

УДК 539.3

Ю.С.ВОРОБЬЕВ, докт.техн.наук; **А.В.КОЛОДЯЖНЫЙ**, канд.техн.наук;
А.В.ЯРЫЖКО; ИПМаш НАН Украины, Харьков

СКОРОСТНОЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ УДАРЕ

Приводиться аналітичне дослідження динамічного напружено-деформованого стану замкнутої циліндричної оболонки при контактному ударі за допомогою інтегральних перетворень з координатах і часу. Розв'язка отримана методами, які використовують підхід, запропонований у роботах С.Г.Голоскокова і А.П.Філіппова.

Analytical investigation of dynamics stress-strain state of reserved cylindrical shell under contact shock is fulfilled integral transforms on coordinates and time. The solution is obtained by method, which take approach in works of E.G.Goloskokov and A.P.Filippov.

Динамическое напряженно-деформируемое состояние цилиндрической оболочки при ударном нагружении твердым деформируемым телом с учетом волнового характера процесса деформирования представляет большой интерес. Ее решение позволяет оценить поведение и прочность реальных конструкций с ударными взаимодействиями.

В работах Е.Г.Голоскокова и А.П.Филиппова [1,2] предложен оригинальный подход к решению данной задачи, которая состоит в использовании интегральных преобразований или разложений и итерационного решения функционального уравнения удара С.П.Тимошенко относительно контактного давления. Развитие данного метода позволяет учесть волновой характер деформирования при динамическом контактном взаимодействии ударника и оболочки, переход деформаций в упруго-пластическую стадию и динамические свойства материала.

1. Для исследования процесса удара по деформируемой преграде С.П.Тимошенко предложил [2] функциональное уравнение удара

$$v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t \int_0^t P(t) dt dt_1 = w(x_0, y_0, t) + \alpha(P), \quad (1)$$

где w – поперечное смещение оболочки в центре удара; α – вдавливание в месте удара; $v_0 = \sqrt{2gH}$ – скорость соударения; g – ускорение свободного падения; H – высота сбрасывания ударника; $P(x, y, t)$ – усилие контактного взаимодействия ударника с преградой.

Левая часть уравнения (1) отражает движение ударника с массой M и скоростью v_0 . При упругом соударении ударника и оболочки их взаимное локальное вдавливание определяется из статической контактной задачи Г.Герца [2].

$$\alpha = kP^{2/3}, \quad (2)$$

где $k = \left[\frac{2R_T^{1/2} E}{3(1-\nu^2)} \right]^{2/3}$; $R_T = \left(\frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}$ – радиус сферической поверхности ударника.

Математической моделью деформирования объекта принята модель оболочки типа С.П. Тимошенко, учитывающая волновой характер скоростного деформирования. Для учета возможности возникновения пластических деформаций используется динамическая деформационная теория пластичности А.А. Ильюшина [3]. Одним из способов ее применения является метод упругих решений, который позволяет для произвольного закона упрочнения материала при скоростном деформировании получить, решение задачи путем итерационного процесса [1,2]. А в случае использования его варианта – метода фиктивных нагрузок с билинейным или полилинейным упрочнением – возможность безитерационного процесса решения [2,4].

В работе [5,6] предложено использовать зависимости для полилинейного деформационного и степенного скоростного упрочнение. Такое представление деформационного упрочнения дает возможность безитерационного анализа параметров НДС для реальных процессов больших деформаций, а зависимость прочностных характеристик от скорости деформации получена экспериментально для ряда конструкционных материалов [6,8].

Эффективность такой модели показана на примере решения задачи скоростного деформирования балки с билинейным и трехступенчатым линейным деформационным упрочнением [5,6].

2. Для цилиндрической оболочки уравнения движения в усилиях и моментах имеют вид [2,6]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = \rho h \ddot{u}_x;$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho h \ddot{u}_y;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\beta}_x; \quad (3)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\beta}_y;$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \frac{N_y}{R} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \\ = q(x, y, t) + \rho h \ddot{w}_x,$$

$\vec{V}(u_x, u_y, w, \beta_x, \beta_y)$ – компоненты перемещения и углы поворота; $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ – усилия, моменты и перерезывающие силы в срединной поверхности оболочки; $q(x, y, t)$ – нормальная составляющая импульсного (ударного) давления; h – толщина оболочки; R – радиус срединной поверхности; ρ – плотность материала оболочки; t – время.

