

В.М.ГРИЩЕНКО, канд.техн.наук; *С.В.ГЛАДКОВ*, НТУ «ХП», Харьков

ПОРІВНЯЛЬНА ОЦІНКА ЧИСЕЛЬНОГО РІШЕННЯ ДВОМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається формалізм методу ГР при рішенні рівнянь в частинних похідних. Проведені порівняльні розрахунки модельних задач плоскої теплопровідності.

Procedure of Boundary Integral Equation Methods is consider in this article. And numerical solutions of model problems are compare.

1 Актуальність проблеми. В задачах проектування машинобудівних конструкцій значне місце посідають проблеми міцності, динаміки, теплопровідності та інші для окремих деталей, вузлів і конструкцій в цілому. Достовірність прогнозування поведінки цих об'єктів пов'язана з використанням адекватних розрахункових моделей, з наявністю ефективних методів вирішення рівнянь в частинних похідних при початково-крайових умовах. В практиці проведення розрахунків в наш час використовуються різні моделі, методи, програмне забезпечення. Але провідною тенденцією є перехід до дво- і тривимірних моделей з урахуванням реальних конструктивних і експлуатаційних факторів. При цьому на передній план виходить проблема багатократного збільшення розміру задач, який сягає за 1 млн.

Основу сучасних підходів їх вирішення складають чисельні методи механіки, головним з яких є метод скінченних елементів (МСЕ). По оцінкам спеціалістів у найближчій перспективі він збереже свою лідируючу роль. Але вже зараз при обчисленнях конструкцій складної форми МСЕ з великою кількістю невідомих виникають ускладнення, які намагаються усунути різними прийомами, розробкою модифікацій МСЕ і таке інше. Тому дослідники постійно займаються пошуком нових альтернативних підходів. У зв'язку з цим можливість, які притаманні теорії потенціалу час від часу збуджують інтерес до дослідження методу, який заснований на запису інтегральних рівнянь – методу граничних інтегральних рівнянь (МГР). Крайова задача для диференціальних рівнянь зводиться до інтегральних по границі області. Це дозволяє зменшити на порядок розмірність задачі. Першим кроком МГР є пошук невідомих задачі по границі – обчислення граничних інтегральних рівнянь. Після цього рішення задачі зводиться до квадратур.

Успішні результати, що вже одержані, прекрасна точність і ефективність дають підстави для розробки алгоритму розв'язання інженерних задач великого об'єму. Суттєві проблеми, які залишаються і супроводжують МГР, пов'язані зі станом методик рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь великого розміру (значно менших ніж у МСЕ але несиметричних та повністю заповнених).

2 Постановка двомірної задачі теплопровідності. Найбільш важливі напрямки інженерної діяльності, такі як проблеми міцності, динаміки, тепло-

провідності, електростатики та інші безпосередньо пов'язані з можливістю ефективного та достовірного визначення рішень класичних рівнянь математичної фізики в частинних похідних. Теорія рівнянь з частинними похідними є однією з центральних в розділах сучасної математики.

Дана робота присвячена викладенню основних положень методики побудови ГІР та порівняльної оцінки ефективності чисельної реалізації методу на прикладі двовірної задачі теплопровідності.

Розглядається двовірний інженерний об'єкт скінченних розмірів, кожна точка x якого належить області S , обмеженій кусочно-гладкою границею Γ . Зовнішній по відношенню до S орт нормалі в точці границі y ($y \in \Gamma$) позначено через $\mathbf{n}(y)$ (рис. 1).

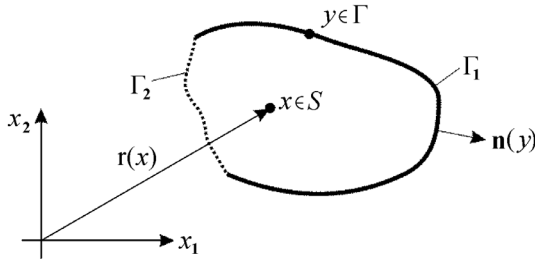


Рисунок 1 – Основні позначення

Ставиться крайова задача для рівняння Пуассона по визначенню температурного поля $u(x)$ – функції гармонічної в області S

$$\Delta u(x) = f(x), \quad (1)$$

де $x = \{x_1, x_2\}^T$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $f(x) = -\frac{1}{k}Q(x)$, k – коефіцієнт теплопровідності, $Q(x)$ – інтенсивність внутрішніх джерел тепла.

