

*Г.Ю.МАРТЫНЕНКО*, канд.техн.наук, доцент, НТУ «ХПИ»

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО  
ПОВЕДЕНИЯ РОТОРА В МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ  
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПРИНЯТЫХ УПРОЩЕНИЙ.  
ЧАСТЬ 1. ЖЕСТКИЙ РОТОР**

У роботі запропоновано формування математичної моделі ротора в магнітних підшипниках різних типів. Моделювання проводиться на основі диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду і рівнянь Максвелла, наведено і обґрунтовано варіанти математичних моделей, які записані при різних припущеннях і обмеженнях.

In work, forming of mathematical model of rotor on magnetic bearings of different types is offered. The design on the basis of Lagrange differential equations the second kind and equations of Maxwell is performed. There are represented and grounded variants of mathematical models in the work. The models are written down for different suppositions and limitations.

**Введение.** Магнитный подвес роторов является все чаще применяемым в настоящее время типом опор роторных машин различного назначения: от малогабаритных, таких, как электрошпиндель, до больших – роторов турбокомпрессоров газоперекачивающих станций и турбин атомных электростанций.

К основным, часто используемым типам магнитных подшипников (МП), относятся МП на постоянных магнитах (МППМ), электромагнитные резонансные подшипники, активные магнитные подшипники (АМП) и другие. Каждый из них обладает своими достоинствами и недостатками, но по функциональным особенностям все они близки к упруго-демпферным опорам [1]. Динамическое поведение, характерное роторам на упруго-демпферных опорах (УДО), свойственно и роторам в магнитных подшипниках, но с некоторыми оговорками, а в некоторых случаях и с существенными отличиями в связи с особенностями механического взаимодействия между магнитными полями.

Однако основные принципы описания динамики роторов на УДО [2, 3] могут быть использованы и для роторов на магнитных подшипниках. Для них также характерно разделение на жесткие и гибкие ротора, докритические и закритические из-за зависимости форм колебаний ротора от податливости опор, которые показаны на рис. 1. При жестких опорах первой критической скорости соответствует изгибаемая форма колебаний (рис. 1, в). При податливых в достаточной мере по сравнению с ротором опорах он проходит первые две или три (при учете колебаний в осевом направлении) критические скорости как жесткий, образуя цилиндрическую и коническую прецессии (рис. 1, а). Но при этом ротор является закритическим. При жесткости опор, сопоставимой с жесткостью самого ротора, формы колебаний представляют собой среднее между предыдущими случаями (рис. 1б). В этом случае не учитывать

деформируемость вала при исследовании первых двух критических режимов некорректно. Кроме того, из-за особенностей колебаний роторов на податливых опорах (как УДО, так и МП) следует отметить, что колебания являются поперечными, но не всегда изгибными.

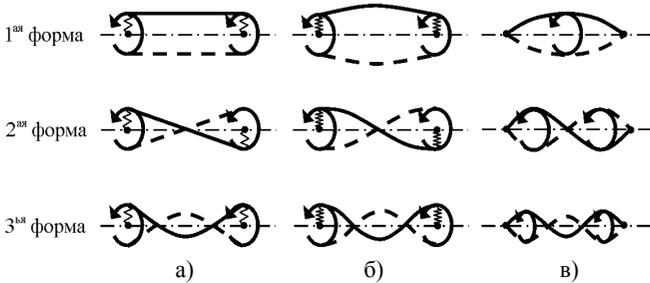


Рисунок 1. Формы поперечных колебаний роторов в зависимости от податливости опор: а) ротор на чрезвычайно податливых опорах, б) податливых, в) жестких

Наиболее распространенными и представляющими большую опасность при эксплуатации являются вынужденные колебания, обусловленные статической и моментной неуравновешенностями, а также другие виды колебаний, такие, как автоколебания. Свойства роторов на упругих опорах позволяют снизить амплитуды этих колебаний вследствие проявления эффекта самоцентрирования после прохождения первых двух критических скоростей. Для более эффективного использования этого эффекта на практике, т.е. снижения порога зоны повышенных вибраций, сужения данной зоны и уменьшения амплитуд необходимо уменьшение жесткости динамической системы ротор–опоры, так чтобы первые две критические скорости располагались на частотах вращения более низких, чем рабочие. При этом необходимо обеспечить условия для легкого перехода через них, например, с помощью применения способа прохождения резонансов за счет управления жесткостью и демпфирующими свойствами магнитных подшипников [1].

Однако проявление некоторых резонансных режимов роторов в АМП существенно отличается по своей природе от традиционных упруго-демпферных механических опор. Так, изгибные колебания ротора в АМП могут возникать не только при его вращении, но и в невращающемся состоянии, что связано с частотой среза управляемого подвеса ротора и потерей устойчивости подвеса по соответствующей форме из-за энергетической подпитки упругих колебаний вследствие непредвиденной положительной обратной связи в подвесе [4, 5].

Таким образом, для численного исследования динамики роторов в магнитных подшипниках могут быть использованы математические модели, записанные аналогично соответствующим моделям роторов в УДО, но с учетом специфики, проявляющейся во взаимодействии магнитных, электромаг-

нитных и электрических полей, и сил, вызванных этим взаимодействием.

**1. Направление исследований (постановка задачи).** Математическому описанию динамики жестких и гибких роторов в механических УДО посвящено множество монографий и публикаций [2-3, 6-10]. Всем математическим моделям присущи вносимые авторами упрощения на основании принятых допущений, такие, как ограничение количества и малость обобщенных координат, неучет или неполный учет нелинейных членов уравнений и параметров неуравновешенности, неучет гироскопических моментов, внутреннего трения, нелинейной инерционности и т.д. Для описания гибких роторов используется либо теория изгиба Тимошенко, которая учитывает деформации сдвига, либо техническая теория изгиба, при использовании которой деформациями сдвига пренебрегают.

Для подавляющего большинства математических моделей роторов в АМП, известных из литературы, характерно то, что описание динамики сводится к линеаризации дифференциальных уравнений движения и уравнений, описывающих электромагнитные процессы в системе, которые записываются на основании второго закона Кирхгофа [4-5, 11-13]. Нелинейные модели практически не используются ввиду основного акцента при исследованиях на выбор и совершенствование систем и алгоритмов управления. Отсутствует также взаимосвязь между радиальными и осевыми смещениями. Математическое моделирование роторов в МППМ на основании уравнений движения практически не применяется, основная литература посвящена либо экспериментальным исследованиям [14-15], либо конечноэлементным расчетам различных конструктивных вариантов магнитных подшипников [16-18].

Анализ источников позволяет сделать некоторые выводы о недостатках применяемых на сегодняшний день математических моделей динамики роторов в магнитных подшипниках, в частности, АМП. Так, численные эксперименты для выявления динамических свойств системы «ротор в АМП» выполняются на основании линеаризации уравнений движения и уравнений для токов [4, 5, 11, 12, 19-21]. При этом, с одной стороны, учитываются особенности действия управляемых магнитных сил, создаваемых электромагнитами, на объект управления (ротор), а с другой – линеаризованные уравнения не позволяют адекватно передать процессы при нахождении системы в предельных режимах, таких, как насыщение магнитной цепи, нулевой ток или нулевой зазор, а также не дают возможности отобразить другие характерные для такой системы нелинейности. Если же в математической модели электромагнитными уравнениями пренебрегают, а действия электромагнитов на ротор заменяются пусть даже нелинейными, но относительно только механических обобщенных координат силами, которые в некотором приближении заменяют магнитные, то неадекватность моделей будет обусловлена неучетом особенностей электромагнитных процессов, например, постоянной времени изменения токов в обмотках электромагнитов из-за большой индуктив-

ности.

Целью данной работы является математическое описание динамического поведения ротора в магнитном, электромагнитном или комбинированном подвесе с адекватным отражением нелинейной взаимосвязи происходящих в такой системе процессов (электрических, магнитных и механических), а также систематизация и определение возможных вариантов записи уравнений колебаний с сохранением нелинейных слагаемых разных порядков малости в сопоставлении с порядком слагаемых в функциях, описывающих восстанавливающие магнитные (пондеромоторные) силы.

**2. Описание роторов в МП как динамических электромагнитомеханических систем.** В данной работе рассматривается ротор в магнитных подшипниках различных типов (МППМ, АМП) в плане описания его динамического поведения, как в случае рассмотрения его как твердого тела (жесткий ротор – Часть 1), так и в случае учета его деформируемости (гибкий ротор – Часть 2).

Одним из вариантов вывода уравнений движения для механической системы является использование уравнений Лагранжа второго рода относительно независимых обобщенных механических координат [22, 23 с. 26]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_r} = Q_r \quad (r = 1, \dots, M), \quad (1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия;  $\Pi$  – потенциальная энергия;  $q_r$  – обобщенные механические координаты;  $Q_r$  – непотенциальные обобщенные силы;  $\mathfrak{R}$  – диссипативная функция;  $M$  – число обобщенных механических координат.