Смещения любой точки оболочки представлено как перемещения срединной поверхности (u, v, w) и поворота нормалей к ней на углы β_x и β_y :

$$u_x(x, y, z, t) = u(x, y, t) + z\beta_x; \\ u_y(x, y, z, t) = v(x, y, t) + z\beta_y; \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t). \quad (4)$$

Деформации определяются зависимостями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + z \frac{\partial \beta_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} + z \frac{\partial \beta_y}{\partial y}; \\ \varepsilon_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \right) f(z); \quad \varepsilon_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \right) f(z); \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right), \quad (5)$$

где $f(z) = 6 \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$.

В упругой области деформирования напряжения будут:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y; \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_y + \nu \varepsilon_x; \\ \sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy}; \quad \sigma_{xz} = G \varepsilon_{xz}; \quad \sigma_{yz} = G \varepsilon_{yz}. \quad (6)$$

Интенсивности напряжений и деформаций:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)}; \\ \varepsilon_i = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + 3(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{yz}^2)}; \quad (7)$$

усилия и моменты будут:

$$\bar{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz; \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz. \quad (8)$$

Уравнения (3) – (8) образуют начально-краевую задачу с начальными и граничными условиями. Условия контакта ударника и оболочки определяются зависимостями (2) для контактной задачи Г.Герца. Вне зоны контакта начальные и граничные условия являются нулевыми.

$$\begin{cases} \vec{V} = 0; \\ \dot{\vec{V}} = 0; \end{cases} \begin{cases} \text{при } |x| \geq r_0 + cf; \\ \text{при } |y| \geq r_0 + cf, \end{cases} \quad (9)$$

где r_0 – радиус зоны контакта; $c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ – скорость звука в материале.

$$u_y = \beta_y = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0; \quad (10)$$

$$u_x = \beta_x = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \beta_y}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, достаточно рассмотреть $1/4$ зоны деформирования оболочки.

Подставим (8) в (3) и, исключив все неизвестные величины (усилия и смещения) кроме w , получим разрешающее уравнение системы (3) относительно нормальных смещений через граничные, начальные условия и нагрузку.

$$L_3^{(1)}[w(\xi, \eta, \tau)] = L_3^{(2)}[P(\xi, \eta, \tau)] + L_3^{(02)}[P(0, \eta, \tau)], \quad (12)$$

где $L_3^{(1)}$, $L_3^{(2)}$, $L_{03}^{(2)}$ – дифференциальные операторы разрешающего уравнения (12).

Для остальных неизвестных будем иметь

$$L_i^{(1)}[w(\xi, \eta, \tau)] = L_i^{(2)}[w(\xi, \eta, \tau), P(\xi, \eta, \tau)], \quad (13)$$

где $L_i^{(1)}$, $L_i^{(2)}$ – дифференциальные операторы разрешаемой системы.

Для цилиндрической оболочки разрешаемые операторы будут:

$$\begin{aligned} L_3^{(1)} = & \left[\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \left(\Delta - \frac{1}{K_1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \left(\Delta - \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \left(\Delta - \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \left(\Delta - \frac{1+K_1}{1+K_1^2(1+12a^3/h^3)} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \right] \times \\ & \times \frac{1+K_1^2(1+12a^3/h^3)}{1+K_1} - \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - K_1 \right) \left\{ \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (2+\nu) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Big|;$$

$$L_3^{(2)} = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{a^2}{h^2} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - K_1 \right) \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \left(\Delta - \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right).$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$; $K_1 = K \frac{1-\nu}{2} \approx 0.35$; $K = \frac{\pi^2}{12}$ и безразмерные коор-

динаты $\xi = \frac{x}{a}$; $\eta = \frac{y}{a}$; $\tau = \frac{ct}{a}$.

