

УДК 539.3

*Ю.С.ДЕРЕВЯНКО; К.В.АВРАМОВ*, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ»

## **ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМОГО ГИБКОГО СТЕРЖНЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ ГАСИТЕЛЕМ**

У статті отримана динамічна система, яка описує параметричні коливання гнучкого стрижня. Взаємодія шарнірно опертого гнучкого стрижня із динамічним гасителем описується дискретною моделлю із двома ступенями вільності. Представлено результати чисельного аналізу параметрично збуджуваної динамічної системи.

The dynamical system describing parametric vibrations of elastic beam is derived here. The interaction between a hinged-clamped elastic beam and attached mass-spring absorber is modelled by two-degree-of-freedom system. One-mode approximation of the beam oscillations is used. The results of numerical simulations of parametrically excited dynamical system are presented.

**1. Введение.** В процессе эксплуатации многие приборы, машины и механизмы работают в условиях значительных динамических нагрузок. Часто эти нагрузки являются параметрическими. В тонкостенных конструкциях под действием параметрических нагрузок возникают параметрические и комбинационные резонансы, приводящие к колебаниям с большими амплитудами. Поэтому проблема гашения параметрических колебаний тонкостенных конструкций является актуальной.

В качестве гасителя в статье [1] предложено использовать стержень, который крепится к системе масса-пружина, совершающей резонансные колебания. С. Шоу и С. Виджин рассматривали маятниковый антивибратор для гашения крутильных колебаний [2]. Они исследовали хаотические колебания с помощью функций Мельникова. В статье [3] рассматривается линейный гаситель, крепящийся к основной нелинейной системе. Показано, что вынужденные колебания становятся неустойчивыми в области комбинационного резонанса, когда частота возмущающего воздействия близка к полу сумме собственных частот. В этой области возникают резонансные почти периодические колебания. В статье [4] предложено использовать осциллятор с нелинейной пружиной для гашения вынужденных колебаний системы Дуффинга. Для ис-

следования резонансной динамики применяли методы возмущений. С. Натсиавас использует нелинейную систему масса-пружина для гашения самовозбуждающихся автоколебаний [5]. Различные конструкции нелинейных динамических гасителей и методы их расчета представлены в [6]. К. Ли и С. Шоу использовали маятниковый антивибратор [7] для гашения крутильных колебаний в четырехцилиндровом ДВС.

В этой статье ставится задача о гашении параметрических колебаний стержневых систем. Для уменьшения амплитуд колебаний к стержню крепится линейный динамический гаситель. В этой статье предлагается выбирать параметры гасителя так, чтобы выводить области параметрической неустойчивости из рабочего частотного диапазона нагрузки. Задачи о выводе опасных колебаний из рабочих диапазонов конструкций ставилась в работах В.Н. Карабана [8].

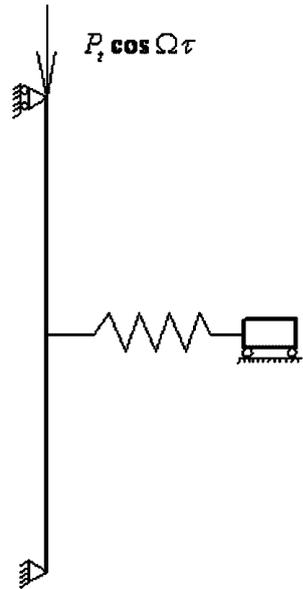


Рисунок 1 – Механическая система

**2. Формулировка задачи.** Рассматриваемая механическая система представлена на рис. 1. К основной системе (стержню), колебания которой требуется загасить, посередине крепится линейный гаситель в виде осциллятора. В этом случае легче всего загасить первую форму колебаний стержня.

Колебания механической системы описываются дискретно континуальной моделью:

$$EJw'''' + \mu \dot{w} + P_i \cos(\Omega t) w'' = \delta \left( x - \frac{l}{2} \right) \left\{ K \left[ q - w \left( \frac{l}{2}, t \right) \right] \right\}; \quad (1)$$

$$M \ddot{q} = -K \left[ q - w \left( \frac{l}{2}, t \right) \right], \quad (2)$$

где  $w' = w_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ ;  $\dot{w} = w_t = \frac{\partial w}{\partial t}$ ;  $w(x, t)$  – динамический прогиб стержня;  $EJ$  – жесткость стержня при изгибе;  $\mu$  – масса единицы длины стержня;  $l$  – длина стержня;  $q$  – обобщенная координата, описывающая движение гасителя;  $M$  – масса гасителя.

