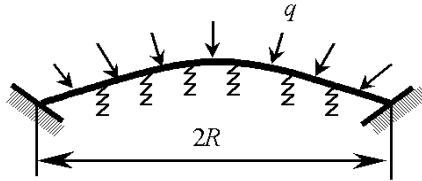


Рисунок 1

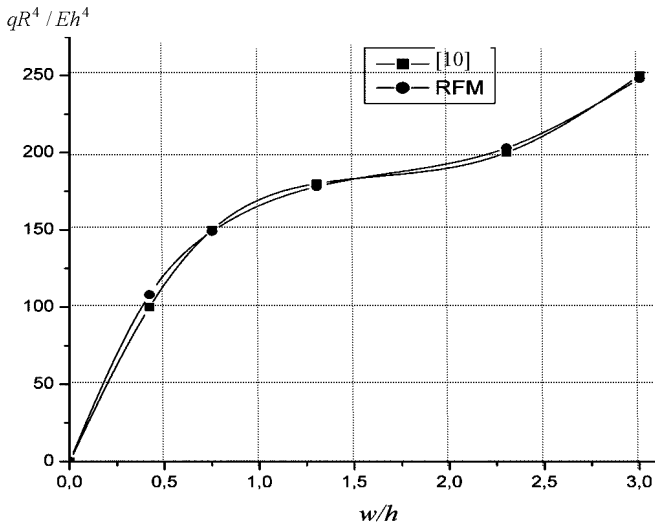


Рисунок 2

Зависимость «нагрузка – прогиб в центре» представлена на рис. 2. Результаты, полученные в работе [10] при помощи метода граничных элементов, не более чем на 0,6 % отличаются от результатов расчетов на базе RFM, что говорит о достоверности разработанного алгоритма.

Задача 2. Исследуем напряженно-деформируемое состояние (НДС) ортотропной сферической пологой оболочки со сложной формой плана и смешан-

ными условиями закрепления (рис. 3) под действием равномерно распределенной нагрузки. Геометрические параметры оболочки следующие: $h = 1$; $b = 0,5 a$; $d = -0,5a$, r – радиус отверстия. Материал – стеклопластик с коэффициентами упругости $E_1/E_2 = 10$; $G/E_2 = 1/3$; $\nu_{12} = 0,22$. Оболочка лежит на упругом основании типа Винклера с коэффициентом упругости p . Внешняя часть контура опирается на скользящий шарнир, на внутренней части – скользящая заделка.

Исследовано влияние упругого основания на вид кривой деформирования оболочки при $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 30$; $r = 0,1 a$. Графики «нагрузка – максимальный прогиб» представлены на рис. 4. Анализируя полученные результаты, можно заметить, что при увеличении коэффициента постели основания

$\tilde{p} = p \frac{E_2 h^3}{a^4}$ значение критической нагрузки, при которой происходит хлопок оболочки, растет, а соответствующий ему прогиб w/h увеличивается незначительно и находится в промежутке $4 < w/h < 4,7$. Также отметим, что с увеличением \tilde{p} разница между верхним и нижним критическими значениями (Q_B и Q_H) уменьшается, а также значительно сближаются соответствующие этим нагрузкам прогибы оболочки. При дальнейшем росте коэффициента \tilde{p} зависимость «нагрузка – максимальный прогиб» становится однозначной.

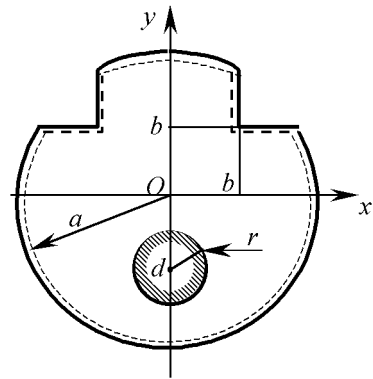


Рисунок 3

Влияние размера отверстия на значения критических нагрузок при $\tilde{p} = 10$ в зависимости от кривизны сферической оболочки представлено на рис. 5. Из графика видно, что небольшое увеличение радиуса отверстия (на $0,05 a$) значительно увеличивает значения Q_B и Q_H и сближает их между собой.

В табл. 1 представлено распределение прогибов и изгибающих напряжений в оболочке в сечении $y = 0$ в зависимости от размеров отверстия. $\frac{q_0 a^4}{E_2 h^4} = 100$, $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10$, $\tilde{p} = 20$. Из таблицы видно, что с ростом размеров отверстия прогибы и напряжения σ_y^H растут, в то время как σ_x^H уменьшаются.

Таким образом, с помощью разработанного на базе RFM подхода возможно на этапе проектирования элементов конструкций выполнять анализ их НДС и проверку удовлетворения параметров напряженного состояния допустимым пределам.

