

Р.Е.КОЧУРОВ, асп., НТУ «ХПИ»;

К.В.АВРАМОВ, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

НЕЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Нелінійні параметричні коливання циліндричних оболонок описуються рівняннями Доннелла-Мушгарі-Власова. Рухи представляються у вигляді багатомодового розкладання по формах коливань. Дискретизація проводиться методом Бубнова-Гальоркіна. За допомогою методу гармонійного балансу досліджуються хвилі, які біжать, і нелінійні нормальні форми в системі з дисипацією та без її.

Donnell's equations are used to analyze cylindrical shell nonlinear parametrical vibrations. The motions are presented as multi-mode expansion. To obtain a finite-degree-of-freedom model of shell motions the Bubnov-Galerkin method is applied. Nonlinear modes and traveling waves of shells are treated using harmonic balance method; the effect of structural damping is taken into account.

Введение. Большое число исследований посвящено анализу нелинейных колебаний тонкостенных цилиндрических оболочек. В работах [3, 4] рассматриваются модели нелинейных колебаний цилиндрических оболочек с тремя и четырьмя степенями свободы, которые описывают свободные, вынужденные и параметрические колебания. Взаимодействие двух пар сопряженных форм колебаний цилиндрических оболочек рассмотрено в [9]. Подробный обзор работ по динамике оболочек содержится в статье [8].

Анализ линейных колебаний цилиндрических оболочек показывает, что спектр собственных частот может быть весьма плотным. В этом случае только многомерными моделями, которые описывают взаимодействие между модами с плотным спектром, можно описать нелинейную динамику цилиндрических оболочек. В данной работе для анализа параметрических колебаний цилиндрических оболочек при их геометрически нелинейном деформировании учитываются три пары сопряженных форм колебаний имеющих близкие частоты линейных колебаний. В статье подробно исследованы два вида движений: нелинейные моды и бегущие волны.

Постановка задачи и уравнения колебаний. Рассмотрим шарнирно опертую цилиндрическую оболочку без начальных неперспективностей, сжатую вдоль образующей распределенной периодической нагрузкой вида

$$N_x(t) = N_1 \cos 2vt, \quad N_1 = \text{const} > 0.$$

Оболочка совершает колебания с умеренными амплитудами. Тогда деформации являются малыми, а перемещения умеренными и связи между деформациями и перемещениями описываются нелинейными уравнениями. Напряжения и деформации связаны законом Гука. Тогда колебания оболочки

описываются уравнениями Донелла-Муштари-Власова:

$$\frac{D}{h} \nabla^4 w + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x} \right);$$

$$\frac{1}{E} \nabla^4 F = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right], \quad (1)$$

где w – радиальные перемещения точек срединной поверхности оболочки, x, y – продольная и окружная координаты, R – радиус оболочки, ρ – плотность материала оболочки; E, μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона, F – функция напряжений, $D = Eh^3/(12(1 - \mu^2))$ – цилиндрическая жесткость оболочки.

В цилиндрических оболочках сопряженные собственные формы колебаний $\cos sy \sin rx$ и $\sin sy \sin rx$ имеют одинаковые частоты. При нелинейных колебаниях цилиндрических оболочек эти формы, в основном, возбуждаются совместно. В данной модели в разложении радиального прогиба учитываются три пары сопряженных форм колебаний, частоты которых близки. Динамический прогиб оболочки аппроксимируем разложением

$$w = \sum_{i=1}^3 (f_{2i-1} \cos s_i y + f_{2i} \sin s_i y) \sin rx + f_7 \sin^2 r x + f_8, \quad (2)$$

где $s_i = n_i / R$; $r = m \pi / L$; $i = \overline{1,3}$; n_i – число волн в окружном направлении, m – число полуволн вдоль образующей. Слагаемое $f_7 \sin^2 r x$ отражает не-симметричность прогиба относительно срединной поверхности с преимущественным перемещением к центру кривизны. Слагаемое f_8 описывает радиальные перемещения точек, принадлежащих торцевым сечениям оболочки. Это слагаемое не зависит от окружной координаты y , то есть торцевые сечения при колебаниях оболочки могут «дышать» [3].