При наступних крайових умовах: на одній частині границі Γ_1 задана температура $u^+(y)$ (крайові умови типу Диріхле), а на іншій Γ_2 – еквівалент теплого потоку (умови типу Неймана):

$$\begin{aligned} u^+(y) \Big|_{y \in \Gamma_1} &= f_1(y), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ \Big|_{y \in \Gamma_2} &= f_2(y). \end{aligned} \quad (2)$$

В якості прикладів розглядаються модельні задачі, а результати порівнюються з аналогічними одержаними за допомогою МСЕ.

3 Основні положення алгоритму. Приведемо основні моменти формалізму МГІР спільні при рішенні різних класичних рівнянь в частинних похідних для задач механіки суцільного середовища.

3.1 Теорема про дивергенцію для плоскої області. Для зменшення порядку задачі звичайно використовується одна із форм теореми про диверген-

цію. Відповідну формулу для випадку плоскої області можна одержати з відомої формули Стокса (3) для просторової поверхні S (рис. 2).

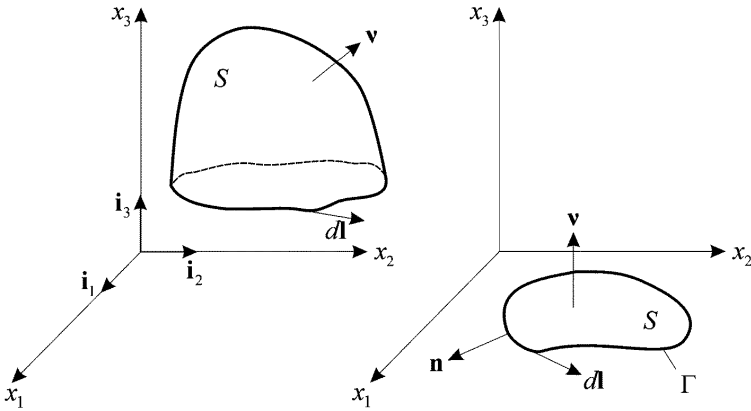


Рисунок 2 – До теореми Стокса

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}) dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (3)$$

де $\mathbf{A} = \{A_1 A_2 A_3\}^T$ – регулярний вектор; $d\mathbf{l} = ldl$ – орієнтований відрізок контуру Γ ; \mathbf{v} – зовнішня по відношенню до S нормаль.

Якщо прийняти $\mathbf{v} = \mathbf{i}_3$, використати символ Леві-Чівіті ϵ_{ijk} , виконати нижче наведені перетворення, то можна привести (3) до теореми про дивергенцію деякого двомірного вектору $\mathbf{B} = \{B_1 B_2 0\}$, де $B_j = \sum_{k=1}^2 \epsilon_{k3j} A_k$:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{i}_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j};$$

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} v_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^2 \epsilon_{k3j} A_k \right) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial B_j}{\partial x_j} = \text{div } \mathbf{B}.$$

$$d\mathbf{l} = (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) dl = \sum_{ijk=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{i}_i v_j n_k dl = \sum_{i,k=1}^2 \epsilon_{i3k} \mathbf{i}_i n_k dl;$$

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i,k=1}^2 \epsilon_{i3k} A_i n_k dl = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^2 \epsilon_{i3k} A_i \right) n_k dl = \sum_{k=1}^2 B_k n_k dl = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dl.$$

Таким чином, для приведеного зв'язку напрямків \mathbf{n} , $d\mathbf{l}$ (рис. 2) теорема про дивергенцію для плоскої області має вигляд

$$\int_S \text{div } \mathbf{B} dS = \oint_L \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dl. \quad (4)$$

3.2 Фундаментальне (сингулярне) рішення рівняння Лапласу. Для рішення задачі Лапласа-Пуассона використовується метод потенціалів та пере-

хід до інтегральних рівнянь. Потенціали будуються використовуючи фундаментальне рішення рівняння $\Delta\Phi(z,x) = \delta(z-x)$:

$$\Phi(z,x) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad (5)$$

де $r = \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2}$.

