

УДК 539.434

**Ю.Н.ГАЛАГАН; Г.И.ЛЬВОВ**, докт.техн.наук; НТУ «ХПИ», Харьков  
**К.В.НАУМЕНКО**, докт.техн.наук, Университет им. Мартина Лютера,  
Халле, Германия

## **ПОЛЗУЧЕСТЬ И ПОВРЕЖДАЕМОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ**

Розглянута математична модель неізотермічної повзучості для випадку анізотропної пошкоджувальності. Для описання анізотропної поведінки пошкоджуваності використовується тензор 2-го рангу. Введено у розгляд вектори неспіввідповідності між напруженням та деформацією повзучості та швидкістю деформації повзучості для виявлення анізотропної поведінки пошкодження.

A mathematical model of nonisothermic creep for anisotropic damage case is considered. A second range tensor is used for description damage. Vectors of axis misadjustment between stress and creep strain and creep strain rate are considered for the purpose of anisotropic damage behaviour detection.

Сложные виды нагрузки и переменная температура – основные условия работы большинства инженерных конструкций. В результате этого в конструкциях возникает деформация ползучести, сопровождающаяся зарождением и развитием микротрещин, пустот, которые носят название повреждаемости. В общем случае повреждаемость носит анизотропный характер, что требует введения для ее описания тензорной величины.

Для решения задачи ползучести с учетом повреждаемости необходимо записать основные соотношения для скоростей деформации ползучести и повреждаемости и дополнить их экспериментальными данными. В случае изотропной повреждаемости это должны быть эксперименты на одноосное напряженное состояние, а в случае анизотропной повреждаемости – это эксперименты на многоосное напряженное состояние. Недостаточное количество экспериментальных данных на многоосное напряженное состояние, в виду слож-

ности их проведения, сильно затрудняет решение задачи на анизотропную ползучесть с учетом повреждаемости. В настоящее время не существует единой универсальной модели, способной адекватно описывать реальные процессы, протекающие в конструкциях в условиях сложных нагрузок и переменных температур.

**1. Анализ проблемы и постановки задачи ползучести с учетом повреждаемости.** Качановым [1] впервые был введен в рассмотрение, так называемый, параметр сплошности  $\psi$  в следующем виде:

$$\psi = \frac{A_0 - A_\omega}{A_0}, \quad (1)$$

где  $A_0$  – начальное поперечное сечение образца,  $A_\omega$  – поперечное сечение образца с повреждаемостью. Значение параметра сплошности лежит в пределах  $1 \geq \psi \geq 0$ . В случае повреждаемости  $\psi = 0$ , в неповрежденном состоянии  $\psi = 1$ .

Позже данная концепция была расширена введением скалярной величины повреждаемости  $\omega$ :

$$\omega = 1 - \psi, \quad (2)$$

Работнов [2] дополнил данную теорию введением эффективного напряжения, которое учитывает уменьшение площади поперечного сечения, вызванного ростом повреждаемости в случае одноосного напряженного состояния. Таким образом, эффективное напряжение может быть представлено как соотношение приложенной силы  $F$  к эффективной площади  $\tilde{A} = A_0 - A_\omega$ :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} = \frac{F}{A_0(1-\omega)} = \frac{\sigma}{(1-\omega)}. \quad (3)$$

Для постановки задачи ползучести с учетом повреждаемости необходимо записать основные соотношения для скорости деформации ползучести и повреждаемости.

Традиционной моделью для описания изотропной ползучести с учетом повреждаемости является модель Качанова-Работнова-Хэйхерста [13]. Она хорошо подходит для описания поведения материала в случаях одноосного и многоосного напряженных состояний и приемлема для всех трех стадий ползучести. Учет влияния переменной температуры осуществляется с помощью функций Аррениуса (6). В случае многоосного напряженного состояния основные соотношения теории ползучести имеют вид:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^\omega = \frac{3}{2} \cdot \frac{\dot{\epsilon}_{eq}^{cr}}{\sigma_{vM}} S_{ij}; \quad \sigma_{vM} = \left[ \frac{3}{2} S \cdot S \right]^{1/2}; \quad (4)$$

$$\dot{\epsilon}_{eq}^{cr} = A_1(T) H(\epsilon^{cr}) \frac{\sigma_{vM}^n}{(1-\omega)^n};$$

$$\dot{\omega} = B_1(T) \frac{\langle \sigma_{eq}^\omega \rangle^m}{(1-\omega)^l}; \quad (5)$$

$$A_1(T) = A \exp\left(-\frac{Q_\alpha}{R \cdot T}\right); B_1(T) = B \exp\left(-\frac{Q_\beta}{R \cdot T}\right); \quad (6)$$

$$H(\varepsilon^{cr}) = 1 + C \exp\left(-\frac{\varepsilon_{eq}^{cr}}{k}\right), \quad (7)$$