В случае электромеханических систем они описываются уравнениями Лагранжа–Максвелла, имеющими структуру уравнений механики [23, 24]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial(T + \tilde{W})}{\partial q_r} + \frac{\partial(\Pi + V)}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_r} = Q_r, & (r = 1, \dots, M) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{i}_k} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial i_k} - \frac{\partial V}{\partial \chi_k} = E_k, & (k = 1, \dots, N) \end{cases} \quad (2)$$

где  $\tilde{W}$  – коэнергия магнитного поля [5 стр. 53, 25];  $V$  – энергия электрического поля;  $\tilde{\Psi}$  – электрическая диссипативная функция;  $E_k$  – алгебраическая сумма сторонних электродвижущих сил;  $i_k$  – контурные токи;  $\chi_k$  – заряды конденсаторов;  $N$  – число замкнутых неразветвленных контуров, причем:

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N i_k i_s \int \frac{1}{\mu} B_k B_s dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N L_{ks} i_k i_s; \quad (3)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \chi_k^2 \int_{\Omega_k} \varepsilon E_k^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\chi_k^2}{C_k}; \quad (4)$$

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^N R_{ks} i_k i_s, \quad (5)$$

где  $B_k$  – магнитные индукции магнитных цепей;  $L_{ks}$  – коэффициенты индукции электромагнитных цепей;  $\varepsilon$  – диэлектрическая постоянная;  $C_k$  – емкости конденсаторов;  $R_{ks}$  – активные сопротивления.

В случае, когда токи проводимости замкнуты и в электрических ветвях отсутствуют конденсаторы, электромеханические системы, кроме уравнений Лагранжа–Максвелла (2), могут описываться уравнениями, аналогичными уравнениям Рауса в механике [23, 24]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_r} = -\frac{\partial W}{\partial q_r} + Q_r, & (r = 1, \dots, M) \\ \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \sum_{s=1}^N R_{Cks} \frac{\partial W}{\partial \Psi_s} = E_k, & (k = 1, \dots, N) \end{cases} \quad (6)$$

где  $W$  – энергия магнитного поля [5 стр. 53, 25];  $\Psi_k$  – потоки индукции (потокосцепления), причем:

$$\begin{aligned} W &= W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, q_1, \dots, q_M); \quad \Psi_k = \frac{\partial W}{\partial i_k} = \sum_{s=1}^N L_{ks} i_s; \\ i_s &= \frac{\partial W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, q_1, \dots, q_M)}{\partial \Psi_s} = \sum_{k=1}^N L_{ks}^{-1} \Psi_k \quad (s = 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $L_{ks} = L_{ks}(q_1, \dots, q_M)$  – коэффициенты само- и взаимной индукции контуров;  $L_{ks}^{-1}$  – элементы матрицы обратной матрице с коэффициентами  $L_{ks}$  [24].

В уравнениях (6) члены  $-\partial W/\partial q_r$  есть пондеромоторные силы, то есть обобщенные силы, обусловленные механическим воздействием магнитного или электромагнитного поля [24]. Эти силы могут быть определены дифференцированием по обобщенным механическим координатам функции магнитной энергии, полученной с использованием эквивалентных схем замещения электромагнитных цепей магнитных подшипников [5, 26, 27].

Другим способом определения пондеромоторных сил является их вычисление по тензору напряжений Максвелла на основе конечно-элементного анализа электромагнитных полей, как для МППМ [28], так и для АМП [29]. В этом случае силы являются функциями обобщенных механических координат в отличие от первого варианта, где они зависят еще и от токов управления или потокосцеплений. Тогда математическая модель системы «ротор в МП» будет ограничена только уравнениями (1) с найденными силами в правой части, а закон управления АМП, то есть закон изменения токов в обмотках электромагнитов будет учтен на этапе конечноэлементного расчета. Но тогда модель не будет отображать электромагнитные процессы в полной мере.

Еще один способ определения магнитных сил – использование для постоянных магнитов МППМ токовых моделей [30]. В них магниты представляются как распределения эквивалентных токов. Для решения применяются стандартные методы анализа электрических цепей постоянных токов.

Если ротор находится в комбинированном пассивно-активном полном магнитном подвесе, то для описания его динамики может быть использован один из перечисленных подходов, либо их некоторая комбинация.

### 3. Математическое моделирование колебаний жесткого ротора в МП. 3.1. Постановка задачи и нелинейные уравнения движения, описывающие колебания твердых тел в потенциальном поле сил.

В общем случае колебания твердых тел характеризуются нелинейной связанностью обобщенных координат [24]. На начальном этапе многие задачи о колебаниях тел рассматриваются на основе применения теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Однако представление линейной теории колебаний твердых тел не всегда адекватно отображает процессы, происходящие в системе. Наличие нелинейных связей при сочетании некоторых условий может привести к перераспределению энергии колебаний между обобщенными координатами механической системы. Тогда динамическое поведение твердого тела, в данном случае ротора, может существенно отличаться от моделируемого на основе линейного подхода, т.е. колебания могут иметь совершенно другие качественные и количественные закономерности в зависимости от величины перераспределения энергии.

При рассмотрении колебаний твердых тел, находящихся в потенциальном поле сил (гравитации, упругих сил и т.д.), считают, что перемещения  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  центра масс тела относительно осей неподвижной системы координат  $Oxyz$  и углы поворота  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$  не малы, но такие, что в уравнениях движения с приемлемой точностью могут быть сохранены только члены не выше третьего порядка относительно обобщенных координат и их производных. Тогда уравнения колебательного движения твердого тела независимо от характера потенциального поля и внешних сил имеют вид [24]:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_0 + f'_1(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_1(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_1(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = H_x(t) \\ m\ddot{y}_0 + f'_2(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_2(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_2(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = H_y(t) \\ m\ddot{z}_0 + f'_3(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_3(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_3(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = H_z(t) \\ J_1\ddot{\psi} + f'_4(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_4(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_4(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\psi(t) \\ J_2\ddot{\vartheta} + f'_5(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_5(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_5(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\vartheta(t) \\ J_3\ddot{\varphi} + f'_6(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \dot{\varphi}, \ddot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f''_6(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f'''_6(x_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\varphi(t) \end{cases} \quad (8)$$

где  $m$  – масса тела (ротора);  $J_1, J_2, J_3$  – моменты инерции тела относительно его главных центральных осей;  $f'_i, f''_i, f'''_i (i=1..6)$  – функции первой, второй и третьей степеней относительно обобщенных координат и их производных (отражают соответственно линейные и нелинейные силы и моменты, обусловленные силами инерции и потенциального поля);  $H(t), M(t)$  – внешние возмущающие силы и моменты, зависящие от времени.

Таковую же структуру будут иметь и уравнения колебаний твердого тела,

которое находится в потенциальном поле упругих сил.

Если рассматривается жесткий ротор в упругих опорах, в нашем случае магнитных подшипниках, то на него при колебаниях будут действовать реакции упругих пружин и силы сопротивления движению, внешние возмущающие силы и моменты, зависящие от времени. В этом случае уравнения колебательного движения тела относительно неподвижной системы координат с удержанием величин до третьего порядка малости относительно обобщенных координат и их производных имеют вид [23 с. 54, 24 с. 266]:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_0 + b_1\dot{x}_0 + c_1x_0 + f_1''(x_0, \dots, \varphi) + f_1'''(x_0, \dots, \varphi) = H_x(t) \\ m\ddot{y}_0 + b_2\dot{y}_0 + c_2y_0 + f_2''(x_0, \dots, \varphi) + f_2'''(x_0, \dots, \varphi) = H_y(t) \\ m\ddot{z}_0 + b_3\dot{z}_0 + c_3z_0 + f_3''(x_0, \dots, \varphi) + f_3'''(x_0, \dots, \varphi) = H_z(t) \\ J_1\ddot{\psi} + b_4\dot{\psi} + c_4\psi + f_4''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f_4'''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\psi(t) \\ J_2\ddot{\vartheta} + b_5\dot{\vartheta} + c_5\vartheta + f_5''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f_5'''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\vartheta(t) \\ J_3\ddot{\varphi} + b_6\dot{\varphi} + c_6\varphi + f_6''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + f_6'''(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) = M_\varphi(t) \end{cases} \quad (9)$$

где  $c_i$  – коэффициенты, которые определяются упругой системой;  $b_i$  – коэффициенты, которые характеризуют сопротивление относительно движению, рассматриваемого твердого тела – жесткого ротора.

Принимая во внимание предположения о малости обобщенных координат и их производных, нелинейные члены уравнения (9) можно считать малыми по сравнению с линейными членами. Полагая также силы сопротивления движению малыми и вводя малый параметр  $\nu$  ( $\nu > 0$ ), уравнения (9) можно представить в квазинормальной форме [23 с. 54, 24 с. 266]:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \lambda_1^2 x_0 = -\nu \tilde{f}_1(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0) + H_x(t)/m \\ \ddot{y}_0 + \lambda_2^2 y_0 = -\nu \tilde{f}_2(x_0, \dots, \varphi, \dot{y}_0) + H_y(t)/m \\ \ddot{z}_0 + \lambda_3^2 z_0 = -\nu \tilde{f}_3(x_0, \dots, \varphi, \dot{z}_0) + H_z(t)/m \\ \ddot{\psi} + \lambda_4^2 \psi = -\nu \tilde{f}_4(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + M_\psi(t)/m \\ \ddot{\vartheta} + \lambda_5^2 \vartheta = -\nu \tilde{f}_5(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + M_\vartheta(t)/m \\ \ddot{\varphi} + \lambda_6^2 \varphi = -\nu \tilde{f}_6(x_0, \dots, \varphi, \dot{x}_0, \dots, \ddot{\varphi}) + M_\varphi(t)/m \end{cases} \quad (10)$$

где  $\tilde{f}_i$  – модифицированные функции второй и третьей степени относительно обобщенных координат и их производных;  $\lambda_1^2 = c_1 / m, \dots, \lambda_6^2 = c_6 / J_3$ .

