

**Ю.А. ПЛАКСИЙ**, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

## РАЗЛОЖЕНИЕ 5-ГО ПОРЯДКА ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КВАТЕРНИОНАХ В РЯД ПО СТЕПЕНЯМ КАЖУЩИХСЯ ПОВОРОТОВ

За допомогою методу обернення степеневих рядів для компонент вектору лінійного повороту на інтервалі  $[0, \Delta t]$  отримане розкладання часткового рішення кінематичного рівняння в кватерніонах у степеневий ряд по позірним поворотам. Цей ряд для векторної частини кватерніона повороту містить члени, що залежать від динамічних характеристик твердого тіла у вигляді співвідношень головних моментів інерції. Приведене розкладання може бути застосоване для отримання алгоритмів визначення орієнтації твердого тіла по позірним поворотам до четвертого порядку включно.

By means of a method of the inversion of degree series for a components of the vector of linear turn on an interval  $[0, \Delta t]$  decomposition of the particular solution of the kinematic equation in quaternions in the degree series of seeming turns is received. The degree series for a vector part quaternion turn contains members who depend on dynamic characteristics of a rigid body in the form of correlations of the main moments of inertia. The obtained decomposition can be used for construction of algorithms of definition of a rigid body orientation to the fourth order inclusive.

Решение задачи определения ориентации в бесплатформенных инерциальных навигационных системах (БИНС) основано на применении алгоритмов определения поворота, использующих первичную информацию о вращении твердого тела на такте  $[t_{n-1}, t_n]$  в виде приращений интегралов от проекций вектора абсолютной угловой скорости  $\vec{\omega}$  на связанные оси (кажущихся поворотов) [1]

$$\theta_{n,i}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i dt, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

При этом общее решение кинематического уравнения

$$\dot{A} = 0,5 A \circ \vec{\omega} \quad (2)$$

представляется в виде формулы сложения поворотов

$$A_n = A_{n-1} \circ \Delta A_n, \quad (3)$$

где  $A = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$  – кватернион ориентации,  $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $A_n = A(t_n)$ ,  $A_{n-1} = A(t_{n-1})$ ,  $\Delta A_n$  – частное решение уравнения (2) с начальным условием  $A(0) = (1, 0, 0, 0)^T$ ,  $\circ$  – знак кватернионного умножения.

Существующие алгоритмы определения поворота, как правило, являются результатом формальных разложений частного решения  $\Delta A_n$  в ряд, содержащий конечные разности «назад» вектора кажущегося поворота  $\vec{\theta}_n^* = (\theta_{n1}^*, \theta_{n2}^*, \theta_{n3}^*)^T$  различного порядка [1]. При этом не учитывается тот факт, что  $\omega_i$  являются решениями соответствующих динамических уравне-

ний.

Получим разложение частного решения  $\Delta l$  кинематического уравнения (2) на интервале  $[0, \Delta t]$  в виде степенного ряда в терминах кажущихся поворотов (1) с учетом динамических уравнений Эйлера

$$\dot{\omega}_1 = a_1 \omega_2 \omega_3 + m_1, \quad (1,2,3) \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\omega_i(0) = \omega_{i0}, \quad i = 1,2,3, \quad (5)$$

где  $a_1 = (I_2 - I_3)/I_1$  – динамический коэффициент,  $I_1, I_2, I_3$  – главные моменты инерции твердого тела ( $I_1 \geq I_2 \geq I_3$ ),  $m_1 = M_1/I_1$ ,  $M_1, M_2, M_3$  – проекции вектора главного момента  $\vec{M}$  на связанные оси,  $(1,2,3)$  – символ круговой перестановки индексов.

Примем, что на такте съема первичной информации (1) приведенные моменты  $m_i$  постоянны  $m_i = m_i(t_{n-1})$  и ограничены по величине:

$$|m_i| = O(\omega^2), \quad i = 1,2,3, \quad (6)$$

где  $\omega = \max_{t \in [t_{n-1}, t_n]} |\bar{\omega}(t)|$ .