Функцию напряжений представим так: $F = F_h + F_p$. Общее решение второго уравнения системы (1), F_h , определяется, удовлетворяя условие периодичности окружных перемещений [4], и имеет следующий вид:

$$F_h = \frac{E}{16} \sum_{i=1}^6 s_i f_i^2 x^2 - \frac{1}{4} \frac{E}{R} f_7 x^2 - \frac{1}{2} \mu N_x x^2 - \frac{1}{2} N_x y^2. \quad (3)$$

Частное решение второго уравнения системы (1), F_p , представим так:

$$F_p = (F_1^{(0)} + F_5^*) \cos 2r x + \sum_{i=1}^3 (F_{i+2}^{(0)} \cos 2s_i y + F_{i+5}^{(0)} \sin 2s_i y) + F_1^* \sin r x + F_2^* \sin 3r x + F_4^*,$$

$$F_k^* = \sum_{i=1}^3 (F_i^{(k)} \cos s_i y + F_{i+3}^{(k)} \sin s_i y); F_1^* = F_1^{(l)} \cos(s_1 + s_2)y + F_2^{(l)} \cos(s_1 - s_2)y + F_3^{(l)} \cos(s_1 + s_3)y + F_4^{(l)} \cos(s_1 - s_3)y + F_5^{(l)} \cos(s_2 + s_3)y + F_6^{(l)} \cos(s_2 - s_3)y +$$

$$+ F_7^{(l)} \sin(s_1 + s_2)y + F_8^{(l)} \sin(s_1 - s_2)y + F_9^{(l)} \sin(s_1 + s_3)y + F_{10}^{(l)} \sin(s_1 - s_3)y + \\ + F_{11}^{(l)} \sin(s_2 + s_3)y + F_{12}^{(l)} \sin(s_2 - s_3)y; k = 1, 2; l = 3, 4. \quad (4)$$

Величины F_i определяются подстановкой выражений (2), (4) во второе уравнение системы (1) и приравниванием коэффициентов при одинаковых гармониках.

Для дискретизации системы применим метод Бубнова-Галеркина к первому уравнению системы (1). Получим модель с конечным числом степеней свободы, которая относительно безразмерных переменных и параметров имеет вид:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i(f_1, \dots, f_7) + G_i(f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = \overline{1, 6}; \quad (5)$$

$$\ddot{f}_7 + \frac{4}{3} \ddot{f}_8 + \omega_7^2 f_7 + \tilde{\omega}_8^2 f_8 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{7j} f_j^2 = 0; \quad (6)$$

$$\ddot{f}_8 + \frac{1}{2} \ddot{f}_7 + \omega_8^2 f_8 + \tilde{\omega}_7^2 f_7 + \sum_{j=1}^6 \gamma_{8j} f_j^2 = 0, \quad (7)$$

Частоты ω_7, ω_8 значительно больше частот $\omega_1, \dots, \omega_6$. Поэтому, полагая $\ddot{f}_7 = \ddot{f}_8 = 0$, из (6), (7) определим $f_7 = f_7(f_1, \dots, f_6)$, $f_8 = f_8(f_1, \dots, f_6)$ и введем их в (5). Тогда функции $R_i, i = \overline{1, 6}$ системы (5) примут вид:

$$R_i(f_1, \dots, f_6) = \sum_{j=1}^6 \eta_{ij} f_j^2, \quad i = \overline{1, 6}. \quad (8)$$

Итак, параметрические колебания оболочки описываются системой уравнений (5) с функциями R_i в виде (8).

Анализ нелинейных колебаний. Исследуем динамику системы (5). В этой системе существуют две нелинейные нормальные формы: $f_{2i-1} = \pm f_{2i}$, $i = \overline{1, 3}$. Движения на этих нормальных формах описываются системой трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\ddot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i \tilde{R}_i(f_1, f_3, f_5) + \tilde{G}_i(f_1, f_3, f_5) + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = 1, 3, 5. \quad (9)$$

Полученные нелинейные моды являются прямыми линиями в конфигурационном пространстве динамической системы (5). Эти линии являются точным решением системы (5). Метод определения нелинейных нормальных форм в параметрически возбуждаемых системах предложен в [1, 5].

