УДК 539.3

Я.Д.КРУГЛИЙ, НТУ «ХПИ»

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ С МАЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

У даній роботі розглядаються вимушені коливання скінчено-елементних систем великого розміру з малою нелінійністю. Розроблено метод розрахунку нелінійних коливань, який враховує частковий контакт у роз'ємних механічних з'єднаннях. Метод дозволяє суттєво зменшити розмір задачі і час розрахунку, а також отримати амплітудно-частотні залежності.

In this work the forced vibrations of largeness finite-element systems with small non-linearity are considered. The method of calculation of nonlinear vibrations, which takes into account a partial contact in sectional mechanical connections, is developed. A method allows substantially to decrease the size of task and checkout, and also get peak frequency dependences.

Введение

В конструкциях современных облопаченных дисков турбин используются различные механические соединения контактного типа, в которых присутствует сухое трение. Так с целью повышения жесткости длинных лопаток турбин используется бандажи, содержащие разъемные соединения. Под действием центробежных сил, а также при колебаниях лопаток, контактная область в этих соединениях изменяется, что может привести к раскрытию межлопаточного бандажного соединения и образованию отдельных пакетов лопаток. Для безотказной работы таких конструкций требуются анализ динамической прочности с учетом контактных соединений еще на стадии проектирования. В силу нелинейного характера контактных соединений, исследования динамических характеристик таких систем являются весьма сложными и требующими больших временных затрат. С появлением метода конечных элементов и программных комплексов, построенных на нем, стали возможны исследования нелинейной динамики конструкций сложной формы [1]. Однако, компьютерные технологии еще не позволяют решать быстро и с наименьшими затратами машинных ресурсов задачи большой размерности с учетом нелинейности, вызванной контактными взаимодействиями в соединениях [2]. Обычно в реальном облопаченном диске контакт наблюдается в малой области и нелинейность малая, хотя сама система при моделировании МКЭ имеет большую размерность [3]. Поэтому часто проблему анализа колебаний в системе с контактным соединением решают с помощью применения жесткостных элементов в соединении [4-5]. Однако достоверность такого подхода не доказана. Поэтому актуальной остается проблема построения достоверных и эффективных математических моделей и методов для расчета вынужденных нелинейных колебаний с учетом контактных соединений.

Постановка задачи

Необходимо разработать метод определения амплитудно-частотной зависимости в области резонанса при нелинейных колебаниях систем с малой областью нелинейности. При этом метод должен учитывать, что при моделировании колебаний таких систем разрешающие уравнения имеют большую размерность, а нелинейность определяется контактным взаимодействием малого числа степеней свободы системы.

Метод исследования нелинейных колебаний при контактном взаимодействии в малой области

Уравнение нелинейных вынужденных колебаний при контактном взаимодействии для конечно-элементной системы можно представить в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[D_N]\{\dot{u}\}+[K_N]\{u\}=\{F(t)\}, \tag{1}$$

где $[M]$ – матрица масс системы, $\{F(t)\}$ – вектор вынуждающей силы, $[D_N]$ – нелинейная матрица демпфирования, $[K_N]$ – нелинейная матрица жесткости.

Считая, что внутренне демпфирование системы мало, а демпфирование в контактном взаимодействии реализуется в малой области, в первом приближении можно пренебречь демпфированием системы.

Уравнение (1) представим в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{u}\}+([K_L]+[K_N]-[K_L])\{u\}=\{F(t)\}, \tag{2}$$

где $[K_L]$ – линейная матрица жесткости конечно-элементной системы без учета контакта в разъемном соединении.

Преобразуем уравнение (2) к следующему виду:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K_L]\{u\}=\{F(t)\}-([K_N]-[K_L])\{u\}. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда на систему действует периодическая гармоническая вынуждающая сила:

$$\{F(t)\} = \{F\}\sin \omega t, \tag{4}$$

где ω – частота вынуждающей нагрузки.

Таким образом, рассматриваются одночастотные нелинейные колебания под действием периодических гармонических сил в системах с большим количеством степеней свободы. Поведение такой нелинейной системы вблизи резонанса, если нелинейность незначительная, можно исследовать методом малого параметра [6]. При этом подходе решение системы (3) ищется в виде рядов:

$$\{u_z\}=\{\varphi_z\}^{(1)}a\cos(\omega t+\vartheta)+\varepsilon\{q_z\}^{(1)}(a,\omega t,\psi)+\varepsilon^2\{q_z\}^{(2)}(a,\omega t,\psi)+\dots, \tag{5}$$

$(z = 1,2,\dots,H)$,

где z – номер собственной формы, H – число собственных форм, $\{\varphi_z\}$ – вектор z-й собственной формы, ε – малый параметр, a – амплитуда колебаний, ϑ – сдвиг фаз, $\psi = \omega t + \vartheta$, $\{q\}^{(1)}$, $\{q\}^{(2)}$ – периодические функции по обеим угловым переменным ωt и ψ с периодом 2π.