Дальнейший анализ колебаний любого твердого тела, в том числе и жесткого ротора, математически моделируемых уравнениями (10), предполагает решение двух задач. Первая из них заключается в определении условий возникновения пространственных нелинейных колебаний и сводится к исследованию устойчивости некоторых резонансных вынужденных периодических или почти периодических режимов колебаний. Вторая связана с иссле-

дованием резонансных характеристик пространственных колебаний и сводится к построению решений для этих режимов колебаний, а также к изучению их устойчивости в областях неустойчивости равновесных состояний.

**3.2. Расчетная схема жесткого ротора в магнитных подшипниках.** В большинстве случаев в моделях используются линеаризованные уравнения, в которых сохраняются члены первого порядка относительно обобщенных координат и их производных [2-6]. Однако рассматриваемой системе присуще проявление нелинейных эффектов [31]. Поэтому при получении уравнений движения ротора в МП необходимо учесть практику описания нелинейных колебаний роторов в механических нелинейных опорах [7-10, 24, 32].

Рассмотрим ротор с диском общей массой  $m$  и центром инерции (масс) в точке  $C$ , который представлен на рис. 2.

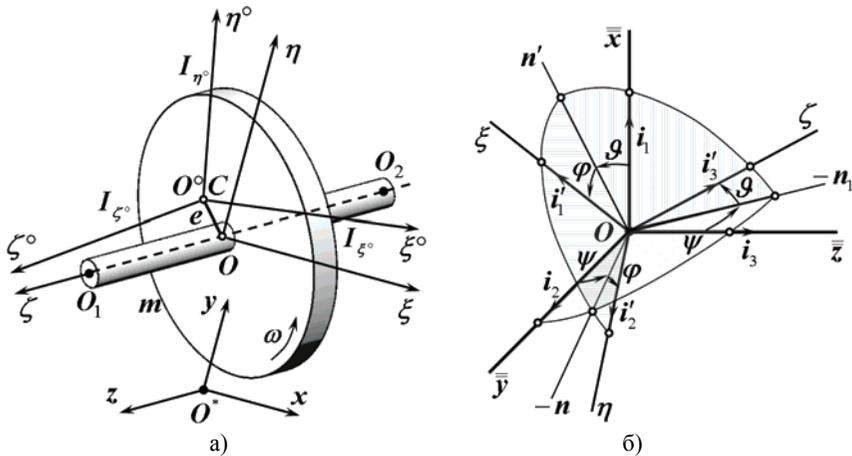


Рисунок 2 – Пространственная расчетная схема: а) модель вращающегося абсолютно жесткого ротора, б) системы координат и углы Эйлера (самолетные)

Пусть ротор соединяется с диском в точке  $O$ , лежащей на его оси жесткости. Введем три правые прямоугольные системы координат (рис. 2, а):

1)  $O^*xyz$  – неподвижная система, ось  $O^*z$  которой проходит через центры опор ротора (радиальных магнитных подшипников);

2)  $O\xi\eta\zeta$  – подвижная система, связанная с ротором, ось  $O\zeta$  которой совпадает с геометрической продольной осью (осью вращения), две другие оси  $O\xi$  и  $O\eta$  совпадают с направлениями главных центральных осей жесткости ротора в месте соединения с диском;

3)  $O^\circ\xi^\circ\eta^\circ\zeta^\circ$  – система главных центральных осей ротора с центром  $O^\circ$  в точке  $C$  и с главными центральными моментами инерции  $J_{\xi^\circ}$ ,  $J_{\eta^\circ}$  (экваториальные) и  $J_{\zeta^\circ}$  (полярный).

Расположение осей инерции  $O^\circ\xi^\circ\eta^\circ\zeta^\circ$  относительно осей жесткости

$O\check{\zeta}\eta\check{\zeta}$  определяется параметрами динамической неуровновешенности – линейными  $e_{\check{\zeta}}, e_{\eta}$  (статическая неуровновешенность) и угловыми  $\gamma_{\check{\zeta}}, \gamma_{\eta}$  (моментная неуровновешенность).

Положение твердого тела (в случае жесткого ротора) или диска (в случае невесомого упругого вала) может быть определено с помощью двух систем координат – инерциальной (неподвижной) системы  $O^*xyz$  и подвижной системы  $O\check{\zeta}\eta\check{\zeta}$ . Размещение подвижной системы по отношению к неподвижной определяется координатами  $x_0, y_0, z_0$  ее полюса  $O$  (или радиус вектором  $r_0 = \overrightarrow{O^*O}$ ) и углами, определяющими положение  $O\check{\zeta}\eta\check{\zeta}$  по отношению к  $O^*xyz$ . В качестве этих углов могут использоваться углы Эйлера (прецессии, нутации и чистого вращения) [22-23]. Угол нутации всегда остается малым, а углы прецессии и собственного вращения могут изменяться в широких пределах, хотя их алгебраическая сумма является малой величиной. Однако в допущении малости отклонений ротора от положения равновесия все углы кроме угла собственного вращения малы. Тогда вместо классических углов Эйлера могут быть использованы самолетные или корабельные углы Эйлера, но только система самолетных осей является правой, что соответствует принятым для ротора системам координат (рис. 2, а).

Введем систему самолетных осей и углов (рис. 2, б) [22-23]. Здесь подвижная система координат  $O\overline{\overline{x}}\overline{\overline{y}}\overline{\overline{z}}$  имеет начало в полюсе  $O$ , а оси параллельны соответствующим осям неподвижной системы координат  $O^*xyz$ . За основные оси примем  $O\check{\zeta}$  и  $O\overline{\overline{x}}$ . Проектируя  $O\check{\zeta}$  на основную плоскость  $O\overline{\overline{y}}\overline{\overline{z}}$ , строим вектор  $-n_1$ , расположенный в той же плоскости вектор  $n$  так, что  $i_1, n, n_1$  образуют ортонормированный правый триэдр (рис. 2, б). Вектор  $n'$  расположен по проекции  $i_1$  на основную плоскость  $O\check{\zeta}\eta$  (его проще всего разыскать, построив направление, перпендикулярное к  $i'_1$  в плоскости основных осей  $O\check{\zeta}$  и  $O\overline{\overline{x}}$ ; в ней же расположен и вектор  $n_1$ ).

Углы  $\psi, \vartheta, \varphi$  имеют названия рысканья, тангажа и крена соответственно. Они характеризуют повороты ротора вокруг осей  $O\overline{\overline{x}}, O\check{\zeta}$  и  $On$ , где  $n$  – единичный вектор, который определяет положительное направление линии узлов. Угол  $\psi$  – угол между  $O\overline{\overline{z}}$  и  $-n_1$ , отсчитываемый вокруг  $O\overline{\overline{x}}$ ;  $\vartheta$  – угол между  $-n_1$  и  $i'_3$ , отсчитываемый вокруг  $-n$ ;  $\varphi$  – угол между  $n'$  и  $O\check{\zeta}$ , отсчитываемый вокруг  $O\check{\zeta}$ , при рассмотрении в качестве твердого тела – ротора он может также считаться углом собственного вращения [22 с. 47-48].

Положительным направлением поворота в правой системе координат считается поворот против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси, вокруг которой производится поворот:  $O\overline{\overline{x}}, -n$  и  $O\check{\zeta}$  (см. рис. 2). Направляющие косинусы для введенных самолетных углов, характеризующие взаимосвязь подвижной и неподвижной систем координат, представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Косинусы самолетных углов

$\alpha$	$\xi$	$\eta$	$\zeta$
$\bar{x} (x)$	$\cos \vartheta \cos \varphi$	$-\cos \vartheta \sin \varphi$	$\sin \vartheta$
$\bar{y} (y)$	$\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi \sin \vartheta$	$\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \sin \vartheta$	$-\sin \psi \cos \vartheta$
$\bar{z} (z)$	$\sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \vartheta$	$\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \vartheta$	$\cos \psi \cos \vartheta$

**3.4. Нахождение сил инерции.** Кинетическая энергия жесткого ротора, как и любого другого твердого тела, положение которого определяется двумя системами координат  $O^*xyz$  и  $O\xi\eta\zeta$ , имеет вид [23 с. 21-22]:

$$T = \frac{1}{2} \left[ mv_0^2 + 2m(v_0 \times \omega) \cdot r'_C + \omega \Theta^0 \omega \right], \quad (11)$$

где  $v_0$  – скорость полюса  $O$ ;  $\omega$  – угловая скорость тела;  $r'_C$  – радиус-вектор  $\overrightarrow{OC}$  (или  $\overrightarrow{OO^0}$ ) центра инерции тела в системе подвижных осей, имеющих начало в полюсе  $O$ ;  $\Theta^0$  – тензор инерции тела в этой точке.