где  $A, B, C, k, l, m, n$  – константы ползучести материала,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\omega}$  – компоненты тензора скорости деформации ползучести ( $i, j = 1, 2, 3$ ),  $S$  и  $S_{ij}$  девиатор напряжений и его компоненты ( $i, j = 1, 2, 3$ ) соответственно,  $\sigma_{eq}^{\omega}$  – эквивалентное напряжение,  $\sigma_1$  – максимальное главное напряжение,  $\alpha$  – весовой коэффициент, описывающий влияние главного напряжения на развитие повреждаемости [4]. Значение данного коэффициента определяется из экспериментальных данных. Функция упрочнения  $H(\varepsilon_{eq}^{\omega})$ , представленная в виде (7), используется для описания первой стадии ползучести.  $Q_\alpha, Q_\beta$  – энергии активации процессов ползучести и повреждаемости соответственно,  $R$  – постоянная Больцмана.

Эквивалентное напряжение, входящее в уравнения (4) и (5), в случае многоосного напряженного состояния, может быть представлено в следующем виде, предложенном Хэйхерстом [6]:

$$\sigma_{eq}^{\omega} = \alpha J_0(\sigma) + 3\beta J_1(\sigma) + (1 - \alpha - \beta) J_2(\sigma) \quad (8)$$

или

$$\sigma_{eq}^{\omega} = \alpha \sigma_1 + 3b\sigma + c\sigma_{eq}, \quad (9)$$

где  $\alpha, \beta, a, b, c$  – некоторые константы,  $J_0, J_1, J_2$  – линейный, квадратичный и кубический инварианты тензора напряжений,  $\sigma_1$  – главное максимальное напряжение,  $\sigma$  – среднее напряжение,  $\sigma_{eq}$  – эквивалентное напряжение по Мизесу. В случае упрощения выражения (8), а именно при  $\beta = 0$ , получаем следующее выражение для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{eq}^{\omega} = \alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_{vM}. \quad (10)$$

Легко заметить, что процесс ползучести с учетом повреждаемости управляется двумя видами напряжений – максимальное главное напряжение и эквивалентное напряжение по Мизесу.

Основные соотношения (4) и (5) должны быть дополнены условием несжимаемости в следующем виде:

$$\langle \sigma_{eq}^{\omega} \rangle = \sigma_{eq}^{\omega} \text{ для } \sigma_{eq}^{\omega} > 0; \langle \sigma_{eq}^{\omega} \rangle = 0 \text{ для } \sigma_{eq}^{\omega} \leq 0. \quad (11)$$

Изотропная ползучесть с учетом повреждаемости может рассматриваться как частный случай анизотропной, и подходит для описания поведения некоторых материалов в условиях простого напряженного состояния. В общем случае, для описания реальных процессов ползучести с учетом повреждаемости, возникающих в конструкциях в условиях сложных нагрузок с переменными температурами, необходимо использование анизотропной модели.

## 2. Анизотропная модель ползучести с учетом повреждаемости. В на-

стоящее время не существует единой феноменологической модели для описания анизотропного поведения ползучести с учетом повреждаемости. Это вызвано ограниченным количеством экспериментальных данных, необходимых для подтверждения существования той или иной модели.

Большинство из существующих моделей анизотропной ползучести с учетом повреждаемости основаны на концепции эффективных напряжений и представлении повреждаемости в виде тензора 2-го, 4-го и в некоторых случаях 8-го порядка [4, 8, 9].

Для избежания трудностей при использовании тензора 4-го ранга, основываясь на экспериментальных данных Мураками и Оно [4] была разработана теория ползучести сплошной среды. Авторы описали повреждаемость с помощью симметричного тензора 2-го ранга. Данный тензор определяет соотношение между нормалью произвольной площадки с поврежденностью и нормалью площадки без поврежденности в случае эффективного напряженного состояния:

$$(I_{ij} - \Omega_{ij})n_i \delta A = \tilde{n}_i \delta \tilde{A}, \quad (12)$$

где  $I$  – единичный тензор 2-го ранга,  $\Omega$  – симметричный тензор повреждаемости 2-го ранга.

Используя диадное разложение:

$$\Omega = \sum_{i=1}^3 \Omega_i n^i \otimes n^i. \quad (13)$$

Использование симметричного тензора повреждаемости необходимо для сохранения симметрии тензора действующих напряжений.

