

УДК 539.3

А.В.ВОРОПАЙ, канд.техн.наук; ХНАДУ, Харьков

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ С ПРИСОЕДИНЕННОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-обпертої по контуру та зосередженої маси, що лежить на пластині. На пластину діє нестационарне зосереджене навантаження. Викладаються результати розв'язку прямої та оберненої задачі. Розрахунки зводяться до аналізу інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, які розв'язуються чисельно з використанням метода регуляризації А. М. Тихонова.

Mechanical system consists of hingedly supported medium-thickness rectangular plate and concentrated mass, which is lying on the plate. The non-stationary concentrated load is acting on the plate. The results of solution for direct and inverse problems are presented. The problems are reduced to the first-kind Volterra integral equations, which are solved numerically by Tikhonov's regularization method.

Введение. Реальные механические системы, как правило, – сложные объекты, которые могут иметь множество малых контактирующих тел. При построении математической модели рассматривают основной механический объект (балка, пластина или оболочка), а остальными, зачастую, пренебрегают. В динамических системах дополнительное влияние оказывают силы инерции, вызванные малыми телами, у которых могут быть относительно высокие ускорения (особенно при нестационарных колебани-

ях). Силы инерции можно учитывать с помощью присоединенных масс (сосредоточенных или распределенных). В области прямых задач имеются научные работы, относящиеся к такому подходу, например, в монографии [1] рассматривается воздействие подвижной массы на балки и тонкую прямоугольную пластину лежащую на упругом основании. Обратные задачи такого направления мало изучены.

1. Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно опертой по ее периметру и сосредоточенной массы, лежащей на ее верхней лицевой поверхности (рис. 1). На пластину воздействует поперечная сосредоточенная импульсная нагрузка, вызывающая нестационарные колебания пластины и массы.

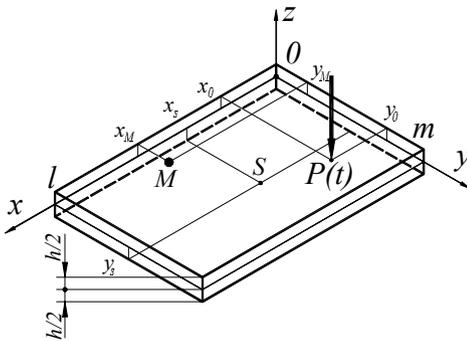


Рисунок 1 – Схема нагружения

Под прямой задачей понимается определение зависимости компонент перемещения во времени при известной возмущающей нагрузке и сосредоточенной массе.

Под обратной задачей – идентификация неизвестного закона изменения во времени нестационарной нагрузки по изменениям прогиба пластины в некоторой ее точке.

2. Решение прямой задачи. В рамках теории пластин С.П.Тимошенко представим следующую систему дифференциальных уравнений аналогичную [2], которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с учетом сосредоточенной массы M :

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + R(x, y, t); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2} [(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1+\nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}, \\ M \frac{d^2 w(x_M, y_M, t)}{dt^2} = R(x_M, y_M, t) \end{array} \right. \quad (1)$$

где h – толщина пластины; $G' = k'G$; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; w –

перемещение срединной плоскости пластины; ψ_x, ψ_y – углы поворота нормали к срединной плоскости пластины вдоль осей Ox и Oy ; ρ, E, ν – плотность и упругие постоянные материала пластины; t – время, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$;

$$\Phi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \quad \psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Укажем, что $P(x, y, t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная), а $R(x, y, t) = \delta(x - x_M) \cdot \delta(y - y_M) \cdot R(x_M, y_M, t)$ – воздействие сосредоточенной массы M .

Систему дифференциальных уравнений (1) в предположении нулевых начальных условий решаем посредством разложения искомого функций w_0, ψ_x, ψ_y в двойные ряды Фурье согласно рассмотренной схеме опирания по тригонометрическим функциям. Воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой выполняется прямое интегральное преобразование Лапласа, в пространстве изображений находятся искомые коэффициенты разложения; производится обратное преобразование Лапласа. В результате получаем следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_x(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^{\Psi x}(x, y, t - \tau) d\tau; \\ \psi_y(x, y, t) &= \int_0^t P(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^{\Psi y}(x, y, t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где $K_i(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток):

$$\begin{aligned} K_i^W(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t, \\ K_i^{\Psi x}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \lambda_k^*}{\Delta_{kn}} \cdot \cos \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}, \\ K_i^{\Psi y}(x, y, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn} \cdot b \cdot \mu_n^*}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \frac{\sin \omega_{pkn} t}{\omega_{pkn}}, \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$C_{ikn} = \frac{1}{\rho h} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m}, \quad a = \frac{G'}{\rho}, \quad b = \frac{G' h}{\rho \cdot J}, \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J},$$

$$\lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}, \quad \mu_n^* = \pi \frac{n}{m}, \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right),$$

$$\Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4}; \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b) - \Delta_{kn}]};$$