За обобщенные координаты  $q_0$  твердого тела, в данном случае ротора с диском, могут быть приняты координаты  $x_0, y_0, z_0$  полюса  $O$  и углы Эйлера  $\psi, \vartheta, \varphi$ , а обобщенными скоростями являются первые производные этих величин по времени. Тогда через них могут быть выражены проекции угловой скорости тела  $\omega$  на связанные с телом оси  $O\xi\eta\zeta$  [22 с. 22, 23 с.20]:

$$\begin{cases} \omega_\xi = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_\eta = \dot{\theta} \cos \varphi - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \varphi \\ \omega_\zeta = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \vartheta \end{cases} \quad (12)$$

и проекции на эти же оси проекции вектора скорости  $v_0$  полюса  $O$ :

$$\begin{cases} v_{0\xi} = \dot{x}_0 \alpha_{11} + \dot{y}_0 \alpha_{12} + \dot{z}_0 \alpha_{13} \\ v_{0\eta} = \dot{x}_0 \alpha_{21} + \dot{y}_0 \alpha_{22} + \dot{z}_0 \alpha_{23} \\ v_{0\zeta} = \dot{x}_0 \alpha_{31} + \dot{y}_0 \alpha_{32} + \dot{z}_0 \alpha_{33} \end{cases} \quad (13)$$

причем:

$$\begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \quad \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} + \alpha_{13}\alpha_{23} = 0 \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1, \quad \alpha_{21}\alpha_{31} + \alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \quad \alpha_{31}\alpha_{11} + \alpha_{32}\alpha_{12} + \alpha_{33}\alpha_{13} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Проекции радиус-вектор  $r'_C$  на те же, связанные с ротором, оси:

$$r'_{C\xi} = e_\xi, \quad r'_{C\eta} = e_\eta, \quad r'_{C\zeta} = 0. \quad (15)$$

Тензор инерции ротора с диском в полюсе  $O$ :

$$\Theta^0 = \begin{pmatrix} J_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\eta\xi} & J_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\zeta\xi} & -J_{\zeta\eta} & J_\zeta \end{pmatrix}, \quad \text{причем} \quad \begin{cases} \Theta_{12}^0 = \Theta_{21}^0 \\ \Theta_{13}^0 = \Theta_{31}^0 \\ \Theta_{23}^0 = \Theta_{32}^0 \end{cases} \quad (16)$$

где диагональные члены представляют собой моменты инерции относительно осей, а недиагональные – центробежные моменты инерции.

Используя соотношения для выражения моментов инерции ротора с диском относительно одних осей ( $O\zeta\eta\zeta$ ) через известные моменты инерции относительно других осей ( $O^\circ\xi^\circ\eta^\circ\zeta^\circ$ ) с учетом смещения на  $e_\xi$ ,  $e_\eta$  и поворота на  $\gamma_\xi$ ,  $\gamma_\eta$  [33 с. 20-21], получим для осевых моментов инерции:

$$\begin{cases} J_\xi = (J_{\xi^\circ} + me_\eta^2) \cos^2 \gamma_\eta \\ J_\eta = (J_{\eta^\circ} + me_\xi^2) \cos^2 \gamma_\xi \\ J_\zeta = J_{\zeta^\circ} + m(e_\xi^2 + e_\eta^2) \end{cases} \quad (17)$$

и для центробежных моментов инерции:

$$\begin{cases} J_{\eta\zeta} = -\frac{1}{2}(J_{\eta^\circ} - J_{\zeta^\circ}) \sin 2\gamma_\xi + J_{\eta^\circ\zeta^\circ} \cos 2\gamma_\xi \\ J_{\xi\zeta} = -\frac{1}{2}(J_{\xi^\circ} - J_{\zeta^\circ}) \sin(-2\gamma_\eta) + J_{\xi^\circ\zeta^\circ} \cos(-2\gamma_\eta) \\ J_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(J_{\xi^\circ} - J_{\eta^\circ}) \sin 2\gamma_\zeta + J_{\xi^\circ\eta^\circ} \cos 2\gamma_\zeta \end{cases} \quad (18)$$

В формулах (18)  $J_{\xi^\circ\eta^\circ} = J_{\xi^\circ\zeta^\circ} = J_{\eta^\circ\zeta^\circ} = 0$ , так как центробежные моменты инерции относительно главных центральных осей равны 0; угол  $\gamma_\eta$  принимается отрицательным, так как положительным направлением поворота считается от оси  $\zeta$  к  $\xi$  (см. рис. 2, б); а угол между осями  $\zeta^\circ$  и  $\zeta - \gamma_\zeta \approx 0$ .

Принимая предположения о малости параметров неуравновешенности и пренебрегая бесконечно малыми членами вторых и выше порядков, можно прийти к упрощенной записи тензора инерции ротора в точке  $O$ :

$$\Theta^0 = \begin{pmatrix} J_{\xi^\circ} & 0 & -\gamma_\eta (J_{\xi^\circ} - J_{\zeta^\circ}) \\ 0 & J_{\eta^\circ} & \gamma_\xi (J_{\eta^\circ} - J_{\zeta^\circ}) \\ -\gamma_\eta (J_{\xi^\circ} - J_{\zeta^\circ}) & \gamma_\xi (J_{\eta^\circ} - J_{\zeta^\circ}) & J_{\zeta^\circ} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

**3.5. Неинерционные силы, действующие на жесткий ротор в магнитных подшипниках.** Колебательные движения жесткого ротора возникают в результате взаимодействия сил инерции с учетом гироскопического момента, сил потенциального поля, сил сопротивления движению и внешних сил.

Силы и моменты инерции ротора могут быть достаточно подробно описаны левыми частями уравнений (1) при подстановке в них (11)-(13), (15)-(18), причем структура этих нелинейных сил инерции весьма сложна.

При построении обобщенной силовой функции нелинейных потенциальных сил  $U$  или потенциальной энергии  $\Pi$  нужно учитывать характер решаемой задачи, а также то, что для корректного описания нелинейных колебаний необходимо, чтобы структура нелинейных сил поля была адекватна структуре нелинейных сил инерции (как, например, при решении задачи о линейных колебаниях достаточно в качестве силовой функции выбрать выражение потенциальной энергии в виде однородной квадратичной формы).

Структура нелинейных сил инерции описывается сложными тригонометрическими выражениями с нелинейной взаимосвязью между всеми шестью обобщенными координатами и их производными, для которых невозможно разделение переменных. Однако для получения решения с приемлемой точностью уравнения движения могут быть приведены к квазилинейному виду, и тогда использование приближенных методов анализа систем с малой нелинейностью позволит исследовать основные эффекты нелинейных колебаний ротора в магнитных подшипниках, в том числе нелинейные резонансы.

Для перевода уравнений движения в квазилинейный вид можно воспользоваться разложением тригонометрических функций в степенные ряды [34]:

$$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \dots; \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots, \quad (20)$$

с удержанием в уравнениях движения членов, которые содержат обобщенные координаты и члены второго и третьего порядков относительно них, а также первые и вторые производные указанных величин по времени.

В этом случае для соблюдения адекватности силовая функция и потенциальная энергия ротора с диском должны быть представлены в виде:

$$\Pi = -U(x_0, y_0, z_0, \psi, \vartheta, \varphi) = -(U' + U'' + U''' + U''''), \quad (21)$$

где  $U', U'', U''', U''''$  – формы силовой функции, содержащие члены первой, второй, третьей и четвертой степеней относительно обобщенных координат.

Тогда выражения потенциальных сил соответственно будут содержать члены первой, второй, третьей степеней относительно координат, а значит, инерционные и потенциальные силы будут адекватно представлены в уравнениях движения жесткого ротора в магнитных подшипниках:

$$Q_{Pr} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_{0r}}, \quad (r = 1, \dots, M). \quad (22)$$

Силами сопротивления называют силы, зависящие только от скоростей точек механической системы, если их мощность при движении системы не равна тождественно нулю. К таким силам, например, не относятся гироскопические силы, также зависящие от скоростей точек механической системы, однако мощность которых тождественно равна нулю при движении системы. Взятая с обратным знаком обобщенная сила сопротивления определяет характеристику силы сопротивления [24 с. 14-17].

В основном силы сопротивления описываются нелинейными функциями скоростей, но в практических расчетах ввиду малого влияния сил сопротивления на некоторые колебательные свойства и процессы они могут быть линеаризованы, а сопротивление может считаться линейно-вязким. При вычислении же амплитуд вынужденных колебаний вдали от резонанса силами трения часто можно пренебрегать. В свою очередь нелинейность сил сопро-

тивления необходимо учитывать при анализе свободных затухающих колебаний, при вычислении резонансных амплитуд вынужденных колебаний, при нахождении стационарных режимов автоколебаний и конечных амплитуд колебаний при параметрическом резонансе, а также при исследовании переходных процессов в автоколебательных системах. Если силы сопротивления совершают отрицательную работу и вызывают рассеивание (диссипацию) механической энергии, то они называются диссипативными.