Интегрируя уравнение (4) на такте  $[0, t]$ , получим интегральное уравнение

$$\omega_1(t) = \omega_{10} + \int_0^t (a_1 \omega_2 \omega_3 + m_1) d\tau, \quad (1,2,3), \quad (7)$$

решение которого  $\omega_1(t)$  удовлетворяет динамическому уравнению (4) с начальным условием (5). Применим к уравнению (7) метод последовательных приближений Пикара, получим:

$$\begin{aligned} \omega_1 = & \omega_{10} + (a_1 \omega_{20} \omega_{30} + m_1)t + \frac{1}{2} a_1 (\omega_{10} (a_2 \omega_{30}^2 + a_3 \omega_{20}^2) + m_2 \omega_{30} + m_3 \omega_{20})t^2 + \\ & + \frac{1}{6} a_1 (4a_2 a_3 \omega_{10}^2 \omega_{20}^2 + (a_1 \omega_{20} \omega_{30} + m_1)(a_2 \omega_{30}^2 + a_3 \omega_{20}^2) + 3\omega_{10} (a_2 m_3 \omega_{30} + \\ & + a_3 m_2 \omega_{20}) + 2m_2 m_3)t^3 + O(t^4). \end{aligned} \quad (8)$$

Введем вектор линейного поворота на интервале  $[0, \Delta t]$ :

$$\bar{\theta}_0 = (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30})^T \Delta t = (\theta_{01}, \theta_{02}, \theta_{03})^T. \quad (9)$$

Проинтегрируем выражение (8) на промежутке  $[0, \Delta t]$ , получим

$$\begin{aligned} \theta_1^* = & \int_0^{\Delta t} \omega_1(t) d\tau = \theta_{01} + \frac{1}{2} (a_1 \theta_{02} \theta_{03} + \mu_1) + \frac{1}{6} a_1 (\theta_{03} (a_2 \theta_{01} \theta_{03} + \mu_2) + \\ & + \theta_{02} (a_3 \theta_{01} \theta_{03} + \mu_3)) + \frac{1}{24} a_1 (4a_2 a_3 \theta_{01}^2 \theta_{02} \theta_{03} + (a_1 \theta_{02} \theta_{03} + \mu_1)(a_2 \theta_{03}^2 + a_3 \theta_{02}^2) + \\ & + 3\theta_{01} (a_2 \mu_3 \theta_{030} + a_3 \mu_2 \theta_{02}) + 2\mu_2 \mu_3) + O(\theta_0^5), \end{aligned} \quad (10)$$

где обозначено  $\mu_i = m_i(\Delta t)^2$ ,  $i = 1,2,3$ .

Нетрудно видеть, что в условиях дополнительных ограничений на  $\mu_i$

$$\mu_1 \leq \theta_0^2 - a_1 \theta_{02} \theta_{03}, \quad (1,2,3) \quad (11)$$

ряд (10) мажорируется рядом  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta_0^k}{k}$ , который сходится при  $\theta_0 \leq 1$ , где

$$\theta_0 = \left| \bar{\theta}_0 \right| = (\theta_{01}^2 + \theta_{02}^2 + \theta_{03}^2)^{1/2}.$$

Перепишем ряд (10) в виде

$$\begin{aligned} \theta_{01} = & \theta_{01}^* - \frac{1}{2}(a_1 \theta_{02} \theta_{03} + \mu_1) - \frac{1}{6} a_1 (\theta_{01} (a_2 \theta_{03}^2 + a_3 \theta_{02}^2) + (\mu_2 \theta_{03} + \mu_3 \theta_{02})) - \\ & - \frac{1}{24} a_1 (4a_2 a_3 \theta_{01}^2 \theta_{02} \theta_{03} + (a_1 \theta_{02} \theta_{03} + \mu_1)(a_2 \theta_{03}^2 + a_3 \theta_{02}^2) + 3\theta_{01} (a_2 \mu_3 \theta_{03} + \\ & + a_3 \mu_2 \theta_{02}) + 2\mu_2 \mu_3) + O(\theta_0^5) \quad (1,2,3) \end{aligned}$$

и применим к нему процедуру метода последовательных приближений, полагая в качестве начального приближения  $\theta_{01} = \theta_{01}^*$ , получим:

$$\begin{aligned} \theta_{01} = & \theta_{01}^* - \frac{1}{2}(a_1 \theta_2^* \theta_3^* + \mu_1) + \frac{1}{12} a_1 (\theta_1^* (a_2 \theta_3^{*2} + a_3 \theta_2^{*2}) + (\mu_2 \theta_3^* + \mu_3 \theta_2^*)) - \\ & - \frac{1}{24} a_1 (\theta_1^* (a_2 a_3 \theta_1^* \theta_2^* \theta_3^* + a_2 \mu_3 \theta_3^* + a_3 \mu_2 \theta_2^*) + \mu_2 \mu_3) + O(\theta^{*5}), \quad (1,2,3) \quad (12) \end{aligned}$$

В условиях принятых допущений (6), (11) ряд (12) сходится при любых  $\theta_{0i}^*$ , поскольку сходится его мажорантный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{*k}}{k!}$ .