Це рішення показує розподіл температури в необмеженій двомірній області від зосередженого в точці z елементарного теплового джерела. Характерною особливістю цього рішення є наявність сингулярності в точці z .

3.3 Формалізм методу потенціалу. Висока ступінь абстракції дозволяє надавати чіткість та стрункість результатам досліджень. Тому зручно поставлену крайову задачу (1, 2) замінити еквівалентним операторним рівнянням

$$Au = f, \quad (1)$$

$$u^+(y) \Big|_{y \in \Gamma_1} = f_1(y),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ \Big|_{y \in \Gamma_2} = f_2(y), \quad (2)$$

де $A = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – додатно-визначений оператор, заданий в гільбертовому просторі H і $f, f_1, f_2 \in H$.

Границя Γ двомірної області S є простою замкнутою кривою з неперервними характеристиками.

Звичайно вводять спряжений оператор, чудовою властивістю якого є наступна: при довільних $u, v \in H$ вираз $(vAu - uA^*v)$ представляє собою дивергенцію деякого вектору \mathbf{B} :

$$(vAu - uA^*v) = v\Delta u - u\Delta v = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = \text{div} \mathbf{B},$$

де $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$, $B_i = v \frac{\partial u}{\partial x_i} - u \frac{\partial v}{\partial x_i}$.

В такому разі можливо використати співвідношення про дивергенцію (4), права частина якого прийме вигляд

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \Big|_{y \in \Gamma} = \sum_{i=1}^2 \left(v \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^+ n_i - u^+ \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) n_i \right) = v \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - u^+ \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right).$$

Відповідна формула Гріна для операторного рівняння (1) запишеться так

$$\int_S (vAu - uA^*v) dx = \oint_L \left[v \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - u^+ \left(\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] dl. \quad (6)$$

Якщо прийняти до уваги, що в якості функції $v(x)$ використовується фундаментальне рішення, тобто $v(x) = \Phi(z,x)$ і $z \in S$, тоді формулу (6) потрібно використовувати для області S/S_ε , з якої вилучена сингулярна точка z (рис. 3, а) і виконати граничний перехід при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S/S_\varepsilon} \Phi(z,x) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma \cup \Gamma_\varepsilon} \left[\Phi(z,y) \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right)^+ - u^+(y) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] dy l,$$

де S_ε та Γ_ε – шар та поверхня радіусу ε навколо особливої точки.

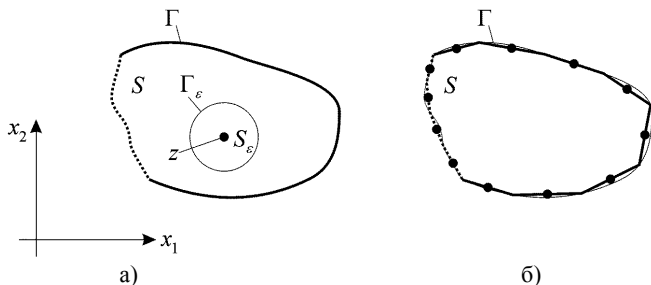


Рисунок 3 – До виводу загальних співвідношень МГР

Якщо врахувати, що потенціали по області та простого шару неперервні, а подвійного шару має стрибок, матимемо основну розрахункову формулу методу потенціалу:

$$K(z)u(z) = \oint_{\Gamma} \left[\Phi(z, y) \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+ - u^+(y) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] d_y l - \int_S \Phi(z, x) f(x) dx, \quad (7)$$

де $K(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d_y l$. Інтеграли в правій частині (7) потрібно розуміти

в сенсі головного значення.