Мураками и Оно [4] была предложена следующая интерпретация тензора эффективных напряжений:

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma \cdot \Phi + \Phi \cdot \sigma), \text{ где } \Phi = [1 - \Omega]^{-1}. \quad (14)$$

В частном случае, когда главные направления тензоров напряжения и повреждаемости совпадают, компоненты действующего тензора напряжений принимают вид:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1}{1 - \Omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{1 - \Omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{1 - \Omega_3} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Результаты металлографических исследований материалов [4, 5] показывают, что пустоты, вызванные ползучестью с повреждаемостью, развиваются в основном на границах зерен перпендикулярно главных растягивающим напряжениям. Таким образом, используя предположение, что скорость образования пустот управляется величиной эффективного напряжения и развитие пустот

происходит на площадках перпендикулярных направлению максимального растягивающего эффективного напряжения  $\sigma_1$ , имеем следующие соотношения, аналогично выражениям (10) и (11):

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}^{\Omega} &= \alpha \sigma_1 + (1 - \alpha) \sigma_{vM}, \\ \langle \sigma_{eq}^{\Omega} \rangle &= \sigma_{eq}^{\Omega} \text{ для } \sigma_{eq}^{\Omega} > 0; \langle \sigma_{eq}^{\Omega} \rangle = 0 \text{ для } \sigma_{eq}^{\Omega} \leq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Моделирование процесса накопления повреждаемости для различных материалов – основная задача в решении проблемы анизотропной ползучести с учетом повреждаемости.

Рассмотрим модель описания развития анизотропной повреждаемости, предложенную Мураками и Оно [4]:

$$\dot{\Omega} = B_1 \langle \sigma_{eq}^{\Omega} \rangle^k [n_1 \cdot \Phi \cdot n_1]' n_1 \otimes n_1, \quad (17)$$

где  $n_1$  – главное направление, которое соответствует первому главному напряжению  $\sigma_1$ .

С целью лучшего согласования экспериментальных и теоретических результатов теми же авторами было предложено ввести модифицированный тензор напряжений, который в неповрежденном состоянии должен совпадать с (14):

$$\hat{\sigma} = \alpha_s \sigma + \frac{1}{2} \beta_s (\sigma \cdot \Phi + \Phi \cdot \sigma) + \frac{1}{2} (1 - \alpha_s - \beta_s) (\sigma \cdot \Phi^2 + \Phi^2 \cdot \sigma), \quad (18)$$

где  $\alpha_s, \beta_s$  – константы материала. Выражение (18) основывается на предположении, что в рассматриваемом материале, исследуемая часть поврежденной площади сечения мала.

Основные соотношения для скоростей деформации ползучести и повреждаемости с учетом модифицированного тензора напряжений (18) можно представить в виде:

$$\dot{\epsilon}^{cr} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_{eq}^{cr}}{\hat{\sigma}_{vM}} \hat{S}; \dot{\epsilon}_{eq}^{cr} = A_1 (\hat{\sigma}_{vM})^n; \hat{\sigma}_{vM} = \left[ \frac{3}{2} \hat{S} \cdot \hat{S} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

где  $\hat{S}$  – девиаторная часть тензора напряжений.

Определяющие соотношения (17) и (19) должны быть дополнены экспериментальными данными на ползучесть материалов при многоосном напряженном состоянии, необходимыми для определения констант ползучести, входящих в данные соотношения.

**3. Вектор несоосности между напряжением и деформацией.** Для решения проблемы анизотропной ползучести с учетом повреждаемости необходимо иметь экспериментальные данные при сложном нагружении, например, непропорциональном. Но даже при наличии таких данных достаточно сложно создать модель, приемлемую для описания поведения повреждаемости, возникающей в конструкциях, работающих в условиях сложных нагрузок и переменной температуре.

Рассмотрим один из возможных способов выявления анизотропии повре-

ждаемости, возникающей в материале, в частности, при двухосном напряженном состоянии.

При многоосном напряженном состоянии основные соотношения ползучести могут быть представлены в виде, предложенном в [11].