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2 (a+d) + b) + \Delta_{kn}]};$$

$$\Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

Для точки (x_M, y_M) можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} w(x_M, y_M, t) = \int_0^t R(\tau) \frac{t-\tau}{M} d\tau, \\ w(x_M, y_M, t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t-\tau) d\tau, \end{cases}$$

которая может быть преобразована к следующему интегральному уравнению типа Вольтерра 1 рода при известной правой части:

$$\int_0^t R(\tau) \left[K_R(t-\tau) + \frac{t-\tau}{M} \right] d\tau = \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

В матричном виде уравнение (2) можно записать:

$$\mathbf{A}_R \mathbf{R} = \mathbf{A}_P \mathbf{P},$$

где \mathbf{R} – неизвестный вектор, вектор \mathbf{P} – соответствует функции $P(t)$, матрицы \mathbf{A}_R и \mathbf{A}_P отвечают соответствующим ядрам уравнения (3).

Так как рассматриваемая задача является некорректной, решение интегрального уравнения осуществляется с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [3] (РА Тихонова).

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Принимались следующие параметры: $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7890$ кг/м³; $h = 0,04$ м; $l = 0,6$ м; $m = 0,4$ м; $x_0 = 0,4$ м; $y_0 = 0,3$ м – координаты точки нагружения; $x_M = 0,2$ м; $y_M = 0,2$ м – координаты сосредоточенной массы; $x_S = 0,3$ м; $y_S = 0,1$ м – координаты датчика; число членов в соответствующих двойных рядах Фурье 50×50 .

При определении неизвестного вектора \mathbf{R} , согласно РА Тихонова параметр регуляризации α определялся на основе минимизации α по двух функционалов, графики которых приведены на рис. 2. Отметим, что кривой 1 соответствовал функционал $M1^\alpha[R] = \|A_R R(\alpha) - A_P P\|$, который естественно вытекает из (3), а кривой 2 – функционал $M2^\alpha[R] = \|R(\alpha)\|$ – ограничение искомой функции $R(t)$.

Из рис. 2 видно, что параметр регуляризации следует брать в диапазоне $\alpha = 10^{-31} \div 10^{-30}$. На рис. 3 показано известное изменение сосредоточенной нагрузки $P(t)$ – кривая 1 и определенные $R(t)$ – кривые 2.

После определения функции $R(t)$ на основе соотношений (2) можно определить прогибы, а также любые другие параметры напряженно-деформированного состояния в любой точке пластины.

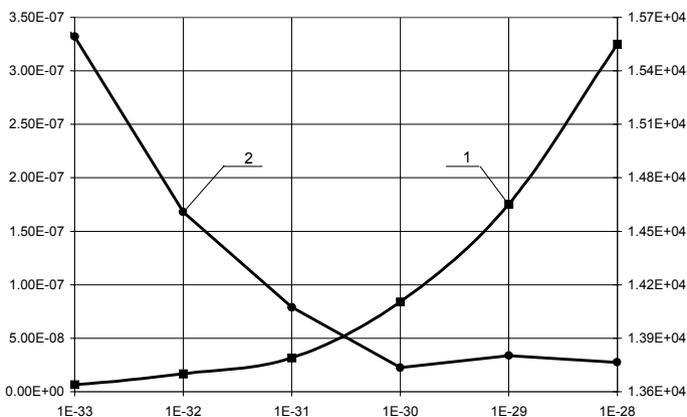


Рисунок 2 – Определение параметра регуляризации

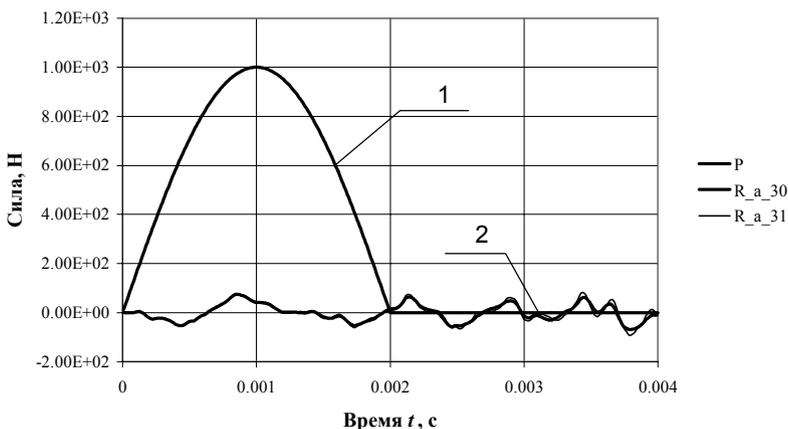


Рисунок 3 – Определение реакции сосредоточенной массы

3. Решение обратной задачи. В случае, если известно изменение прогиба в некоторой точке S пластины $w(x_S, y_S, t)$, координаты и величина сосредоточенной массы M , а требуется определить неизвестный закон изменения во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ – задача сводится к решению системы двух интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В матричном виде эту систему можно записать так:

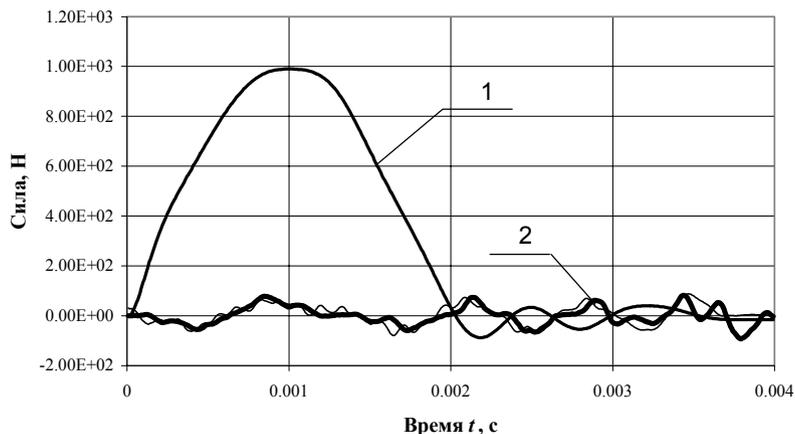
$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Блочная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (4) решается с использованием обобщенного алгоритма (Гаусса или Крамера), а также РА Тихонова. Более подробное решение таких СЛАУ описано, например, в [4].

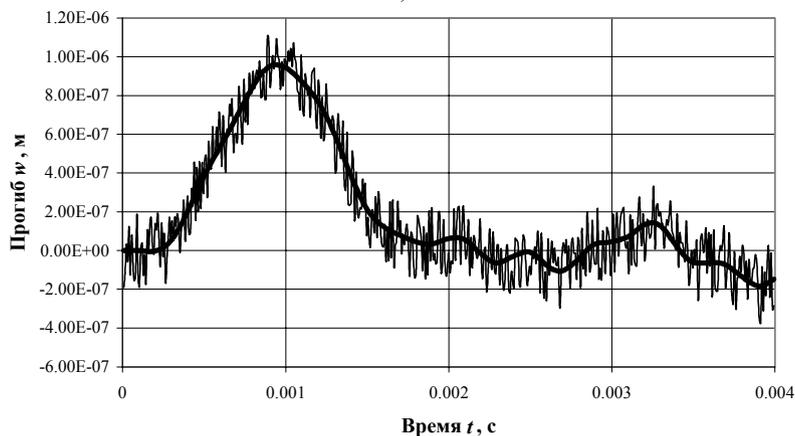
Вычислительные эксперименты по идентификации неизвестной возму-

щающей нагрузки (сосредоточенной силы) и силы взаимодействия между массой и пластиной приведены на рис. 4, а. Кривая 1 на рис. 4, а соответствует определенной при решении (4) функции $P(t)$; кривые 2 – изменение $R(t)$ (жирная кривая – решение прямой задачи, тонкая – идентифицированная функция).

В качестве исходных данных для идентификации использовалось вышеописанное решение прямой задачи – изменение прогиба пластины (жирная кривая на рис. 4, б). Для моделирования погрешностей, возникающих при проведении реальных экспериментов, на исходные данные был наложен «шум» с уровнем до 20 % (тонкая кривая на рис. 4, б).



а)



б)

Рисунок 4 – Идентификация неизвестной нагрузки

Выводы. На основе представленных результатов (рис.4 а) можно сделать вывод о том, что описанное решение задачи идентификации, на основе возму-

щенных данных для пластин с сосредоточенными массами является эффективным и устойчивым к погрешностям. Возможность учета сосредоточенных масс является важным элементом, улучшающим соответствие модели реальным механическим системам.

Список литературы: 1. *Кохманюк С.С., Янютин Е.Г., Романенко Л.Г.* Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка, 1980. – 232 с. 2. *Григолоук Э.И., Селезов И.Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – Москва: ВИНТИ, 1973 – 272 с. 3. *Тихонов А.Н., Гончаровский А.В.* и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с. 4. *Воропай А.В., Янютин Е.Г.* Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину // Прикладная механика. – 2007. – 43. – №7. – С. 90-97.

Поступила в редколлегию 17.10.2008