Для точок $z \in S$ коефіцієнт $K(z) = 1$, а для точок z , що належать гладким ділянкам контуру $K(z) = 0,5$. При рішенні практичних задач вимушені зустрічатися з нерегулярністю в геометрії і граничних умовах конструкції, яка проявляється, у вигляді ребер та кутів. В таких випадках величину $K(z)$ потрібно обчислювати у кожному конкретному випадку окремо. Найбільш часто для цього використовуються однорідні рішення задачі.

4 Алгоритм дискретизації інтегрального рівняння. При чисельному рішенні задач спочатку будують граничне інтегральне рівняння (ГІР). Для цього точку z рівняння (7) виносимо на границю тіла ($z \in \Gamma$). В результаті отримаємо інтегральне рівняння, що пов'язує невідомі щільності потенціалів розподілені по границі області. Далі виконується дискретизація рівняння (7). Границя області Γ розбивається на скінченну кількість граничних елементів (ГЕ) (рис. 3, б). В межах кожного призначається певна кількість вузлових точок, наприклад, одна в центрі ГЕ. Невідомі щільності потенціалів $u^+(y)$ і $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+$ на кожному ГЕ апроксимуються функціями заданого виду. Найпростішою такою апроксимацією є апроксимація невідомих постійними значеннями. Якщо тепер послідовно призначати координати точки z відповідним вузловим точкам на ГЕ, то рівняння (7) перейдуть в замкнену систему алгебраїчних рівнянь відносно вузлових щільностей потенціалів на границі:

$$\frac{1}{2}u^+(z_i) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_j^+ \int_{\Gamma_j} \Phi(z_i, y) d_y l - \sum_{j=1}^N u_j^+ \int_{\Gamma_j} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d_y l, \quad (8)$$

де $i = 1, 2, \dots, N$. Рівняння (8) записані для випадку апроксимації невідомих постійними на ГЕ та відсутності внутрішніх джерел тепла ($f(x) = 0$). Коефіцієнти цих рівнянь визначаються значеннями великої кількості інтегралів по контуру від фундаментального рішення задачі.

Зручно записати одержану систему алгебраїчних рівнянь в клітковій матричній формі:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

При цьому використані такі позначення: u_1, u_2 – вектори значень температури $u^+(y)$ в тих вузлових точках, в яких задана температура або тепловий потік відповідно, τ_1, τ_2 – вектори значень теплового потоку $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+$ в тих же точках границі Γ . Порядок системи рівнянь дорівнює N – по кількості вузлових точок, а число невідомих $2N$. Але в коректно поставленій задачі в кожній точці поверхні повинні бути відомими або компоненти u_1 , або τ_2 , тому заключна розрахункова формула буде такою:

$$\begin{bmatrix} m_{12} & -k_{11} \\ \frac{1}{2}E + m_{22} & -k_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \tau_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}E - m_{11} & k_{12} \\ -m_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Вона дозволяє знайти невідомий розподіл температури та теплового потоку на ділянках Γ_2 та Γ_1 відповідно. Це означає рішення граничного інтегрального рівняння і повну інформацію про розподіл $u^+(y)$ та $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^+$ на всій границі тіла. Значення $u(z)$ і (du/dz) у довільній точці S можуть бути визначені за допомогою квадратур по формулі (7).

5 Алгоритм рішення задачі. Чисельне розв'язання поставленої задачі було зроблено за допомогою системи комп'ютерної математики Maple. Для цього був розроблений ряд процедур реалізуючих наведений вище алгоритм.

Щоб виконати розрахунки в Maple потрібно завчасно приготувати геометрію досліджуваної області, для чого зручно використати програму HyperMesh. Завдяки їй користувач може побудувати геометрію та зробити автоматичну триангуляцію розрахункової області. Ця триангуляція і є початковим пунктом роботи алгоритму, тому що її границя використовується для побудови ГЕ, а внутрішня – для наступної візуалізації результатів (рис. 4). Паралельно ця ж розбивка використовується в розрахунках МСЕ для наступного порівняння результатів.