На рис. 1 представлена тонкостенная труба, находящаяся под воздействием растягивающей силы  $F$  и крутящего момента  $M$ . Тензоры деформации ползучести, скорости деформации ползучести и напряжения могут быть представлены в виде:

$$\varepsilon^{cr} = \frac{3}{2}(\varepsilon_L - \frac{1}{E}\sigma)(k \otimes k - \frac{1}{3}I) + \frac{1}{2}(\gamma - \frac{2(1+\nu)}{E}\tau)(k \otimes e_\varphi + e_\varphi \otimes k); \quad (20)$$

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = \frac{3}{2}\dot{\varepsilon}_L(k \otimes k - \frac{1}{3}I) + \frac{1}{2}\dot{\gamma}(k \otimes e_\varphi + e_\varphi \otimes k); \quad (21)$$

$$\sigma = \sigma k \otimes k + \tau(e_\varphi \otimes k + k \otimes e_\varphi), \quad (22)$$

где  $e_r, e_\varphi, k$  – базис в цилиндрических координатах.

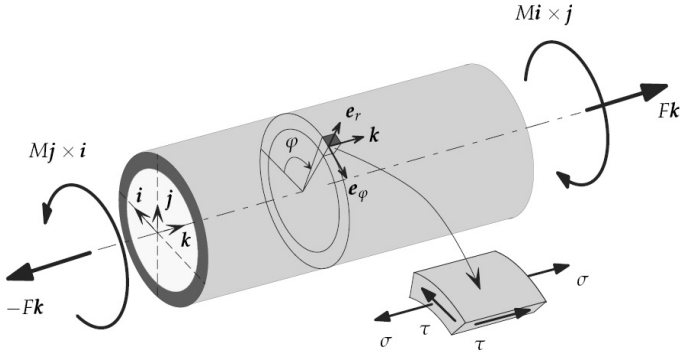


Рисунок 1 – Тонкостенная труба при двухосном напряженном состоянии

Эквивалентные скорость деформации ползучести и напряжение по Мизесу:

$$\dot{\varepsilon}_{vM} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_L^2 + \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2}; \quad \sigma_{vM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (23)$$

В двумерном пространстве главных напряжений и скоростей деформаций можно построить вектора с компонентами  $(\sigma_1, \sigma_2)$ ,  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . В случае изотропной повреждаемости эти вектора должны иметь одинаковое направление. При анизотропии повреждаемости появится несоосность. Введем в рассмотрение так называемый вектор несоосности. Запишем векторное произведение между следующими парами векторов: между напряжением и деформацией ползучести (24), напряжением и скоростью деформации ползучести (25):

$$(\sigma \cdot \dot{\varepsilon}^{cr}) = \frac{3}{2}\tau \cdot \dot{\varepsilon}_L - \frac{1}{2}\sigma \cdot \dot{\gamma}; \quad (24)$$

$$(\sigma \cdot \varepsilon^{cr}) = \frac{3}{2} \tau \cdot \varepsilon_L - \frac{1}{2} \sigma \cdot \gamma. \quad (25)$$

Таким образом, вектор несоосности может быть представлен в виде:

$$V_{(\sigma, \varepsilon)} = \frac{(\sigma \cdot \varepsilon^{cr})}{\dot{\varepsilon}_{vM} \cdot \sigma_{vM}}. \quad (26)$$

Вычислив соотношение (26), мы, фактически, получим синус угла между вектором главных напряжений и вектором скорости деформации ползучести, и, таким образом, сможем сделать вывод о том наводится ли анизотропия, и если да, то в каком направлении она проявляется.

Формула (26) была применена для обработки экспериментальных данных, представленных в работе [4]. Имелись экспериментальные кривые ползучести медного образца при двухосном напряженном состоянии:  $\sigma = 41,4$  МПа и  $\tau = 11,9$  МПа. В момент времени  $t = 480$  ч. происходила смена главного направления  $\tau$  на углы, равные  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$  С. Полученные экспериментальные кривые ползучести были обработаны с помощью математического пакета Mathcad и были построены соответствующие вектора несоосности. На рис. 2 представлен вектор несоосности для случая, когда главное направление  $\tau$  в момент времени  $t = 480$  ч. было изменено на  $30^\circ$  С. Из рис. 2 видно, что анизотропия наводится и максимальное значение вектора несоосности составляет около 0,67. Данное значение не совпадает со значением синуса угла  $30^\circ$  С, ввиду погрешности, возникающей при обработке экспериментальных кривых.

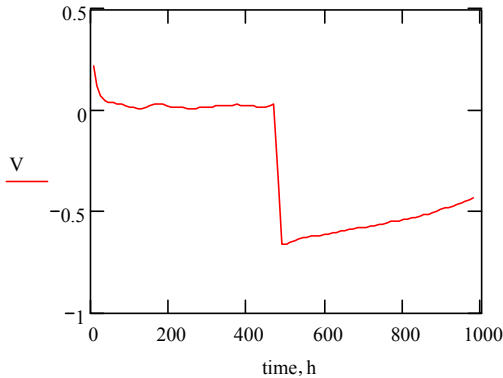


Рисунок 2 – Вектор несоосности между напряжением и скоростью деформации ползучести

Изложенный выше алгоритм требует доработки и проверки на большем количестве экспериментальных данных, но все же он может служить основой для создания методики, позволяющей обрабатывать экспериментальные кривые ползучести при многосном напряженном состоянии и предсказывать характер развития повреждаемости.