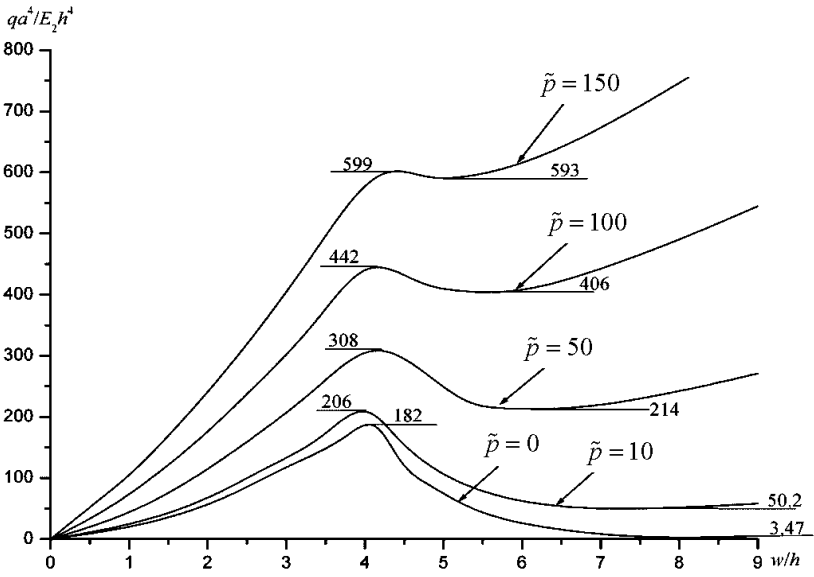


Рисунок 4

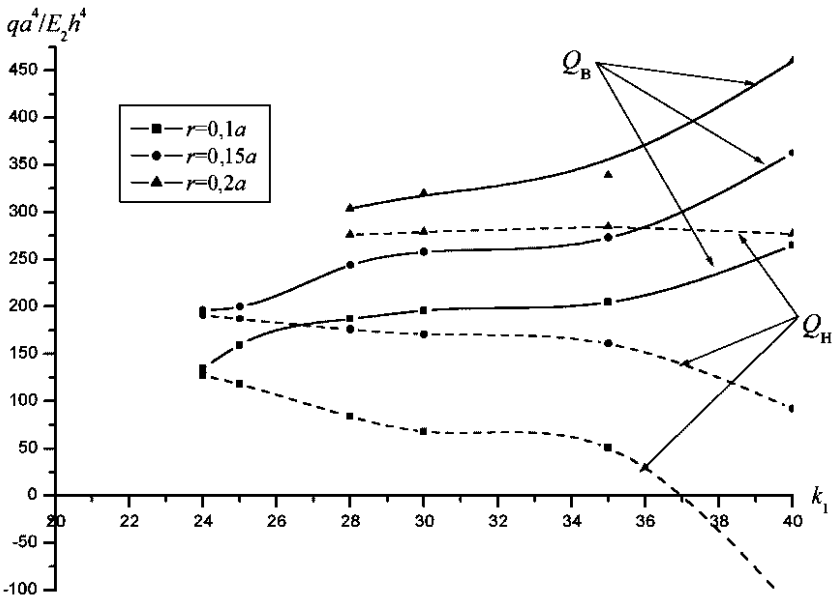


Рисунок 5

Таблица 1 – Распределение прогибов и напряжений в сечении $y = 0$

при $\frac{q_0 a^4}{E_2 h^4} = 100$; $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10$; $\tilde{p} = 20$

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$r = 0,1$						
$w(0,0)/h$	1,85	1,93	1,95	1,66	1,01	0
$\sigma_x^H a^3 / E_2 h^3$	-1,23	1,38	3,49	3,16	4,66	4,54
$\sigma_y^H a^3 / E_2 h^3$	2,76	2,63	2,14	1,77	1,46	0,75
$r = 0,2$						
$w(0,0)/h$	1,16	1,28	1,40	1,25	0,80	0
$\sigma_x^H a^3 / E_2 h^3$	-2,15	0,49	3,24	2,47	4,49	4,20
$\sigma_y^H a^3 / E_2 h^3$	1,58	1,84	1,76	1,40	1,24	0,64
$r = 0,3$						
$w(0,0)/h$	0,57	0,71	0,93	0,92	0,63	0
$\sigma_x^H a^3 / E_2 h^3$	-2,65	-0,75	2,77	2,40	4,15	3,34
$\sigma_y^H a^3 / E_2 h^3$	-0,08	0,61	1,29	1,16	1,06	0,51

Таблица 2 – Влияние \tilde{p} на прогиб и напряжения оболочки из стеклопластика

при $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10$, $r = 0,2$

	w/h max	$\sigma_x^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$		$\sigma_y^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$		$\sigma_x^M \frac{a^3}{E_2 h^3}$		$\sigma_y^M \frac{a^3}{E_2 h^3}$	
		max	min	max	min	max	min	max	min
$\tilde{p} = 0$	2,061	7,046	- 13,100	3,347	-3,968	14,109	-9,791	5,856	-6,341
$\tilde{p} = 20$	1,581	5,548	- 10,431	2,500	-3,093	10,740	-7,409	4,806	-4,995
$\tilde{p} = 40$	1,283	4,641	-8,726	1,985	-2,548	8,613	-5,884	4,101	-4,168

В табл. 2 представлены прогиб и экстремальные значения изгибающих и мембранных напряжений в оболочке с кривизной $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10$, с радиусом отверстия $r = 0,2$ при варьировании коэффициента жесткости упругого основания. Из таблицы можно сделать вывод, что увеличение коэффициента \tilde{p} снижает степень напряженности пологой оболочки, что соответствует физическому смыслу задачи.

- Список литературы:** 1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К., 1982. – 552 с. 2. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов, 1975. – 119 с. 3. Трошин В.Г. Об одном подходе к решению геометрически нелинейных задач технической теории оболочек // Прикладная математика и механика. – Т. 47, вып. 1. – 1983. – С. 101-107. 4. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища школа, 1983. – 286 с. 5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М., 1974. – 448 с. 6. Рвачев В.Л., Курна Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – К., 1987. – 176 с. 7. Курна Л.В., Морачковская И.О., Скелтус А.Н. Применение метода R-функций к решению нелинейных задач теории пологих оболочек // Проблемы машиностроения. – Т. 4, № 1-2. – 2001. – С. 58-77. 8. Л.В. Курна, Е.И. Любицкая. Исследование закритического поведения ортотропных пологих оболочек сложной формы в плане // Вестник НТУ «ХПИ». – № 32. – 2006. – С. 92-97. 9. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – К, 1988. – 198 с. 10. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. – Казань: Фэн, 2002. – 199 с.

Поступила в редакцию 03.11.2008