Для нормального смещения граничные условия будут:

$$\text{при } \xi|_0 = \xi|_{l/a} = 0; \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0;$$

$$w^{IV} = 12 \frac{1-\nu^2}{E} \left(\frac{a}{h} \right)^3 \left[\left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 \right) \frac{h^2}{12a^2 K_1} \right] P_3(\xi, \eta, \tau) = L_2^0[P_3]; \quad (15)$$

$$w^{VI} = 12 \frac{a^2}{h^2} \left[P_3''(\xi, \eta, \tau) + \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 1 - \frac{\nu^2}{K_1} \right) P_3(\xi, \eta, \tau) \right] = L_2^0[P_3].$$

Краевая задача (12)-(15) при использовании метода фиктивных нагрузок может решаться в рядах или методом интегральных преобразований: по координатам ξ и η – используется преобразование Фурье, а по времени τ – преобразование Лапласа, соответственно:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\lambda_m, \eta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{l/a} w(\xi, \eta, \tau) \sin(\lambda_m \xi) d\xi; \\ \bar{w}(\xi, p, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi, \eta, \tau) e^{-ip\eta} dp; \\ w^*(\xi, \eta, s) &= \int_0^{\infty} w(\xi, \eta, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

где \tilde{w} – изображение w в конечном синус-преобразовании Фурье с параметром λ_m ; \bar{w} – изображение w в преобразовании Фурье с параметром p ; w^* – изображение w в преобразовании Лапласа с параметром s ;

При применении последовательно всех трех преобразований в пространстве изображений имеем для нормальных смещений

$$\tilde{\tilde{w}}^*(\lambda_m, p, s) = \frac{\tilde{L}_3^{*(2)}(\lambda_m, p, s) \tilde{P}_3^*(\lambda_m, p, s) - \tilde{L}_3^{*(02)}(0, p, s) \tilde{P}_3^*(0, p, s)}{\tilde{L}_3^{(1)}(\lambda_m, p, s)}. \quad (17)$$

Здесь $\tilde{L}_3^{(1)}(\lambda_m, p, s)$, $\tilde{L}_3^{*(2)}(\lambda_m, p, s)$, $\tilde{L}_3^{*(02)}(0, p, s)$ – алгебраические полиномы соответственно восьмого, шестого и четвертого порядков от параметров интегральных преобразований λ_m, p, s ; $\tilde{P}_3^*(\lambda_m, p, s)$, $\tilde{P}_3^*(0, p, s)$ – трансфор-

манты нагрузки разбитой на линеаризованные участки.

Для перехода в пространство оригиналов формально получим выражение:

$$w(\xi, \eta, \tau) = 8\pi P_0 \frac{a}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_m \xi)}{\lambda_m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip\eta} dp \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{s\tau} \times$$

$$\times \frac{\tilde{L}_3^{*(2)}(\lambda_m, p, s) \tilde{P}_3^*(\lambda_m, p, s) - \tilde{L}_3^{*(02)}(0, p, s) \tilde{P}_3^*(0, p, s)}{L_3^{(1)}(\lambda_m, p, s)} ds \quad (18)$$

Обращение синус-преобразование Фурье на конечном интервале $[0, l/a]$ представляется в виде ряда по $\sin(\lambda_m \xi)/\lambda_m$ с коэффициентами в виде контурных интегралов; интегральное преобразование Фурье по переменной η с параметром преобразования p , обращается методом перевала (по виду трансформанты нагрузки $\tilde{P}_3^*(\lambda_m, p, s)$) с использованием второй теоремы Эфроса [9].

Для вычисления контурного интеграла от преобразования Лапласа, не имеющего точек ветвления, а только полюса в корнях полинома $\tilde{L}_3^{*(1)}$, который является уравнением бичетвертого порядка применяется теория вычетов. Учитывая, что в числителе подынтегрального выражения входят бикубический и биквадратный полином и трансформанта нагрузки по комплексному параметру s , необходимо произвести в (18) разделение на вещественную и мнимую часть и в силу того, что рассматривается волновая задача (с нулевым физическим затуханием), мнимая часть будет обращаться в нуль [4].