**Выводы.** В настоящее время не существует единой универсальной модели описания анизотропной ползучести с учетом повреждаемости. Основной проблемой является ограниченное количество экспериментальных данных, способных подтвердить ту или иную модель, а также метода обработки имеющихся экспериментальных данных. Представленная методика может служить основой при создании алгоритма обработки экспериментальных данных и может служить основой для создания модели, позволяющей предсказывать возникновение анизотропии повреждаемости и ее направленности.

**Список литературы:** 1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР., Отд. Тех. Наук. – 1958. – С. 26-31. 2. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций, АН СССР. – 1959. – С. 5-7. 3. Hayhurst D.R. Computational Continuum Damage Mechanics: its use in the prediction of creep fracture in structures – past, present and future. In: Murakami, S., Ohno, N., (eds.) // IUTAM Symposium on Creep in Structures. – Dordrecht, Kluwer, 2001. – P. 175-188. 4. Murakami S. and Ohno N. A continuum theory of creep and creep damage. In: Ponter, A.R.S. and Hayhurst, D.R. (eds.) // Creep in Structures. – Berlin: Springer, 1981. – P. 422-444. 5. Murakami S. and Sanomura Y. Creep and Creep damage of copper under multi-axial states of stress. In: Sawzuk, A., Bianchi, B., (eds) // Plasticity Today - Modelling, Methods and Applications. – Elsevier, London, New York, 1985. – P. 535-551. 6. Hayhurst D.R. Creep rupture under multi-axial states of stress // J. Mech. Phys. Solids. – Vol. 20. – 1972. – P. 381-390. 7. Hayhurst D.R. and Leckie F.E. High temperature creep continuum damage in metals. In: Boehler, J.P. (ed.) // Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids. Mechanical Engineering Publ. – London. – 1990. – P. 445-464. 8. Chaboche J.L. Continuum damage mechanics: part II–damage growth, crack initiation, and crack growth // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 55. – 1988. – P. 65-71. 9. Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. – Berlin: Springer, 1992. 10. Betten J. Creep damage and life analysis of anisotropic materials // Archive of Applied Mechanics 71. – Springer-Verlag, 2001. – P. 78-88. 11. Naumenko K. and Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. – Berlin et al.: Springer-Verlag, 2007. 12. Holdsworth S.R. and Merckling G. ECCC Developments in the Assessment of Creep-Rupture Properties // ECCC Creep International Conference, IMechE, London, 2004. – P. 1-11. 13. Leckie F.A. and Hayhurst D.R. Constitutive equations for creep rupture // Acta Metall. – 25. – 1977. – P. 1059-1070. 14. Altenbach H. Creep and damage in materials and structures // CISM Courses and Lectures. – No. 399. – Wein/New York: Springer, 1999. 15. Altenbach H., Huang C.-X., Naumenko K. Creep-damage predictions in thin-walled structures by use of isotropic and anisotropic damage models // Jnl. Strain Analysis. – Vol. 37, no. 3. – 2002. – P. 265-275. 16. Becker A.A., Hyde T.H., Xia L. Numerical analysis in creep in components // Jnl. of strain analysis. – Vol. 29, no. 3, IMechE, 1994. – P. 185-192. 17. Gorash E., Lvov G., Harder J., Kostenko Y. and Wieghardt K. Comparative analysis of the creep behaviour in power plant component using different material models, in Creep & Fracture in High Temperature Components: Design & Life Assessment Issues (Shibli I.A., Holdsworth S.R., and Merckling G, eds.) // Proc. Of the ECCC Creep Conf., (London, UK). – P. 573-581, ECCC, DESTech Publications, Inc., Sept. 2005. 18. Kostenko Y., Lvov G., Gorash E., Altenbach H. and Naumenko K. Power plant component design using creep-damage analysis // In Proc. of Int. Mech. Eng. Conf. & Exp. "IMECE-2006", no.13710 in IMECE, (Chicago, USA), ASME, Nov. 2006. – P. 1-10. 19. Qi W. and Brocks W. Simulation of anisotropic creep damage in engineering components // European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering ECCOMAS, Barcelona, 2000. – P. 1-14.

Поступила в редакцию 27.11.2008