6 Результати рішення задач теплопровідності для модельних задач. В цій роботі розглядаються три модельні задачі – розподілення температури в квадратній та круглій областях, а також розподілення температури у фрагменті гільзи циліндру ДВЗ.

Сторона квадрату прийнята одиничною, також як і коефіцієнт теплопровідності. Крайові умови показані на рис. 5.

Радіус круга взято одиничним, а коефіцієнт теплопровідності рівним 0,5.

Крайові умови для круга показані також на рис. 5.

Ескіз розрізу гільзи наведено на рис. 6. Прийнято, що розподіл температури по довжині гільзи змінюється мало, а також що гільза є циклічно-симетричною з сектором 120° .

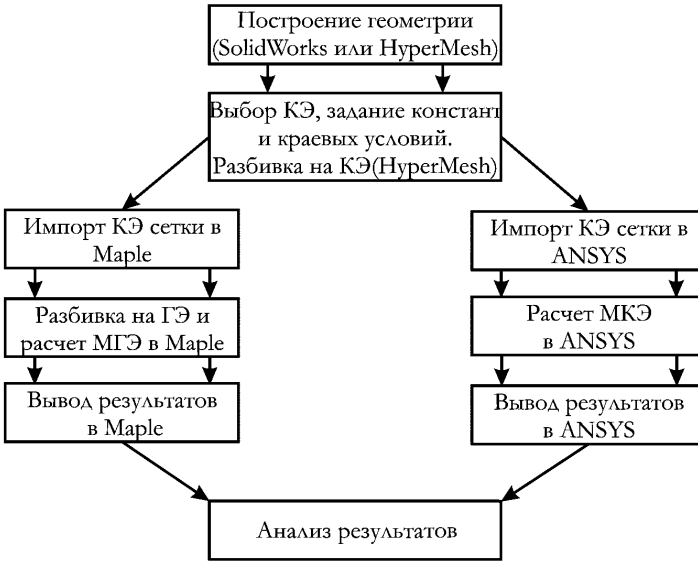


Рисунок 4 – Загальний алгоритм рішення задачі

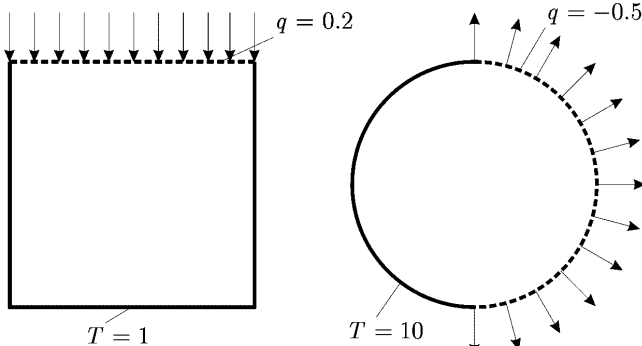


Рисунок 5 – Крайові умови для модельних задач (квадрат та круг)

Тобто, вводяться припущення, щоб була можливою двомірною постановкою задачі. Крайові умови для фрагменту гільзи наведено на рис. 6, а коефіцієнт теплопровідності для матеріалу взято рівним $20,323 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$.

При розрахунках проводиться порівняльна оцінка результатів одержаних двома методами МСЕ та МГП на одній і тій же «грубій» СЕ-сітці.