При наличии корней уравнения бичетвертого порядка $\tilde{L}_3^{*(1)}(s) = 0$ $(s_q, s_j) = (r_q + i\gamma_q, r_j + i\gamma_j)$, теория вычетов дает нормальное смещение в упругой области:

$$w(\xi, \eta, \tau) = \frac{24}{\pi^2} (1 - \mu^2) \left(\frac{a}{h}\right) \left(\frac{a}{l}\right) \frac{P_0}{E} \sum_m \frac{\sin(\lambda_m \xi)}{\lambda_m} \times$$

$$\times \sum_{q=1}^8 \frac{\sqrt{r_q^2 + \gamma_q^2} e^{r_q[\tau - \alpha(1 - \cos \eta)]}}{\prod_{j=1}^8 \sqrt{[r_q - r_j(1 - \delta_{qj})]^2 + [\gamma_q - \gamma_j(1 - \delta_{qj})]^2}} \left[(\lambda_m^2 - r_q^2 + \gamma_q^2)^2 + \right.$$

$$\left. + 4\gamma_q^2 r_q^2 \right] \cos \left[\arctg \left(\frac{\gamma_q}{r_q} \right) + 2 \arctg \left(\frac{4\gamma_q r_q}{\lambda_m^2 - r_q^2 + \gamma_q^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \arctg \gamma_q [\tau - \alpha(1 - \cos \eta)] - \sum_{q=1}^8 \arctg \left(\frac{\gamma_q - \gamma_i(1 - \delta_{qj})}{r_q - r_i(1 - \delta_{qj})} \right) \right] \quad (19)$$

Величины силовых параметров $[N, M, Q]$ и компонент вектора смещений определяются зависимостью (19) для $w(\xi, \eta, \tau)$ и нестационарной контактной нагрузкой $P_3(\lambda_m, p, s)$ и $P_3(0, p, s)$. В работах [1,2] предполагается, что контактное давление распределено по площадке контакта равномерно. В процессе решения площадка контакта стремится к нулю, и задача фактически решается для нестационарной сосредоточенной силы. В данном случае контактное давление

имеет максимум в точке начального контакта и обращается в ноль на границе зоны контакта, что может быть представлено зависимостью:

$$P(x, y, t) = P_0(t) \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2} \right).$$

Эта зависимость более правильно отражает реальное распределение контактного давления.

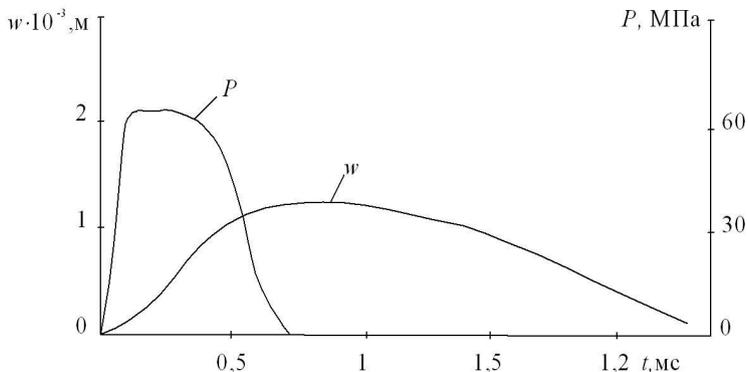
Подставляя (19) в (1) находим решение проблемы взаимодействия ударника с деформируемой преградой.

При рассмотрении удара стальным шаром радиуса R_0 , сбрасываемого с высоты $H = 1,0$ м по стальной цилиндрической оболочке радиусом R_0 , длиной l_0 и толщиной $\delta = 0,005$ м, шарнирно опертой по торцам получены параметры НДС, контактное ударное давление и нормальные смещения в центре удара (см. рисунок).

При увеличении интенсивности контактного взаимодействия при ударе или при соударении объектов с низкими прочностными характеристиками в зоне контакта могут возникать динамические пластические деформации (скоростное деформирование). В этом случае использование решение статической задачи Г. Герца о вдавливании шара в полупространство должно корректироваться зависимостями прочностных характеристик материалов контактирующих тел. Например, предел текучести определяется зависимостью [5]:

$$\sigma_T^D = \sigma_T^{CT} \left[1 + (\dot{\epsilon}_i / D_T)^{1/n_T} \right], \quad (20)$$

где σ_T^{CT} – статический предел текучести; D_T, n_T – коэффициенты скоростной зависимости материала соударяющихся тел, определяемый экспериментально.