Так как при контактном взаимодействии в малой области возникает малая нелинейность, то в решении (5) можно пренебречь членами ряда первого порядка малости ε и выше. В этом случае решение (5) примет следующий вид:

$$\{u_z\} = \{\varphi_z\}^{(1)} a\cos(\omega t + \vartheta), \quad (z = 1,2,\dots,H). \tag{6}$$

Для решения системы (3) с помощью выражения (6) необходимо найти собственную форму для конечно-элементной системы без учета контакта в разъемном соединении.

Для определения собственных форм колебаний линеаризованной конечно-элементной системы предлагается алгоритм, состоящий из двух шагов.

На первом шаге решается задача определения контактной площадки в соединении. Решение задачи контактного взаимодействия системы, состоящей из b упругих тел (в случае малых по сравнению с размерами тел перемещений) сводится к минимизации энергетического функционала, при этом возможные перемещения на поверхности S_b должны удовлетворять кинематическим граничным условиям

$$u^b(\rho) = g^b(\rho), \quad \rho \in S_b, \tag{7}$$

где $g^b(\rho)$ – заданная функция, ρ – радиус-вектор точек поверхности тела.

Кроме того, на поверхности контакта должны выполняться условия не проникания, которые можно записать в виде

$$R_b(\rho_l) \le 0, \quad b \ne l, \quad \rho_l \in S_l, \tag{8}$$

где R_b – уравнение границы области контакта для b-то тела; ρ_l – радиус-вектор точек l-го тела (с учетом деформирования).

При выполнении неравенства (8) в зоне контакта обеспечивается совместность касательных перемещений контактируемых тел, а при обращении его в равенство - возможно взаимное проскальзывание.

В рамках МКЭ возможные области контакта S_l разбиваются на специальные контактные конечные элементы [7], для которых условия (8) сводится к следующему виду:

$$\mu|F_n| > |F_s|; \tag{9}$$

$$\mu|F_n| = |F_s|, \tag{10}$$

где индексы n, s – означают нормальное и касательное направление, F – внутреннее контактное усилие, μ – коэффициент сухого трения. Нормальные и касательные силы определяются выражениями:

$$F_n = k_n\left(u_n^j - u_n^i - \Delta_n\right), \quad F_s = k_s\left(u_s^j - u_s^i - \Delta_s\right), \tag{11}$$

где i и j – номера узлов, в которых возникает контакт, k – контактная жесткость, Δ – предварительный зазор. В результате решения статической контактной задачи определяются области контакта в бандажном соединении.

На втором этапе решается задача определения собственных частот и форм линеаризованной системы, полученной наложением связи на узлы, которые входят в контакт:

$$u_i = u_j, \tag{12}$$

где i и j – номера узлов, на которые накладываются условия контакта.

Собственные частоты и формы определяем из решения уравнения свободных колебаний для линеаризованной системы:

$$\left(\left[K_L\right] - p_z^2\left[M\right]\right)\left\{\varphi_z\right\} = 0 \,. \tag{13}$$

Полученные таким образом собственные формы близки к форме деформации нелинейной системы с учетом контактного взаимодействия. В случае если не накладывать связь на узлы, входящие в контакт, будут получены собственные формы со значительными амплитудами в месте контакта, находящимися в противофазе, что приведет к значительным искажениям результатов нелинейного анализа при использовании метода малого параметра.

Матрицы нелинейной жесткости при малой области контакта можно представить в блочном виде:

$$\left[K_N\right] = \begin{bmatrix} K_{mm}^N & K_{mk}^L \\ K_{km}^L & K_{kk}^L \end{bmatrix}, \tag{14}$$

где m – число степеней свободы в области контактного взаимодействия, k – число степеней свободы в линейной области системы, $\left[K_{mm}^N\right]$ – нелинейный блок матрицы жесткости, соответствующий контактной области, который меняется в зависимости от нагрузки, $\left[K_{km}^L\right]$, $\left[K_{mk}^L\right]$, $\left[K_{kk}^L\right]$ – линейные блоки матрицы жесткости системы, независящие от нагрузки. При этом $m << k$, $m + k = H$. Представим линейную матрицу жесткости в блочном виде:

$$\left[K_L\right] = \begin{bmatrix} K_{mm}^L & K_{mk}^L \\ K_{km}^L & K_{kk}^L \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Рассмотрим разность между нелинейной жесткости системы (14) с малой областью контактного взаимодействия и линейной матрицей той же системы без учета контакта (15). Она имеет следующий вид:

$$\left[K_N\right] - \left[K_L\right] = \begin{bmatrix} K_{mm}^{NL} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ где } \left[K_{mm}^{NL}\right] = \left[K_{mm}^N\right] - \left[K_{mm}^L\right]. \tag{16}$$

Теперь матрицу разности между нелинейной и линейной матрицами жесткости размерностью H в уравнении (3) можно заменить матрицей $\left[K_{mm}^{NL}\right]$ размерностью m (16).