Для исследования движений на нормальной форме (9) воспользуемся методом гармонического баланса и движение представим так:

$$f_i = A_i \cos(\nu t) + B_i \sin(\nu t), \quad i = 1, 3, 5. \quad (10)$$

В результате, получаем следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3A_j^2 + B_j^2) + \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + G_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3B_j^2 + A_j^2) - \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + G_i^{(B)} = 0, \quad i = 1, 3, 5, \quad (11)$$

В системе (11) существуют следующие группы решений:

- 1.1). $A_1 \neq 0; A_3 = A_5 = 0; B_i = 0;$ 1.2). $B_1 \neq 0; B_3 = B_5 = 0; A_i = 0;$
- 2.1). $A_3 \neq 0; A_1 = A_5 = 0; B_i = 0;$ 2.2). $B_3 \neq 0; B_1 = B_5 = 0; A_i = 0;$
- 3.1). $A_5 \neq 0; A_1 = A_3 = 0; B_i = 0;$ 3.2). $B_5 \neq 0; B_1 = B_3 = 0; A_i = 0;$
- 4.1). $A_1 \neq 0; A_5 \neq 0; A_3 = 0; B_i = 0;$ 4.2). $B_1 \neq 0; B_5 \neq 0; B_3 = 0; A_i = 0;$
- 5.1). $A_1 \neq 0; A_3 \neq 0; A_5 \neq 0; B_i = 0;$ 5.2). $B_1 \neq 0; B_3 \neq 0; B_5 \neq 0; A_i = 0,$ (12)

где $i = 1, 3, 5$. Решения (1.1) – (4.2) могут быть определены аналитически. В случаях (5.1), (5.2) амплитуды колебаний $A_1, B_1, A_3, B_3, A_5, B_5$ определяются численно методом Ньютона из системы нелинейных алгебраических уравнений (11). В этом случае параметр ν варьируется с некоторым шагом.

Теперь исследуем нелинейные колебания оболочки с учетом диссипации энергии. В систему (5) введем слагаемые, которые описывают линейное демпфирование колебаний. Тогда эта система преобразуется к виду:

$$\ddot{f}_i + \xi_i \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i + f_i R_i(f_1, \dots, f_6) + G_i(f_1, \dots, f_6) + \chi_i N_x f_i = 0, \quad i = \overline{1, 6}. \quad (13)$$

В системе с диссипацией (13) существуют нелинейные моды $f_{2i-1} = \pm f_{2i}, \quad i = \overline{1, 3}$. Следуя методу гармонического баланса получаем:

$$A_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3A_j^2 + B_j^2) + \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) + B_i \xi_i \nu + G_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - \nu^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (3B_j^2 + A_j^2) - \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) - A_i \xi_i \nu + G_i^{(B)} = 0, \quad i = 1, 3, 5. \quad (14)$$

В системе (14) существуют следующие группы решений:

- 1). $A_1 \neq 0; B_1 \neq 0; A_3 = A_5 = 0; B_3 = B_5 = 0;$
- 2). $A_3 \neq 0; B_3 \neq 0; A_1 = A_5 = 0; B_1 = B_5 = 0;$
- 3). $A_5 \neq 0; B_5 \neq 0; A_1 = A_3 = 0; B_1 = B_3 = 0;$
- 4). $A_1 \neq 0; A_5 \neq 0; B_1 \neq 0; B_5 \neq 0; A_3 = 0; B_3 = 0;$
- 5). $A_1 \neq 0; A_3 \neq 0; A_5 \neq 0; B_1 \neq 0; B_3 \neq 0; B_5 \neq 0.$ (15)

Решения (15) системы (14) исследуются численно. Задавая параметр ν с

некоторым шагом, методом Ньютона определяются все неизвестные.