Контактное давление и прогиб цилиндрической стальной оболочки
($l_0 = 1,5$ м; $\delta/a = 0,032$; $a = 0,125$ м; $M = 0,85$ кг; $H_{сб} = 1,0$ м)

В динамической деформационной теории пластичности А.А.Ильюшина и методе фиктивных нагрузок [5,6] используются зависимости для деформационного и скоростного упрочнение конструкционных материалов

$$\sigma_i = E \epsilon_i [1 - \omega(\epsilon_i)] \left[1 + (\dot{\epsilon}_i / D_j)^{1/n_j} \right], \quad (21)$$

где $\omega(\varepsilon_i)$ – функция деформационного упрочнения; D_j, n_j – коэффициенты скоростного упрочнения типа (26) ($j = 1, \dots, 8$).

$$\text{Для билинейной зависимости «}\sigma_i - \varepsilon_i\text{» } \omega = 1 - \lambda \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_T}{\varepsilon_i}, \quad \lambda = \frac{E - E_1}{E}.$$

Для полилинейного упрочнения:

$$\omega = 1 - \sum_k^N \left[\lambda_k \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \lambda_j \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^{(k)}}{\varepsilon_i} \right) \right] \quad (22)$$

где $\varepsilon_i^{(k)}$ – деформация в точке излома.

$$\text{Для степенного упрочнения } \omega = 1 - \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_T} \right)^m.$$

Нормальное перемещение оболочки в правой части уравнения (1) определяется зависимостью (19). Метод фиктивных нагрузок предполагает для оценки пластических зон разделение силовых факторов на линейную и нелинейную часть и присоединение нелинейной части к нагрузке (с последующей их ступенчатой или линейной аппроксимацией по координатам). В этой постановке вполне оправдано применения метода интегральных преобразований для решения функционального уравнения (1).

Для определения нормальных прогибов будем иметь уравнение:

$$\frac{Eh}{a^2} \left[L_3^{(1)} w(\xi, \eta, \tau) \right] = L_3^{(2)} \left[q - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\Omega \lambda M_\xi) - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\Omega \lambda M_\eta) \right] = 0. \quad (23)$$

где $M_\xi = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)$; $M_\eta = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)$ которые в первом приближении определяются через прогиб упругой оболочки.

Для линейного упрочнения:

$$\lambda = 1 - \frac{1}{E} \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i} = \frac{E - E_i}{E}; \quad \Omega(\eta) = (2\eta - 1)^2 (\eta + 1); \quad \eta = \frac{h}{2} \frac{\sigma_T^D}{\sigma_y}; \quad \sigma_y = \frac{M}{W}. \quad (30)$$

Прогиб оболочки в упругопластической стадии под действием локальной импульсной нагрузки, распределенной по круговой площадке контакта ударника с преградой, определяется в виде:

$$w(\xi, \eta, \tau) = \frac{a \left[P - \iint \lambda \cdot \Omega \left(\frac{\partial^2 M_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M_\eta}{\partial \eta^2} \right) ds \right]}{4\pi Eh} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^{\tau(R-R_0)/c} \int_0^{\tau} J_0(\cos^2 \varphi \sqrt{\tau^2 - z^2}) J \left[z, (R - \bar{z}) \cos(\varphi + \bar{\theta} - \theta) \right] \bar{r} d\bar{r} d\varphi d\theta dz d\tau$$

Компоненты усилий, моментов и перерезывающих сил определяются по (6), (7), (8).

Выводы. Теория аналитического решения функционального уравнения удара С.П. Тимошенко уточнена путем учета полилинейного деформационного и степенного скоростного упрочнения конструкционного материала. Возможность возникновения пластических деформаций учтена применением варианта метода упругих решений динамической деформационной теории пластичности, что позволяет учитывать накопление остаточных деформаций.

Список литературы: 1. *Голоскопов Е.Г., Филиппов А.П.* Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 340 с. 2. *Филиппов А.П.* Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с. 3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 378 с. 4. *Филиппов А.П.* Действие ударных и импульсных нагрузок на стержни и пластины с учетом упругопластической области деформирования // Избр. пробл. прикл. механики. – М. – 1974. – С. 691-699. 5. *Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В., Севрюков В.И., Янотин Е.Г.* Скоростное деформирование элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1989. – 192 с. 6. *Колодяжный А.В., Севрюков В.И.* Ударные и импульсные воздействия на конструкции и материалы. – Киев: Наукова думка, 1986. – 168 с. 7. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 8. *Степанов Г.В.* Упруго-пластическое деформирование и разрушение материалов при импульсном нагружении. – К.: Наукова думка, 1991. – 228 с. 9. *Снедон И.* Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.

Поступила в редколлегию 25.06.2008