К силам сопротивления относят: силы трения в подвижных соединениях машин и механизмов, силы конструкционного трения в «неподвижных» соединениях (прессовых, заклепочных, болтовых и т. п.), связанные с микропроскальзываниями в зонах контакта при нагружении системы, а также силы внутреннего трения в материале элементов системы и силы сопротивления среды, возникающие при движении тела в газе или жидкости и др.

Силы сопротивления сложной природы для целей анализа часто заменяют эквивалентным вязким сопротивлением, которое определяется из требований, чтобы это сопротивление вызывало такое же рассеивание энергии за один цикл, что и реальная сила сопротивления [35 с. 69-92].

Тогда для задания сил сопротивления необходимо выбрать одну из двух гипотез, наиболее подходящую к описанию нашей системы. Первая гипотеза предполагает, что твердое тело движется в сопротивляющейся среде, реакции которой пропорциональны скоростям линейных и угловых перемещений тела, а вторая – что силы сопротивления действуют сосредоточенно на отдельные точки твердого тела и пропорциональны скоростям движения именно этих точек. Коэффициенты пропорциональности в этих случаях могут быть заданы как известные параметры, характеризующие элементы системы, или определены из экспериментов [24]. Для ротора на магнитных подшипниках более адекватного отображения реального поведения можно добиться использованием второй из перечисленных гипотез, так как пондеромоторные силы и силы сопротивления действуют локально только в местах опирания.

Учитывая вышесказанное, можно ввести диссипативную функцию либо в виде нелинейной зависимости от скоростей обобщенных координат:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\phi}), \quad (23)$$

либо как квадратичную форму обобщенных скоростей:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^M b_{rs} \dot{q}_{0r} \dot{q}_{0s}, \quad \dot{q}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0, \dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\phi}), \quad (24)$$

либо как однородную квадратичную форму обобщенных скоростей:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} (b_{x_0} \dot{x}_0^2 + b_{y_0} \dot{y}_0^2 + b_{z_0} \dot{z}_0^2 + b_{\psi} \dot{\psi}^2 + b_{\vartheta} \dot{\vartheta}^2 + b_{\phi} \dot{\phi}^2), \quad (25)$$

Тогда частные производные от диссипативной функции по обобщенным скоростям дадут компоненты сил сопротивления:

$$Q_{\text{др}r} = - \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \dot{q}_{0r}}, \quad (r = 1, \dots, M). \quad (26)$$

Внешние силы и моменты, соответствующие каждой из обобщенных координат, являются величинами, явно зависящими от времени.

**3.6. Линеаризованные уравнения движения жесткого ротора в магнитных подшипниках.** В большинстве случаев для роторов, вращающихся вокруг оси  $O\zeta$  (рис. 2) со скоростью  $\dot{\varphi}$ , скорости поворотов вокруг двух других осей существенно меньше, то есть  $\dot{\psi} \ll \dot{\varphi}$ ,  $\dot{\vartheta} \ll \dot{\varphi}$ . То же самое касается и самих углов  $\psi \ll \varphi$ ,  $\vartheta \ll \varphi$ , причем углы  $\psi, \vartheta$  можно считать малыми. Кроме того, примем, что перемещения ротора  $\xi, \eta, \zeta$  и линейные параметры неуравновешенности  $e_\xi, e_\eta$  малы и имеют такой же порядок малости, как и зазор в подшипниках  $\delta$ , а углы поворота  $\psi, \vartheta$  и угловые параметры неуравновешенности  $\gamma_\xi, \gamma_\eta$  одного порядка малости с максимально возможным исходя из геометрических ограничений углом поворота ротора  $2\delta/l$ , где  $l$  – расстояние между радиальными опорными участками ротора. Тогда в выражениях (20) можно ограничиться только первыми членами, и справедлива замена  $\sin \psi = \psi$ ,  $\cos \psi = 1$ ,  $\sin \vartheta = \vartheta$ ,  $\cos \vartheta = 1$ . При анализе поперечных и продольных колебаний роторов движение вокруг продольной оси не рассматривается и принимается  $\dot{\varphi} = \omega = \text{const}$ ,  $\varphi = \omega t$ .

Линеаризация уравнения движения может быть осуществлена при пренебрежении в них величинами второго и более высоких порядков относительно обобщенных координат и их производных.

Учитывая принятые положения, подставляя (12), (13), (15), (19) в (11), а (11), (21) и (25) в первые  $M$  уравнений из (6), вводя значения параметров  $J_{\xi^0} = J_{\eta^0} = J_e$ ,  $J_{\zeta^0} = J_p$ ,  $e_\xi = e_1$ ,  $e_\eta = e_2$ ,  $\gamma_\xi = \gamma_1$ ,  $\gamma_\eta = \gamma_2$  и удерживая члены первого порядка малости относительно обобщенных координат и их производных, приходим к линеаризованным уравнениям движения ротора в магнитных подшипниках, известным в литературе [6 с. 130-187]. Они представляют собой систему 5 линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно 5 обобщенных координат, так как крутильные колебания вокруг продольной оси, как было оговорено выше, не рассматриваются:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_0 + b_{x_0}\dot{x}_0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_0} - \frac{\partial W}{\partial x_0} + Q_{x_0} + m\omega^2(e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t), \\ m\ddot{y}_0 + b_{y_0}\dot{y}_0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_0} - \frac{\partial W}{\partial y_0} + Q_{y_0} + m\omega^2(e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t), \\ m\ddot{z}_0 + b_{z_0}\dot{z}_0 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_0} - \frac{\partial W}{\partial z_0} + Q_{z_0}, \\ J_e\ddot{\psi} + J_p\omega\dot{\vartheta} + b_\psi\dot{\psi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} - \frac{\partial W}{\partial \psi} + Q_\psi + (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t), \end{array} \right. \quad (27)$$

$$\left\{ J_e \ddot{\vartheta} - J_p \omega \dot{\psi} + b_3 \dot{\vartheta} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + Q_{\vartheta} + (J_e - J_p) \omega^2 (\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t), \right.$$

где магнитные силы, создаваемые МП, описываются членами  $-\partial W/\partial q_{0r}$ . Если будет использоваться СДУ (1), то  $-\partial W/\partial q_{0r}$  отсутствуют, а  $-\partial \Pi/\partial q_{0r}$  представляют собой потенциальные силы, зависящие только от обобщенных механических координат – перемещений и углов поворота, к которым могут быть приведены как силы в МППМ [28], так и силы в АМП [29] (см. п. 2).

Перейдем в уравнениях (27) от угловых обобщенных координат – самолетных углов Эйлера, к другим обобщенным угловым координатам – углам между проекциями продольной оси ротора  $O\zeta$  на координатные плоскости неподвижной системы координат  $Oxz$ ,  $Oyz$  и осями координат этой же системы координат  $Ox$ ,  $Oy$ . Для связи двух групп углов воспользуемся схемой, представленной на рис. 3.

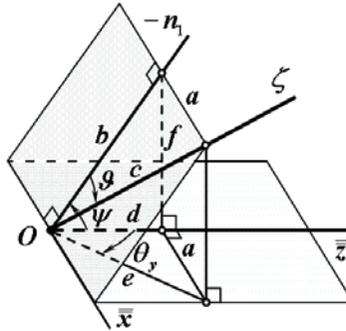


Рисунок 3. Схема перехода от самолетных углов Эйлера к углам поворота вокруг осей неподвижной системы координат

Введем углы между проекциями и осями  $\theta_x$  и  $\theta_y$ , которые представляют собой углы поворота ротора вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Из рис. 2, б следует, что поскольку  $-n_1$  есть проекция  $O\zeta$  на основную плоскость  $O\bar{y}\bar{z}$ , а  $\psi$  – угол между  $O\bar{z}$  и  $-n_1$ , отсчитываемый вокруг  $O\bar{x}$  от  $O\bar{y}$  к  $O\bar{z}$ , то:

$$\theta_x = \psi. \quad (28)$$

На рис. 3 представлена схема, эквивалентная изображенной на рис. 2, б. Она позволяет выявить зависимость между углами  $\theta_y$  и  $\vartheta$ . Здесь  $a, b, c, d, e, f$  – введенные вспомогательные отрезки,  $O\bar{z}n_1$  – плоскость  $O\bar{y}\bar{z}$ , параллельная координатной плоскости  $Oyz$ . Тогда справедливы соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sin \vartheta &= a/c, \quad \cos \vartheta = b/c, \quad \operatorname{tg} \vartheta = a/b \\ \sin \psi &= f/b, \quad \cos \psi = d/b, \quad \operatorname{tg} \psi = f/d \\ \sin \theta_y &= a/e, \quad \cos \theta_y = d/e, \quad \operatorname{tg} \theta_y = a/d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta_y = \frac{a}{d} = \frac{b \operatorname{tg} \vartheta}{d} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\cos \psi}. \quad (29)$$

Если углы малы, то, воспользовавшись разложением тригонометрических функций в ряды (20), приходим к взаимосвязи углов:

$$\theta_y = \vartheta. \quad (30)$$

Тогда, принимая, что магнитный подвес осуществляется с помощью управляемых электромагнитных подшипников, то есть АМП, по всем степеням свободы, приходим к уравнениям движения, известным из [27]:

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x}_0 + b_{x_0}\dot{x}_0 = -\frac{\partial\Pi}{\partial x_0} - \frac{\partial W}{\partial x_0} + Q_{x_0} + m\omega^2(e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \\ m\ddot{y}_0 + b_{y_0}\dot{y}_0 = -\frac{\partial\Pi}{\partial y_0} - \frac{\partial W}{\partial y_0} + Q_{y_0} + m\omega^2(e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) \\ m\ddot{z}_0 + b_{z_0}\dot{z}_0 = -\frac{\partial\Pi}{\partial z_0} - \frac{\partial W}{\partial z_0} + Q_{z_0} \\ J_e\ddot{\theta}_x + J_p\omega\dot{\theta}_y + b_{\theta_x}\dot{\theta}_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial \theta_x} - \frac{\partial W}{\partial \theta_x} + Q_{\theta_x} + (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t) \\ J_e\ddot{\theta}_y - J_p\omega\dot{\theta}_x + b_{\theta_y}\dot{\theta}_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial \theta_y} - \frac{\partial W}{\partial \theta_y} + Q_{\theta_y} + (J_e - J_p)\omega^2(\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t) \end{array} \right. \quad (31)$$

где члены  $P_{q_0} = -\partial W / \partial q_{0r}$  (или  $P_{q_0} = -\partial \bar{W} / \partial q_{0r}$ ) представляют собой электромагнитные реакции подвеса, зависящие не только от обобщенных механических координат – перемещений и углов поворота, но и от обобщенных электрических координат – потокосцеплений, если используются уравнения (6) (или токов – если (2)). Для описания взаимосвязи между обобщенными координатами к системе уравнений (31) должна быть добавлена вторая группа уравнений (6) (или (2)), параметры которых будут зависеть от особенностей применяемых в системе АМП [27].

Для определения положения ротора кроме первой группы обобщенных координат  $q_0 = (x_0, y_0, z_0, \theta_x, \theta_y)$ , может использоваться вторая  $q = (x_1, y_1, x_2, y_2, z_3)$  – координаты точек  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 2) в неподвижной системе координат (например, центров опорных участков ротора в радиальном направлении) и координата  $z$  некоторой точки  $O_3$ , расположенной на оси ротора (например, центра опорного участка ротора в осевом направлении).

Для решения система дифференциальных уравнений должна быть записана относительно одной группы координат, связь между которыми может быть выявлена с помощью схемы, представленной на рис. 4, где  $O'$ ,  $O'_1$ ,  $O'_2$ ,  $O'_3$  и  $O''$ ,  $O''_1$ ,  $O''_2$ ,  $O''_3$  – проекции соответствующих точек на координатные плоскости неподвижной системе координат. Если при нахождении сил используются координаты  $q$ , то при выводе уравнений должна быть выполнена замена переменных группы  $q_0$  на  $q$ , либо только в уравнениях (31), либо во всех выражениях (6), (11), (12), (13), (15), (19), (21) и (25):

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + l_1 \cos \theta_x \sin \theta_y, & y_1 = y_0 - l_1 \cos \theta_y \sin \theta_x, \\ x_2 = x_0 - l_2 \cos \theta_x \sin \theta_y, & y_2 = y_0 + l_2 \cos \theta_y \sin \theta_x, \\ z_3 = z_0 - (l_2 \pm l_3) \cos \theta_x \cos \theta_y, \end{cases} \quad (32)$$

где  $l_1$  – расстояние между точками  $O$  и  $O_1$ ;  $l_2$  – между  $O$  и  $O_2$  ( $l_1 + l_2 = l$ ); а  $l_2$  – между  $O_2$  и  $O_3$ , причем если  $O_3$  расположена относительно  $O_2$  со стороны  $O_1$ , то  $l_3$  должна подставляться в (32) со знаком «-».

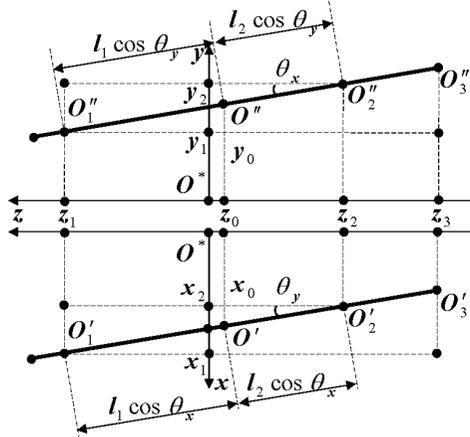


Рисунок 4 – Проекция оси жесткого ротора на плоскости неподвижной системы координат

При этом силы и моменты  $P_{q_0}$ , действующие в точке  $O$  и находящиеся в правой части СДУ (31), связаны с пондеромоторными силами  $P_q$ , действующими в точках  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$ , следующим образом:

$$\begin{cases} P_{x_0} = P_{x_1} + P_{x_2}, & P_{\theta_x} = -P_{y_1} l_1 + P_{y_2} l_2, & P_{z_0} = P_{z_3}. \\ P_{y_0} = P_{y_1} + P_{y_2}, & P_{\theta_y} = P_{x_1} l_1 - P_{x_2} l_2, \end{cases} \quad (33)$$

Полагая, как и раньше, перемещения и углы малыми, используя (20) и удерживая члены первого порядка малости выражения (32), можно разрешить относительно обобщенных координат второй группы:

$$\begin{cases} x_0 = (x_1 l_2 + x_2 l_1) / l, & \theta_y = (x_1 - x_2) / l, \\ y_0 = (y_1 l_2 + y_2 l_1) / l, & \theta_x = (-y_1 + y_2) / l, \\ z_0 = z_3 + (l_2 \pm l_3). \end{cases} \quad (34)$$

Вводя однородную квадратичную форму обобщенных скоростей  $\dot{q}$ :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2} (b_{x_1} \dot{x}_1^2 + b_{x_2} \dot{x}_2^2 + b_{y_1} \dot{y}_1^2 + b_{y_2} \dot{y}_2^2 + b_{z_3} \dot{z}_3^2), \quad (35)$$

и подставляя выражения (34) в (11), а (11) и (35) в (6), приходим к системе дифференциальных уравнений движения относительно обобщенных ко-

ординат второй группы  $q = (x_1, y_1, x_2, y_2, z_3)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{ml_2^2 + J_1}{l^2} \right) \ddot{x}_1 + \left( \frac{ml_1 l_2 - J_1}{l^2} \right) \ddot{x}_2 + \frac{\omega J_3}{l^2} (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + b_{x_1} \dot{x}_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} - \frac{\partial W}{\partial x_1} + Q_{x_1} + H_{x_1}(t), \\ \left( \frac{ml_1^2 + J_1}{l^2} \right) \ddot{x}_2 + \left( \frac{ml_1 l_2 - J_1}{l^2} \right) \ddot{x}_1 - \frac{\omega J_3}{l^2} (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + b_{x_2} \dot{x}_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_2} - \frac{\partial W}{\partial x_2} + Q_{x_2} + H_{x_2}(t), \\ \left( \frac{ml_2^2 + J_1}{l^2} \right) \ddot{y}_1 + \left( \frac{ml_1 l_2 - J_1}{l^2} \right) \ddot{y}_2 - \frac{\omega J_3}{l^2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + b_{y_1} \dot{y}_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} - \frac{\partial W}{\partial y_1} + Q_{y_1} + H_{y_1}(t), \\ \left( \frac{ml_1^2 + J_1}{l^2} \right) \ddot{y}_2 + \left( \frac{ml_1 l_2 - J_1}{l^2} \right) \ddot{y}_1 + \frac{\omega J_3}{l^2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + b_{y_2} \dot{y}_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} - \frac{\partial W}{\partial y_2} + Q_{y_2} + H_{y_2}(t), \\ m\ddot{z}_3 + b_{z_3} \dot{z}_3 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_3} - \frac{\partial W}{\partial z_3} + Q_{z_3} + H_{z_3}(t), \end{array} \right. \quad (36)$$

где члены  $-\partial \Pi / \partial q_r$  представляют собой потенциальные силы, зависящие только от обобщенных механических координат – перемещений центров опорных участков ротора, к которым могут быть приведены как силы в МППМ [28], так и силы в АМП [29] (см. п. 2);  $P_q = -\partial W / \partial q_r$  – пондеромоторные силы, то есть электромагнитные реакции магнитных подшипников [28];  $H_q(t)$  – явно зависящие от времени силы, а именно внешние периодические нагрузки, вызванные динамической неуравновешенностью ротора:

$$\begin{aligned} H_{x_1}(t) &= \frac{ml_2 \omega^2}{l} (e_1 \cos(\omega t) - e_2 \sin(\omega t)) + \frac{\omega^2 (J_1 - J_3)}{l} (\gamma_1 \sin(\omega t) + \gamma_2 \cos(\omega t)), \\ H_{x_2}(t) &= \frac{ml_1 \omega^2}{l} (e_1 \cos(\omega t) - e_2 \sin(\omega t)) - \frac{\omega^2 (J_1 - J_3)}{l} (\gamma_1 \sin(\omega t) + \gamma_2 \cos(\omega t)), \\ H_{y_1}(t) &= \frac{ml_2 \omega^2}{l} (e_1 \sin(\omega t) + e_2 \cos(\omega t)) - \frac{\omega^2 (J_1 - J_3)}{l} (\gamma_1 \cos(\omega t) - \gamma_2 \sin(\omega t)), \\ H_{y_2}(t) &= \frac{ml_1 \omega^2}{l} (e_1 \sin(\omega t) + e_2 \cos(\omega t)) + \frac{\omega^2 (J_1 - J_3)}{l} (\gamma_1 \cos(\omega t) - \gamma_2 \sin(\omega t)), \\ H_{z_3}(t) &= H_{z_3}(t). \end{aligned} \quad (37)$$