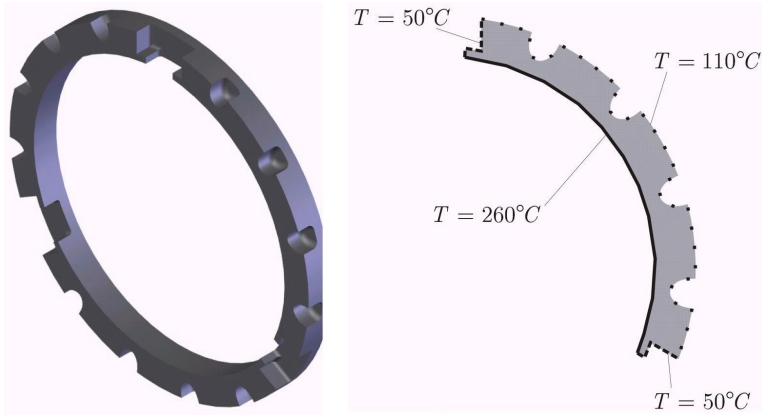


Рисунок 6 – Крайові умови для фрагменту гільзи циліндру ДВЗ

Еталонні рішення цих задач приведені на рис. 7¹ і представляють собою також SE-рішення, але одержані на сітках, розмір яких на порядок перевищує сітки модельних задач.

На рис. 8, а; 9, а та 10, а приведені SE-області розглянутих модельних задач, які були одержані за допомогою програми HyperMesh. Вони включають відповідно 26, 162, 184 скінченних елементи та 20, 95, 141 глобальних вузлових невідомих.

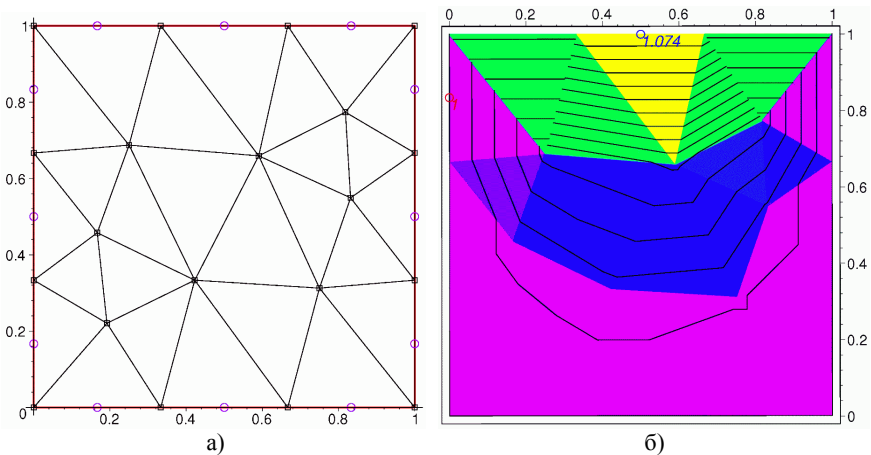


Рисунок 8 – Розрахункова SE сітка (а) та рішення МГР (б) для квадрату

Побудовані SE-моделі були імпортовані в ANSYS та проведені розрахунки температурного поля методом SE. Ці ж сітки моделювання були імпортовані в Maple і використані при рішенні задач методом ГР. Зовнішні грані SE

¹Рис. 7 розміщено на кольоровій вкладці між сторінками 66 і 67.