Рассмотрим шарнирно опертый стержень со следующими граничными условиями:

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = w''|_{x=0} = w''|_{x=l} = 0.$$

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$u = \frac{w}{r}; \quad \tau = \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} t; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad \varepsilon \Gamma_t = \frac{l^2 P_t}{EI}; \quad q^* = \frac{q}{r}; \quad M^* = \frac{M}{\mu l}; \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{K l^3}{EI}; \quad \Omega^* = \Omega l^2 \sqrt{\frac{\mu}{EI}}; \quad \delta^* \left( \xi - \frac{1}{2} \right) = l \delta \left( x - \frac{l}{2} \right),$$

где  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр;  $r = \sqrt{J/A}$  – радиус инерции поперечного сечения,  $J, A$  – момент инерции и площадь поперечного сечения стержня. Опуская звездочки в обозначениях, динамическую систему (1, 2) представим относительно безразмерных переменных и параметров:

$$u'''' + \ddot{u} + \varepsilon \Gamma_t \cos(\Omega \tau) u'' = \delta \left( \xi - \frac{1}{2} \right) \times \left\{ \gamma \left[ q - u \left( \frac{1}{2}, \tau \right) \right] \right\}; \quad (4)$$

$$M \ddot{q} = -\gamma \left[ q - u \left( \frac{1}{2}, \tau \right) \right], \quad (5)$$

где  $u' = u_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi}$ ;  $\dot{u} = u_\tau = \frac{\partial u}{\partial \tau}$ . Колебания балки  $u(\xi, \tau)$  представим в виде

одномодовой аппроксимации:

$$u(\xi, \tau) = \theta(\tau) \sin(\pi \xi). \quad (6)$$

Подставим (6) в уравнения (4, 5) и применим к полученной системе метод Бубнова-Галеркина. В результате получим следующую дискретную динамическую систему:

$$\ddot{\theta} + \pi^4 \theta + \varepsilon \Gamma_t \pi^2 \cos(\Omega \tau) \theta = 2\gamma(q - \theta); \quad (7)$$

$$M \ddot{q} = -\gamma(q - \theta). \quad (8)$$

**3. Расчет областей динамической неустойчивости.** Определение границ областей неустойчивости сводится к отысканию значений характерных параметров, при которых рассматриваемая система имеет периодические решения с периодами  $T$  и  $2T$ .

Следуя [9], определим границы нечетных областей неустойчивости из условия существования периодического решения с периодом  $2T$ , которое представим так:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} \left( a_{2i-1} \sin \left( \frac{2i-1}{2} \Omega \tau \right) + b_{2i-1} \cos \left( \frac{2i-1}{2} \Omega \tau \right) \right); \quad (9)$$

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} \left( c_{2i-1} \sin \left( \frac{2i-1}{2} \Omega \tau \right) + d_{2i-1} \cos \left( \frac{2i-1}{2} \Omega \tau \right) \right). \quad (10)$$

В результате подстановки рядов (9, 10) в систему уравнений (7, 8) и приравнивания коэффициентов при одинаковых гармониках получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений. Приравнявая нулю определитель этой системы, получаем уравнение для определения границ всех не-

четных областей неустойчивости:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\Omega^2}{8} + \frac{\pi^4}{2} \pm \frac{\varepsilon\Gamma_i\pi^2}{4} + \gamma & -\gamma & \frac{\varepsilon\Gamma_i\pi^2}{4} & 0 & \dots \\ -\gamma & -\frac{\mu\Omega^2}{4} + \gamma & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varepsilon\Gamma_i\pi^2}{4} & 0 & -\frac{9\mu\Omega^2}{8} + \frac{\pi^4}{2} + \gamma & -\gamma & \dots \\ 0 & 0 & -\gamma & -\frac{9\mu\Omega^2}{4} + \gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Для определения областей неустойчивости, границы которых описываются периодическими решениями с периодом  $T$ , подставим в систему уравнений (7, 8) следующие ряды:

$$\theta = \sum_{i=0}^{\infty} (a_{2i} \sin(i\Omega\tau) + b_{2i} \cos(i\Omega\tau)); \quad (12)$$

$$q = \sum_{i=0}^{\infty} (c_{2i} \sin(i\Omega\tau) + d_{2i} \cos(i\Omega\tau)). \quad (13)$$