**3.7. Нелинейные уравнения движения жесткого ротора в магнитных подшипниках.** При анализе систем нелинейных дифференциальных уравнений ввиду известных трудностей их решения часто возникает необходимость вводить ограничения в постановку задачи. Крайним случаем таких ограничений является использование приведенных выше линеаризованных уравнений. Однако пренебрежение нелинейными членами в виде произведения двух и более малых величин – координат и их производных – приводит к искусственному исключению нелинейных взаимосвязей между ними, которые присущи реальной системе, в данном случае ротору в магнитных подшипниках,

и важны для характеристики его движения.

В свою очередь учет всех нелинейных членов в уравнениях движения создает трудности при анализе. Тогда одним из вариантов математического описания жесткого ротора в магнитных подшипниках есть применение уравнений движения квазилинейного типа, в которых удерживаются только те нелинейные члены, которые позволяют учесть нелинейные колебательные процессы, присущие системе. В качестве критерия включения нелинейных членов в уравнения может быть выбрано их сравнение с максимально возможными отклонениями координат. Если для ротора в МП принять, что углы поворота не могут превышать  $\pi/18$ , то по сравнению с первыми членами разложения в ряд тригонометрических функций (20) вторые члены составляют 0,5 и 1,5 % соответственно для функций  $\sin$  и  $\cos$ , а третьи – 0,0008 и 0,0028 %. Для обобщенных координат – поступательных перемещений ротора – такой анализ можно провести, введя вспомогательные углы  $x_1/l, x_2/l, y_1/l, y_2/l, z_3/D_{out3}$ , где  $D_{out3}$  – внешний диаметр статора осевого МП. Если учесть максимально возможные отклонения, величина которых обусловлена геометрическими размерами, то значения углов будут равны  $2\delta_r/l$  и  $2\delta_a/D_{out3}$ , где  $\delta_r, \delta_a$  – зазоры в радиальных и осевом МП соответственно. Эти значения для подавляющего большинства конструктивных вариантов МП также не превышают  $\pi/18$ . Тогда при выводе уравнений движения ротора в МП можно ограничиться первыми двумя слагаемыми в рядах (20) и сохранением в кинематических соотношениях и самих уравнениях членов первой, второй и/или третьей степеней относительно обобщенных координат и их производных. Это дает возможность исследовать нелинейные особенности данной системы, так как определяющая роль в формировании наиболее эффективных нелинейных резонансов принадлежит именно этим нелинейным слагаемым. Кроме того, примем, что все обобщенные координаты перемещения и углы поворота ротора –  $x_0, y_0, z_0, \theta_x, \theta_y, x_1, y_1, x_2, y_2$  и  $z_3$ , параметры неуравновешенности –  $e_1, e_2, \gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а также зазоры в МП –  $\delta_r, \delta_a$  имеют одинаковый порядок малости, что учтем при определении порядка малости членов уравнений и их исключении из рассмотрения.

Пользуясь обозначениями, принятыми в (8) и (9), запишем члены второго и третьего порядка, которые должны быть добавлены в левые части уравнений (31) и (36) для учета нелинейных особенностей системы.

Для первой группы координат  $q_0$  члены второго порядка имеют вид:

$$\begin{aligned} f_{x_0}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= 0, \quad f_{y_0}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) = 0; \\ f_{z_0}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \left( [\ddot{\theta}_x - \omega^2 \theta_x + 2\omega \dot{\theta}_y] (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - \right. \\ &\quad \left. - [\ddot{\theta}_y - \omega^2 \theta_y - 2\omega \dot{\theta}_x] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \right); \quad (38) \\ f_{\theta_x}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \ddot{z}_0 (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t); \\ f_{\theta_y}''(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \ddot{z}_0 (-e_1 \cos \omega t + e_2 \sin \omega t), \end{aligned}$$

а для второй группы  $q$  они могут быть описаны формулами:

$$\begin{aligned}
 f''_{x_1}(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \frac{m}{i} \ddot{z}_3 (-e_1 \cos \omega t + e_2 \sin \omega t); \\
 f''_{x_2}(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \frac{m}{i} \ddot{z}_3 (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t); \\
 f''_{y_1}(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \frac{m}{i} \ddot{z}_3 (-e_1 \sin \omega t - e_2 \cos \omega t); \\
 f''_{y_2}(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \frac{m}{i} \ddot{z}_3 (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t); \\
 f''_{z_3}(x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) &= \\
 &= \frac{m}{i} \left( \left[ (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - \omega^2 (x_2 - x_1) + 2\omega (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \right] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \omega^2 (y_2 - y_1) - 2\omega (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \right] (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) \right).
 \end{aligned} \tag{39}$$

Анализ выражений (38) показывает, что если параметры неуравновешенности не равны 0, то члены второго порядка вносят в уравнения движения связи между угловыми координатами и осевым смещением ротора. Подобное не наблюдалось в линеаризованных уравнениях (31), однако связь углов поворота с двумя другими линейными координатами, как и прежде, отсутствует.

Члены второго порядка (39), входящие в левые части уравнений относительно второй группы координат, также вносят связь между осевыми и радиальными движениями неуравновешенного ротора. При этом проявляются зависимости как радиальных от осевых, так и наоборот, в отличие от уравнений первой группы, где члены второго порядка малости в уравнениях движения в радиальных направлениях  $x_0, y_0$  равны нулю.

Члены третьего порядка малости относительно обобщенных координат первой группы, их производных и параметров неуравновешенности могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 f'''_{x_0}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \left( 2\omega \dot{\theta}_y \theta_y (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\omega \dot{\theta}_y \theta_y (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \ddot{\theta}_y \theta_y + \dot{\theta}_y^2 - \frac{1}{2} \omega^2 \theta_y^2 \right] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \right); \\
 f'''_{y_0}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= \\
 &= m \left( - \left[ \ddot{\theta}_x \theta_x + \dot{\theta}_x^2 + 2\omega (\dot{\theta}_x \theta_y + \dot{\theta}_y \theta_x) - \frac{1}{2} \omega^2 \theta_x^2 \right] (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \ddot{\theta}_x \theta_y + \dot{\theta}_y \theta_x + 2\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y - 2\omega \dot{\theta}_x \theta_x - \omega^2 \theta_x \theta_y \right] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \right); \\
 f'''_{z_0}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= 0; \\
 f'''_{\theta_x}(x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) &= m \ddot{y}_0 (-\theta_x (e_1 \sin \omega t + e_2 \cos \omega t) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \theta_y (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) + \\
& + (J_1 - J_3) \left( \left[ \ddot{\theta}_y \theta_y + \dot{\theta}_y^2 - 2\omega \dot{\theta}_y \theta_y + \frac{1}{2} \omega^2 \theta_y^2 \right] (\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t) - \right. \\
& - 2 \left[ \dot{\theta}_x \theta_y + \dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \right] (\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t) \left. \right) - \\
& - (J_1 - J_3) \left[ \ddot{\theta}_x \theta_y^2 + 2\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \theta_y \right] - \frac{1}{2} J_3 \omega \dot{\theta}_y \theta_y^2 ; \\
f''_{\theta_y} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) & = m \left( \left[ \ddot{y}_0 \theta_x - \ddot{x}_0 \theta_y \right] (e_1 \cos \omega t - e_2 \sin \omega t) \right) + \\
& + (J_1 - J_3) \left( \left[ \dot{\theta}_x^2 - 2\omega \dot{\theta}_x \theta_y \right] (\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t) - \right. \\
& - \ddot{\theta}_x \theta_y (\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t) \left. \right) + (J_1 - J_3) \dot{\theta}_x^2 \theta_y + \frac{1}{2} J_3 \omega \dot{\theta}_x \theta_y^2 . \tag{40}
\end{aligned}$$

Для второй группы эти члены ввиду громоздкости записей здесь не приводятся, но они могут быть получены при подстановке в формулы (40) выражений одних координат через другие (34) и использовании следующих зависимостей между членами разных систем уравнений:

$$\begin{aligned}
f''_{x_1} (x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) & = \left( f'''_{x_0} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) l_2 + f'''_{\theta_y} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) \right) / l ; \\
f''_{x_2} (x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) & = \left( f'''_{x_0} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) l_1 - f'''_{\theta_y} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) \right) / l ; \\
f''_{y_1} (x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) & = \left( f'''_{y_0} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) l_2 + f'''_{\theta_x} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) \right) / l ; \tag{41} \\
f''_{y_2} (x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) & = \left( f'''_{y_0} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) l_1 + f'''_{\theta_x} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) \right) / l ; \\
f''_{z_3} (x_1, \dots, \ddot{z}_3, e_1, \dots, \gamma_2) & = f'''_{z_0} (x_0, \dots, \ddot{\theta}_y, e_1, \dots, \gamma_2) .
\end{aligned}$$

Эти соотношения являются результатом перехода в уравнениях (31) ко второй группе координат и необходимостью замены этих уравнений их линейными комбинациями, согласно выражениям (33), для получения в них правых частей, совпадающих с правыми частями соответствующих уравнений системы (36).