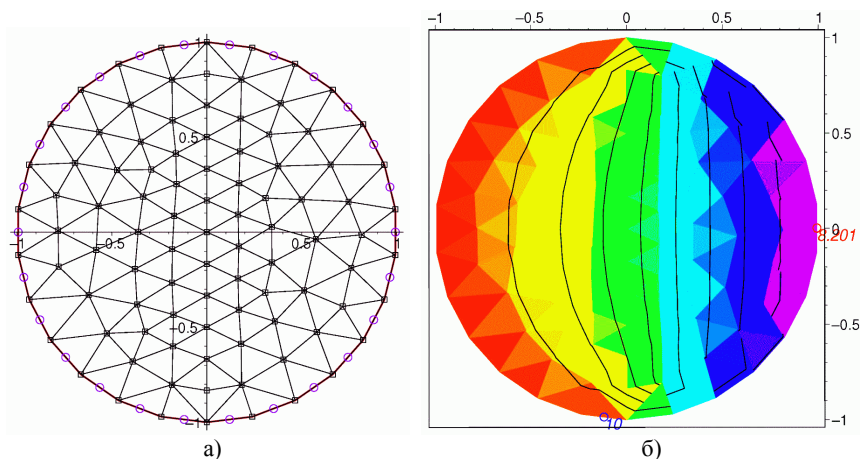


Рисунок 9 – Розрахункова СЕ сітка (а) та рішення МГР (б) для круга

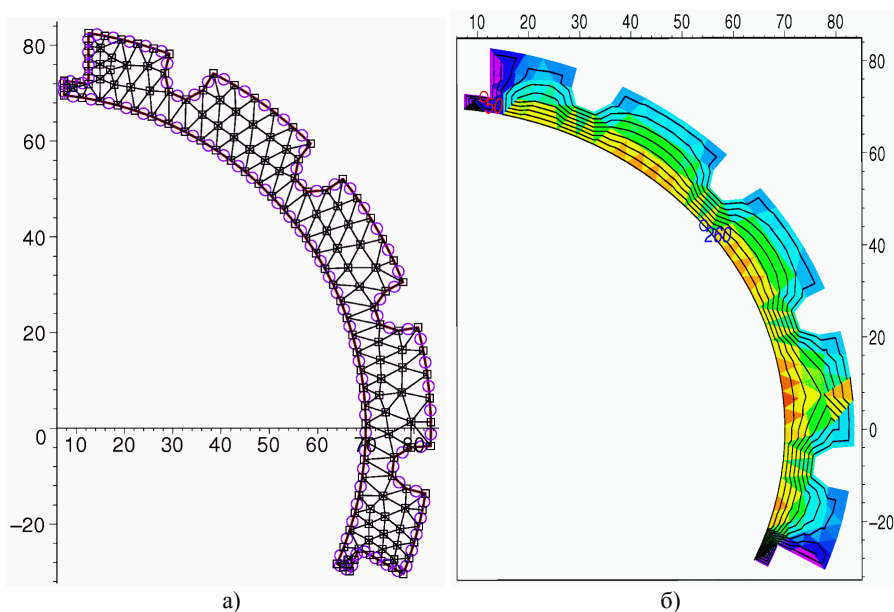


Рисунок 10 – Розрахункова СЕ сітка (а) та рішення МГР (б) для фрагменту гільзи циліндру ДВЗ

розглядалися як лінійні ГЕ. В їх межах температура вважалася постійною, тобто вибиралася одна вузлова точка в центрі ГЕ. Загальна кількість вузлових граничних невідомих була 12, 26 та 86 відповідно.

Результати розподілу полів температур, обчислених МГР, приведені на рис. 8, б, 9, б та 10, б. Причому кількість внутрішніх точок області для МГР

бралася обмеженою і призначалася лише для якісного відображення розподілу температури. Поля температур, одержані МСЕ на грубій сітці адекватні наведеним і не приводяться.

Порівняння чисельних значень виконувалось у вузлових точках граничних елементів. І практично для всіх результати одержані МГІР краще співпадають з еталонним ніж МСЕ. Наприклад, у випадку для квадрату, щоб одержати співпадіння результатів МСЕ з точністю 3-х знаків з рішенням МГІР довелося збільшити кількість СЕ до 340 (з лінійною апроксимацією невідомих).

7. Висновки. В роботі викладені основні положення методики побудови ГІР для класичних рівнянь математичної фізики в частинних похідних, які можуть бути корисними при рішенні практично важливих інженерних задач великого розміру. Розглянуто можливості програмної реалізації алгоритму, побудови геометрії, сітки та візуалізації результатів за допомогою широкодоступних пакетів Maple, HyperMesh, SolidWorks, Ansys.

Виконана реалізація МГІР одного практично важливого типу рівнянь – Пуассона. Результати розрахунків модельних задач відповідають репутації МГІР як вискоєфективного чисельного методу рішення задач механіки.

Список літератури: 1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. 2. Беляев Н.М. Основы теплопередачи:– К.: Вища школа.

Надійшла до редколегії 04.11.2008.