Рассмотрим режим бегущих волн в цилиндрической оболочке, который описывается системой (13). Для исследования этих движений воспользуемся методом гармонического баланса и колебания системы представим так:

$$f_i = A_i \cos(vt) + B_i \sin(vt), \quad f_{i+1} = A_i \sin(vt) + B_i \cos(vt), \quad i = 1, 3, 5. \quad (16)$$

Тогда амплитуды гармоник (16) описываются системой нелинейных алгебраических уравнений:

$$A_i \left(\omega_i^2 - v^2 + \eta_{ii} B_i^2 + \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (A_j^2 + B_j^2) \pm \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) \pm B_i \xi_i v + \tilde{G}_i^{(A)} = 0;$$

$$B_i \left(\omega_i^2 - v^2 + \eta_{ii} A_i^2 + \sum_{j=1,3,5} \eta_{ij} (A_j^2 + B_j^2) \pm \frac{1}{2} \chi_i N_1 \right) \pm A_i \xi_i v + \tilde{G}_i^{(B)} = 0, \quad i = 1, 3, 5, \quad (17)$$

В системе (17) существуют следующие группы решений:

- 1). $A_1 = B_1 \neq 0; A_3 = A_5 = B_3 = B_5 = 0;$
 - 2). $A_1 = B_1 \neq 0; A_5 = B_5 \neq 0; A_3 = B_3 = 0;$
 - 3). $A_1 = B_1 \neq 0; A_5 = B_5 \neq 0; A_3 = B_3 \neq 0.$
- (18)

Движения (18) исследуются при изменении частоты параметрической нагрузки v численным решением системы (17) методом Ньютона.

Численный анализ колебаний. Рассмотрим оболочку со следующими численными значениями параметров [6]: $h = 0,002$ м; $L = 0,4$ м; $R = 0,2$ м; $E = 2,1 \times 10^{11}$ Н/м²; $\mu = 0,3$; $\rho = 7850$ кг/м³; $\xi_i = 0,001 \omega_i / \omega_0$, $i = \overline{1,6}$; $\omega_0 = 3165,03$; $N_1 = 0,6 N_{cr}$; $N_{cr} = 2,54 \times 10^6$ Н/м. Из анализа частот линейных колебаний оболочки с представленными параметрами следует, что в дальнейшем исследовании будут учитываться моды колебаний, имеющие такие параметры волнообразования: $n_1 = 4$; $n_2 = 5$; $n_3 = 6$; $m = 1$.

Для представленных параметров оболочки проводился численный анализ нелинейных нормальных форм. На рис. 1 представлена амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), которая выражает зависимости $A_1(v)$, $B_1(v)$. Ветви АЧХ, соответствующие случаю 1.1), 1.2) из (12), когда в колебаниях участвует только одна из трех сопряженных форм колебаний обозначены символами $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$. Ветви $A_1^{(2)}$, $B_1^{(2)}$, отвечают случаю возбуждения двух сопряженных форм колебаний: 4.1), 4.2) из (12). Ветви $A_1^{(3)}$, $B_1^{(3)}$ отражают случай возбуждения трех сопряженных форм колебаний: 5.1), 5.2) в формулах (12). На рис. 3 представлена АЧХ, описывающая динамику системы с диссипацией (13).

Для подтверждения результатов аналитического анализа проводилось прямое численное интегрирование системы (9) при различных значениях час-

тот гармонического воздействия ν . Результаты расчетов представлены на рис. 1 точками, свидетельствуют о хорошем совпадении данных метода гармонического баланса и результатов прямого численного интегрирования.

Для исследования устойчивости параметрических колебаний производилось прямое численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (5) на интервалах времени t порядка 1000 периодов колебаний. Начальные условия определялись из уравнений (10), (16). На рис. 1 устойчивые движения представлены сплошной линией, а неустойчивые – пунктирной.

Исследовалось поведение динамической системы (5) при потере устойчивости нормальных форм. Для этого проводилось прямое численное интегрирование системы (5). Данные, представленные на рис. 2 а) соответствуют группе решений 1.1) из (12), при параметрах: $\nu = 1.18$, $A_1 = 0.3694$. На рис. 2 б) представлена динамика системы (5) после потери устойчивости решений 4.1) из (12) с параметрами: $\nu = 1.43$, $A_1 = 2.8494$, $A_5 = 2.6091$.