Уравнения для определения границ четных областей неустойчивости представим так:

$$\begin{vmatrix} -\frac{\Omega^2}{2} + \frac{\pi^4}{2} + \gamma & -\gamma & \frac{\varepsilon\Gamma_i\pi^2}{4} & 0 & \dots \\ -\gamma & -\mu\Omega^2 + \gamma & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varepsilon\Gamma_i\pi^2}{4} & 0 & -2\Omega^2 + \frac{\pi^4}{2} + \gamma & -\gamma & \dots \\ 0 & 0 & -\gamma & -4\mu\Omega^2 + \gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0; \quad (14)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi^4}{2} + \gamma & -\gamma & \frac{\varepsilon\Gamma_i\pi^2}{4} & 0 & \dots \\ -\gamma & \gamma & 0 & 0 & \dots \\ \frac{\varepsilon\Gamma_i\pi^2}{4} & 0 & -\frac{\Omega^2}{2} + \frac{\pi^4}{2} + \gamma & -\gamma & \dots \\ 0 & 0 & -\gamma & -\mu\Omega^2 + \gamma & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Приближенные аналитические и численные результаты можно получить, рассматривая конечные определители (11), (14), (15), соответствующие усеченным рядам Фурье.

#### 4. Анализ параметрических колебаний.

В дальнейшем будем использовать следующие численные значения параметров системы [10]:

$$EI = 0,201 \text{ Н} \cdot \text{м}^2; \mu = 9,3 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}; l = 558 \text{ мм}; b = 11,95 \text{ мм}; h = 1 \text{ мм}.$$

На рис. 2 изображены первые три области неустойчивости на плоскости параметров  $\Omega$ ,  $\varepsilon\Gamma$  параметрически возбуждаемого, шарнирно опертого гибкого стержня без линейного гасителя колебаний. Как видно, главная область динамической неустойчивости имеет наибольшую ширину и является наиболее опасной. Поэтому в дальнейшем мы будем гасить основной резонанс.

Выведение областей динамической неустойчивости из рабочего частотного диапазона нагрузки стержневой системы осуществляется путем подбора упругих и инерционных параметров линейного гасителя. Гашение параметрических колебаний динамической системы осуществляется при относительно большой массе присоединяемого тела, составляющей обычно 5-20 % массы стержня.

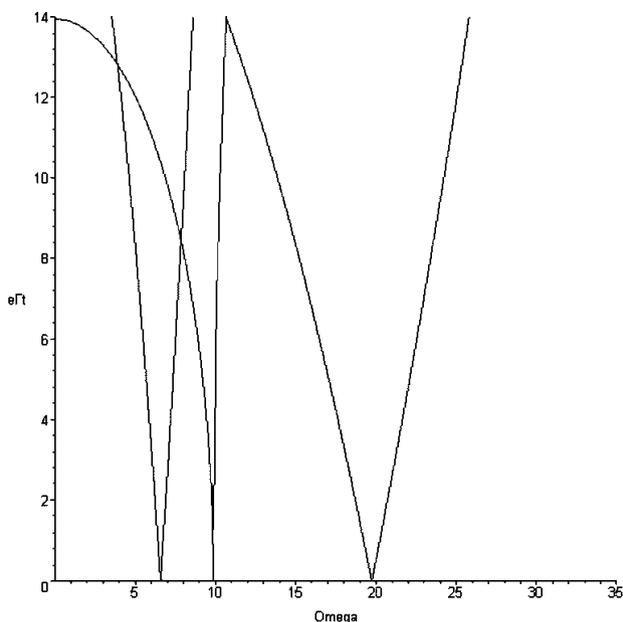


Рисунок 2 – Области динамической неустойчивости гибкого стержня

В результате численного исследования системы с различными параметрами гасителя были подобраны такие их значения, при которых осуществляется оптимальное выведение областей динамической неустойчивости из рабочего диапазона возбуждающих частот. При других параметрах гасителя области динамической неустойчивости смещаются ближе к области основного параметрического резонанса стержня. Сконструированный динамический гаситель имеет следующие параметры: масса  $M = 0,01$  кг (20 % массы основной системы) жесткость  $K = 17,857$  Н/м, диаметр витков пружины  $D = 0,020$  м, диаметр поперечного сечения пружины  $d = 0,001$  м, число витков  $n = 7$ .