Тогда

$$\left[M\right]\left\{\ddot{u}\right\} + \left[K_L\right]\left\{u\right\} = \left\{F(t)\right\} - \left\{F_0(a,\vartheta)\right\}. \tag{17}$$

Разлагая нелинейный вектор вынуждающей силы $\left\{F_0(a,\vartheta)\right\}$ в ряд по z-й собственной форме получим:

$$\left\{F_0(a,\vartheta)\right\} = \sum_{r=1}^{m} \varphi_r^z Q_r(a,\vartheta) \,, \tag{18}$$

где Q – вектор возмущающей обобщенной силы, который определяется

$$\{Q_m(a)\} = \{R_m(a)\} a \cos\psi \; ; \tag{19}$$

$$\{R_m(a)\} = \begin{vmatrix} R_1(a) \\ R_2(a) \\ \vdots \\ R_m(a) \end{vmatrix} = \left[K_{mm}^{NL}(a)\right]\{\varphi_m^z\}, \tag{20}$$

где $\{\varphi_m^z\}$ – подвектор z-й собственной формы, состоящий из m-элементов соответствующих степеням свободы матрицы $\left[K_{mm}^{NL}\right]$.

Согласно методу малого параметра [6] в резонансном случае производные от амплитуды a и разности фаз ϑ по времени представляет собой функции от a, ϑ, вектора обобщенной нагрузки и определяются как решение системы дифференциальных уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{1}{2\pi p_z}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{m}\{\varphi_r^z\}^T\{Q_r(a)\}\sin\psi d\psi - \frac{\sum_{r=1}^{H}\{F_r\}^T\{\varphi_r^z\}}{p_z+\omega}\cos\vartheta \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= p_z - \omega - \frac{1}{2\pi p_z a}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{m}\{\varphi_r^z\}^T\{Q_r(a)\}\cos\psi d\psi - \frac{\sum_{r=1}^{H}\{F_r\}^T\{\varphi_r^z\}}{a(p_z+\omega)}\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где p_z – z-я собственная частота линеаризованной системы, φ^z – z-я собственная форма линеаризованной системы, m – количество элементов нелинейной матрицы жесткости, H – число элементов матрицы жесткости всей системы.

Так как для определения обобщенной нагрузки необходимо иметь явную зависимость компонент нелинейной матрицы жесткости (16) на данной частоте вынужденных колебаний от амплитуды a, а это при контактном взаимодействии невозможно. Предлагается следующий итерационный подход решения системы (21):

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_{i+1}}{dt} &= -\delta_e(a_i)a_{i+1} - \frac{F^*}{p_z+\omega}\cos\vartheta_{i+1}; \\ \frac{d\vartheta_{i+1}}{dt} &= \omega_e(a_i) - \omega + \frac{F^*}{a_{i+1}(p_z+\omega)}\sin\vartheta_{i+1}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где:

$$\delta_e(a_i) = -\frac{1}{2\pi a_i p_z}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{m}\{\varphi_r^z\}^T\{Q_{r0}(a_i)\}\sin\psi d\psi \; ;$$

$$\omega_e(a_i) = p_z - \frac{1}{2\pi p_z a_i}\int_0^{2\pi}\sum_{r=1}^{m}\{\varphi_r^z\}^T\{Q_{r0}(a_i)\}\cos\psi d\psi \; ; \quad F^* = \sum_{r=1}^{H}\{F_r\}^T\{\varphi_r^z\}.$$

Параметры $\delta_e(a_i)$ и $\omega_e(a_i)$ представляют собой соответственно эквивалентный декремент затухания и полную эквивалентную собственную частоту рассматриваемой системы.