Анализ выражений (40) показывает, что только в членах третьего порядка появляются слагаемые, не зависящие от параметров неуравновешенности и характеризующие связь между угловыми координатами (причем эти члены находятся в уравнениях движения относительно данных координат и не присутствуют в уравнениях характеризующих поступательные движения).

Если же проанализировать структуру членов третьей степени относительно обобщенных координат второй группы и их производных (41), здесь наблюдается полная взаимосвязь между координатами посредством членов, не зависящих от параметров неуравновешенности. Это происходит из-за наличия в выражениях (41) в слагаемых членов  $f'''_{\theta_x}, f'''_{\theta_y}$ , в которых координаты  $\theta_x, \theta_y$  заменяются на  $x_1, y_1, x_2, y_2$  в соответствии с (34).

При описании сил сопротивления в нелинейных уравнениях движения, обращаясь к системе (31) с учетом (38) и (40), нужно отметить, что в структуре моментов сил сопротивления наряду с основными линейными членами возможно наличие нелинейных слагаемых, которые являются в основном

следствием рассмотрения немалых угловых перемещений [23]. Роль таких слагаемых в большинстве случаев невелика, а их влияние может проявиться в случаях внутренних резонансов и сказаться на величинах амплитуд связанных колебаний. Так как для рассматриваемых систем силы сопротивления могут считаться малыми, то нелинейные члены могут быть опущены.

В системе (36) с учетом (39) и (41) силы сопротивления действуют сосредоточенно на отдельные точки жесткого ротора (опорные участки), смещения которых являются обобщенными координатами. Поэтому данные силы с достаточной степенью адекватности могут считаться пропорциональными скоростям движения именно этих точек, а коэффициенты пропорциональности являются характеристиками магнитных подшипников и могут определяться экспериментально [1].

Обобщая вышеприведенные нелинейные математические модели динамического поведения жесткого ротора в магнитных подшипниках можно ввести еще одну форму представления уравнений движения, а именно – квазилинейную форму их записи. Учитывая, что нелинейные члены уравнений, описывающие силы инерции и упругие силы, а также линейные члены сил сопротивления, являются малыми величинами по сравнению с линейными, можно выделить все малые члены в одну группу в каждом из уравнений, входящих в систему, и ввести малый положительный параметр. Тогда системы дифференциальных движений, как относительно первой группы обобщенных координат, так и относительно второй, можно представить в виде (10).

**Заключение.** Анализ полученных в работе систем дифференциальных уравнений движения жесткого ротора в магнитных подшипниках различных типов позволяет прийти к выводам, что учет нелинейных членов может привести к потере информативности математической модели о нелинейных эффектах, присущих рассматриваемой электромагнитомеханической системе. Это в первую очередь связано с магнитными или электромагнитными силами, зависимость которых от обобщенных механических координат нелинейна и может аппроксимироваться кубическими полиномами или полиномами более высоких степеней [28, 29]. Данные силы располагаются в правых частях уравнений, а форма представления левых частей (силы инерции, сопротивления и упругие силы), конечно же, должна быть соразмерна им по степеням членов.

Полученные нелинейные математические модели в дальнейшем могут использоваться для исследования механизмов возбуждения пространственных колебаний вращающегося жесткого ротора, в том числе форм пространственных движений, а также выяснения условий существования различных режимов резонансных, устойчивых периодических или почти периодических колебаний, выявления качественных и количественных закономерностей установившихся процессов при пространственных колебаниях и др.

**Список литературы:** 1. Мартыненко Г.Ю. Магнитные подшипники как упруго-демпферные опоры роторов с управляемой жесткостью // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2008. – № 47. – С. 111–124. 2. Кельзон А.С, Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. – Л.: Машиностроение (Ленинград, отделение), 1977. – 288 с. 3. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. – М.: Наука, 1982. – 280 с. 4. G. Schweitzer, H. Bleuler and A. Traxler Active magnetic bearings. – Zurich: ETH, 1994. – 244 p. 5. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. 6. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В.Н. Челомей (пред). – М.: Машиностроение, 1980. – Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов. / Под ред. Ф.М. Диментберга и К.С. Колесников. – 543 с. 7. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наукова думка, 1977. – 335 с. 8. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные изгибно-крутильные колебания системы двигатель-ротор // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1964. – № 2. – С. 153–157. 9. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 387 с. 10. Хронин Д.В. Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1970. – 409 с. 11. Maslen E.H. Magnetic bearings. – University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, Virginia, 2000. – 229 p. 12. Chiba A., Fukao T., Ichikawa O., Oshima M., Takemoto M. and Dorrell D.G. Magnetic Bearings and Bearingless Drives. – Elsevier Linacre House, Jordan Hill, Oxford, 2005. – 381 p. 13. Alahakoon S. Digital Motion Control Techniques for Electrical Drives. – Electrical Machines and Power Electronics Department of Electric Power Engineering Royal Institute of Technology, Stockholm, 2000. – 310 p. 14. Jansen R. and DiRusso E., Passive Magnetic Bearing With Ferrofluid Stabilization. – NASA Technical Memorandum 107154, 1996. – 154 p. 15. Bermudez J.-L., Zanolli S., Sandtner J., Bleuler H., Benabderrahmane C. Preliminary experiments on an eddy currents bearing // Seventh International Symp. on Magnetic Bearings, August 23–25, 2000, ETH Zurich. – P. 136–139. 16. Bassani R. Earnshaw (1805–1888) and Passive Magnetic Levitation // Meccanica. – Springer, 2006. – № 41. – P. 375–389. 17. Bassani R. Permanent magnetic levitation and stability Fundamentals of Tribology and Bridging the Gap Between the Macro-and Micro Nanoscales // NATO Sciences Series, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001. – P. 899–913. 18. Parviainen A. Design of axial-flux permanent-magnet low-speed machines and performance comparison between radial-flux and axial-flux machines // Thesis for the degree of Doctor of Science (Technology), Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, Finland, 2005. – 153 p. 19. Losch F. Identification and automated controller design for active magnetic bearing system // Diss. of Doctor of Technical Science. Swiss Federal Institute of Technology. – Zurich: ETH, 2002. – 254 p. 20. Polajžer B. Design and Analysis of an Active Magnetic Bearing Experimental System // Diss. Ph.D. University of Maribor faculty of electrical engineering and computer science, Maribor, Slovenia, 2003. – 77 p. 21. Larssonneur R. Design and control of active magnetic bearing systems for high speed rotation // Diss. of Doctor of Technical Science. Swiss Federal Institute of Technology. – Zurich: Offsetdruckerei AG, 1990. – 182 p. 22. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 824 с. 23. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. – 432 с. 24. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В.Н. Челомей (пред). – М.: Машиностроение, 1979. – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем. / Под ред. И.И. Блехмана. – 351 с. 25. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Учебник для студентов энергетических и электротехнических ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1973. – 752 с. 26. Мартыненко Г.Ю. Уточнение математической модели ротора на ЭМП за счет определения магнитной проводимости зазоров под полюсами с учетом взаимовлияния смещений в радиальном и осевом направлениях // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ», 2006. – №32. – С. 179–192. 27. Мартыненко Г.Ю. Построение математической модели полного электромагнитного подвеса ротора с использованием взаимосвязанных магнитомеханических уравнений Пауса // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – № 22. – С. 107–126. 28. Мартыненко Г.Ю. Определение жесткостных характеристик радиальных магнитных подшипников на двух кольцевых постоянных магнитах // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і

міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2007. – № 38. – С. 83-95. **29.** *Мартынченко Г.Ю.* Определение силовых и жесткостных характеристик осевого активного магнитного подшипника при заданном законе управления // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2008. – № 36. – С. 133-141. **30.** *Furlani E.P.* Permanent Magnet and Electromechanical Devices. Materials, Analysis, and Applications. – San Diego, USA: Academic Press, 2001. – 518 p. **31.** *Мартынченко Г.* Визначення критичних швидкостей обертання ротора експериментальної моделі на комбінованому магнітному підвісі // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Праці 1-ї міжнародної науково-технічної конференції. – Львів: Кінпатрі Лтд., 2008. – С. 119-121. **32.** *Аврамов К.В.* Асимптотическая процедура анализа нелинейных колебаний роторов // Вісник НТУ «ХПІ». Тем. вип. «Динаміка і міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2008. – № 36. – С. 11-20. **33.** *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с. **34.** *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1981. – 718 с. **35.** *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

*Поступила в редколлегию 20.03.2009*