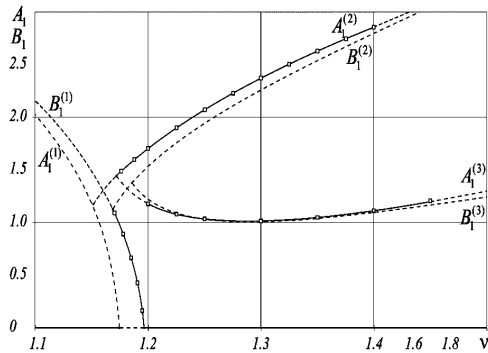
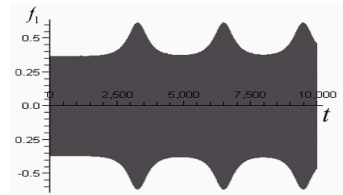
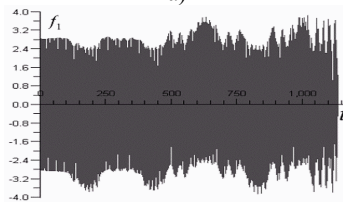


Рисунок 1 – АЧХ при движении на нормальной форме



а)



б)

Рисунок 2 – Поведение системы при потере устойчивости движения

Производился численный анализ режимов типа бегущих волн на основании методики, представленной выше. Результаты анализа представлены в виде АЧХ на рис. 4.

Выводы. Существует большой класс цилиндрических оболочек, для которых двух и трех модовые аппроксимации колебаний не достаточны для адекватного описания динамики. Это объясняется близостью собственных частот различных мод колебаний. В этом случае только многомодовые модели адекватно описывают колебания.

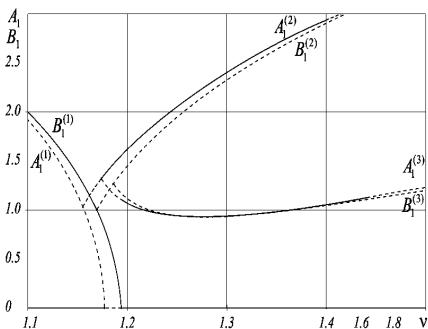


Рисунок 3 – АЧХ при движении на нормальной форме с учетом диссипации

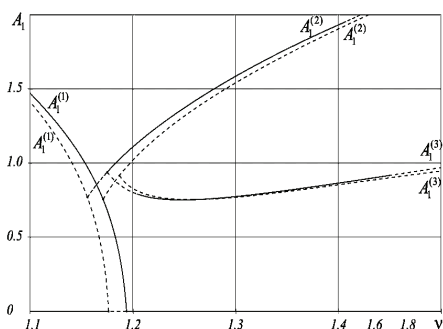


Рисунок 4 – АЧХ при движении в режиме бегущих волн

При многомодовом режиме колебаний оболочки было обнаружено, что существуют нелинейные моды, которые описываются прямыми линиями в конфигурационном пространстве. Подчеркнем, что одинаковые нелинейные моды существуют как в системе без диссипации, так и в системе с диссипацией. Существование таких нормальных форм объясняется циклической симметрией цилиндрических оболочек.

Список литературы: 1. Аврамов К. В. Нелинейные нормальные формы параметрических колебаний // ДНАНУ. – 2008. – № 11. – С. 41-47. 2. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 423 с. 3. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Краснополяская Т. С. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. – К.: Наукова думка, 1984. – 218 с. 4. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С., Подчасов Н. П. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. – К.: Выща школа, 1989. – 207 с. 5. Avramov K. Nonlinear modes of parametric vibrations and their applications to beams dynamics // Journal of Sound and Vibrations. – 2009. – 322. – P. 476-489. 6. Gonçalves P. B., Del Prado Z. J. G. N. Nonlinear Oscillations and Stability of Parametrically Excited Cylindrical Shells // Meccanica. – 2002. – V. 36. – P. 105-116. 7. Koval'chuk P. S., Kruk L. A. Forced nonlinear oscillations of cylindrical shells interacting with fluid flow // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – V. 265. – P. 245-268. 8. Kubenko V. D., Kovalchuk P. S. Nonlinear problems of oscillations of thin shells // International Applied Mechanics. – 1998. – V. 34, №8. – P. 703-728. 9. Kubenko V. D., Koval'chuk P. S., Kruk L. A. Non-linear interaction of bending deformations of free-oscillating cylindrical shells // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – V. 265. – P. 245-268. 10. Yamaki N. Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells. – North-Holland, Amsterdam. – 1984.

Поступила в редколлегию 20.06.2009