На первой итерации вычисляются эквивалентный декремент затухания и полная эквивалентная собственная частота для начального приближения амплитуды $\delta_e(a_0)$, $\omega_e(a_0)$. Компоненты нелинейной матрицы жесткости (19, 20) определяются из решения статической контактной задачи под действием приложенного в узлах статического кинематического нагружения в виде $\{\varphi_z\}a_0$, за исключением узлов, находящихся в области контактного взаимодействия. В качестве a_0 предлагается взять среднее арифметическое значение от модального статического решения нелинейной контактной задачи при действии амплитуды вынуждающей нагрузки:

$$a_0 = avr\left[\{u_{стат}\}\otimes\{\varphi_z\}^{-1}\right]. \tag{23}$$

где $avr[]$ – оператор среднего арифметического, $\otimes$ – знак покомпонентного произведения векторов (произведение Кронекера).

При стационарных режимах колебаний с постоянными амплитудами и фазами, левые части уравнений первого приближения (22) равны нулю. Для определения стационарных значений амплитуды a_{i+1} и фазы ϑ получаем систему:

$$\left.\begin{aligned}\delta_e(a_i)a_{i+1} + \frac{F^*}{p_z+\omega}\cos\vartheta_{i+1} = 0;\\ \omega_e(a_i) - \omega + \frac{F^*}{a_{i+1}(p_z+\omega)}\sin\vartheta_{i+1} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Из уравнений (24) находим с точностью до величин второго порядка малости зависимость между амплитудой a_{i+1} и частотой внешних сил ω:

$$a_{i+1}^2\left[\left(\omega_e{}^2(a_i) - \omega^2\right)^2 + 4\delta_e{}^2(a_i)\omega^2\right] = \{F^*\}^2. \tag{25}$$

Для нахождения фазы колебаний, из соотношения (24) получаем:

$$\vartheta_{i+1} = arctg\,\frac{\omega_e(a_i) - \omega}{2\omega\delta_e(a_i)}. \tag{26}$$

Соотношения (25) позволяют построить зависимость a_{i+1} от ω, из которой определяются значения a_{i+1} для следующей итерации:

$$a_{i+1} = \max_{\omega_1,\omega_2}\left(a_{i+1}(\omega)\right), \tag{27}$$

где ω_1 и ω_2 – частоты, ограничивающие резонансный диапазон.

Итерационный процесс будет продолжен до тех пор, пока не будет выполняться следующее равенство:

$$\left\|a_{i+1} - a_i\right\| \le \eta, \tag{28}$$

где η – заданная точность.

Из выражения (25) можно построить кривую, характеризующую резонансные колебания, возникающие в нелинейной системе в результате воздействия внешней периодической силы, частота которой близка к одной из собственных частот системы.

Выводы

1 Предложен метод решения задачи о вынужденных нелинейных колебаниях систем большой размерности с малой нелинейностью контактного типа.

2 Данный метод позволяет существенно уменьшить размерность задачи.

3 Предложенный метод решения задачи нелинейных колебаний позволяет получать амплитудно-частотную зависимость в области резонансной частоты, которая близка к одной из собственных частот линеаризованной системы.

Список литературы: 1. *Я.Д.Демуз, В.А.Жовдак, А.Ф.Кабанов, А.С.Степченко.* Исследование влияния контакта в бандажном соединении на собственные частоты лопаточного аппарата на основе трехмерных моделей // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков. – 2005. – № 21. – С. 67-72. **2**. *В.О.Жовдак, Я.Д.Демуз, О.С.Степченко*. Нелінійні коливання пакетів лопаток з урахуванням технологічних відхилень у роз'ємних з'єднаннях // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: Праці конференції. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД. – 2008. – С. 102-103. **3**. *В.О.Жовдак, О.С.Степченко, Я.Д.Демуз* Нелінійні коливання пакетів лопаток з роз'ємними з'єднаннями // Машинознавство. – 2008. – № 10 (136). – С. 17-21. **4**. *Ю.С.Воробьев, С.Янецки, Е.В.Тишковец, С.П.Канило* Анализ колебаний турбинного лопаточного аппарата со связями на основе трехмерных моделей // Вибрации в технике и технологиях. – 2001. – № 4 (20). – С. 19-23. **5**. *Ender Cigeroglu, Ning An, Chia-Hsiang Menq*. Forced Response Prediction of Constrained and Unconstrained Structures Coupled Through Frictional Contacts // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. – Vol. 131. – March 2009/022505. – P. 1-11. **6**. *Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., Наука, 1974. **7**. *O.C.Zienkiewicz, R.L.Teylor*. The Finite Element Method. – Vol. 2. Butterworth-Heinemann, 2000. – 480 p. ***8***. *В.А.Толок, В.В.Киричевский, С.И.Гоменюк, С.Н.Гребенюк, Д.П.Бувайло* Метод конечных элементов. Теория, алгоритмы, реализация. – К.: Наукова думка, 2003. – 283 с.

Поступила в редколлегию 14.05.2009