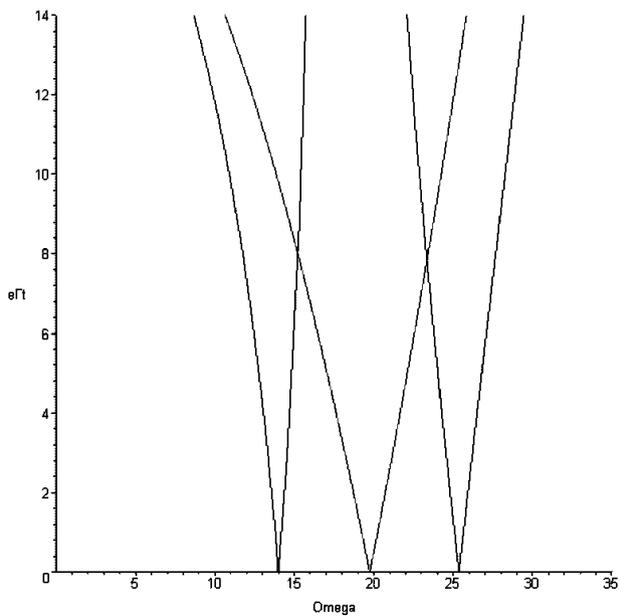


Рисунок 3 – Первая область динамической неустойчивости

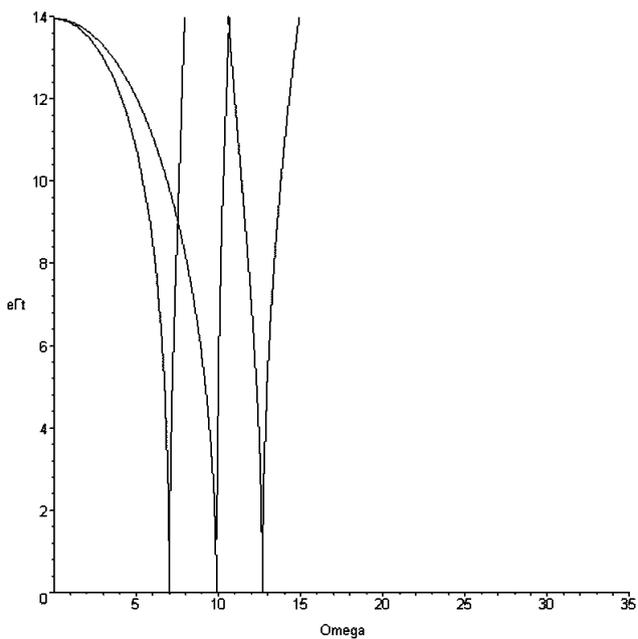


Рисунок 4 – Вторая область динамической неустойчивости

На рис. 3 представлены первые области динамической неустойчивости на плоскости параметров  $\Omega$ ,  $\varepsilon\Gamma$ , параметрически возбуждаемого гибкого стержня без линейного гасителя колебаний и выведенные из заданного рабочего диапазона области неустойчивости системы с гасителем. Вторые области динамической неустойчивости шарнирно опертого стержня без линейного гасителя и области параметрической неустойчивости, выведенные из заданного частотного диапазона, динамической системы с гасителем показаны на рис. 4.

**Заключение.** В статье исследовано взаимодействие параметрически возбуждаемого гибкого стержня с линейным гасителем колебаний. Выбраны параметры поглотителя, обеспечивающие оптимальное гашение параметрических колебаний в линейной постановке.

Эта работа была частично поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины в рамках проекта Ф25.1/042. Автор статьи благодарит проф. Ю.В. Михлина за обсуждение вопросов, рассмотренных в этой работе.

**Список литературы:** 1. *Haxton R.S., Barr A.D.S.* The autoparametric vibration absorber // Journal of Engineering for Industry. – ASME. – 1972. – V. 94. – P. 119-122. 2. *Shaw S.W., Wiggins S.* Chaotic motions of a torsional vibration absorber // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. – ASME. – 1988. – V. 55. – P. 952-958. 3. *Shaw J., Shaw S.W., Haddow A.G.* On the response of the non-linear vibration absorber // Int. Journal of Non-linear Mechanics. – Pergamon. – 1989. – V. 24 (4). – P. 281-293. 4. *Natsiavas S.* Steady state oscillations and stability of non-linear dynamic vibration absorber // Journal of Sound and Vibration. – Academic Press, 1992. – V. 156 (22). – P. 227-245. 5. *Natsiavas S.* Stability and bifurcation analysis for oscillators with motion limiting constraints // Journal of Sound and Vibration. – Academic Press. – 1990. – V. 141 (1). – P. 97-102. 6. Вибрации в технике. / Под ред. К.В. Фролова, Т. 6. – М.: Машиностроение, 1995. – 450 с. 7. *Lee C.-T., Shaw S.W.* Torsional vibration reduction in internal combustion engines using centrifugal pendulums // In Proceedings of the Design Engineering Technical Conference. – ASME, New York. – 1995. – Vol. 3. – P. 487-492. 8. *Карaban В.Н., Долгошеев А.М.* Надежность и долговечность сельскохозяйственных машин. – М.: ВО «Агропромиздат», 1990. – 210 с. 9. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 500 с. 10. *Saito H., Koizumi N.* Parametric vibrations of a horizontal beam with a concentrated mass at one end / Int. Journal of Mech. Sci. – Pergamon. – 1982. – V. 24. – P. 755-761.

Поступила в редколлегию 05.05.2008.