Вспользуемся полученными разложениями для  $\omega_i(8)$ ,  $\theta_i^*(10)$  и  $\theta_{0i}$  (12) и представлением частного решения кинематического уравнения (2) в виде ряда Пеано [1]:

$$\Delta \Lambda = 1 + \frac{1}{2} \bar{\theta}^* + \frac{1}{4} \int_0^{\Delta t} A_1 dt + \frac{1}{8} \int_0^{\Delta t} A_2 dt + \frac{1}{16} \int_0^{\Delta t} A_3 dt + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \int_0^{\Delta t} A_k dt + \dots, \quad (13)$$

где  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$  – кватернионы, для которых, начиная с  $k = 2$  имеет место рекуррентная формула  $A_{k+1} = \int_0^{\Delta t} A_k dt \circ \bar{\omega}$ ,  $A_1 = \bar{\theta}^* \times \bar{\omega} - \bar{\theta}^* \bar{\omega}$ .

Подстановка в формулу (13) выражений для  $\theta_i^*$  и  $\omega_i$  в виде рядов (8), (10) позволяет представить подынтегральные выражения в виде функций от времени, что дает возможность взять аналитически все интегралы и получить представление частного решения уравнения (2) на интервале  $[0, \Delta t]$  в виде ряда по степеням компонент вектора линейного поворота  $\bar{\theta}_0$  (9):

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_0 = & 1 - \frac{1}{8}\theta_0^2 - \frac{1}{8}(a_1 + a_2 + a_3)\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03} - \frac{1}{8}(\mu_1\theta_{01} + \mu_2\theta_{02} + \mu_3\theta_{03}) - \\
& - \frac{1}{24}(a_1 + a_2 + a_3)(a_1\theta_{02}^2\theta_{03}^2 + a_2\theta_{01}^2\theta_{03}^2 + a_3\theta_{01}^2\theta_{02}^2 + \mu_1\theta_{02}\theta_{03} + \mu_2\theta_{01}\theta_{03} + \\
& + \mu_3\theta_{01}\theta_{02}) + \frac{1}{96}(a_1^2\theta_{02}^2\theta_{03}^2 + a_2^2\theta_{01}^2\theta_{03}^2 + a_3^2\theta_{01}^2\theta_{02}^2) - \frac{1}{48}(a_1\mu_1\theta_{02}\theta_{03} + \\
& + a_2\mu_2\theta_{01}\theta_{03} + a_3\mu_3\theta_{01}\theta_{02}) - \frac{1}{32}(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) - \frac{1}{32}\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}\theta_0^2(a_1 + a_2 + a_3 + \\
& + \frac{1}{3}a_1a_2a_3) - \frac{1}{96}a_1\theta_{02}\theta_{03}(2a_1 + 3a_2 + 3a_3)(\mu_2\theta_{03} + \mu_3\theta_{02}) - \frac{1}{96}a_2\theta_{01}\theta_{03}(3a_1 + \\
& + 2a_2 + 3a_3)(\mu_1\theta_{03} + \mu_3\theta_{01}) - \frac{1}{96}a_3\theta_{01}\theta_{02}(3a_1 + 3a_2 + 2a_3)(\mu_1\theta_{02} + \mu_2\theta_{01}) - \\
& - \frac{1}{48}(a_1 + a_2 + a_3)(\mu_2\mu_3\theta_{01} + \mu_1\mu_2\theta_{03} + \mu_1\mu_3\theta_{02}) + \frac{1}{384}\theta_0^4 + \frac{1}{192}\theta_0^2(\mu_1\theta_{01} + \\
& + \mu_2\theta_{02} + \mu_3\theta_{03}) + \frac{1}{192}(a_1 + a_2 + a_3)\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03}\theta_0^2 + O(\theta_0^5);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_1 = & \frac{1}{2}\theta_1^* + \frac{1}{24}(\mu_3\theta_{02} - \mu_2\theta_{03}) + \frac{1}{24}\theta_{01}(a_3\theta_{02}^2 - a_2\theta_{03}^2) - \frac{1}{48}\theta_{01}\theta_0^2 + \\
& + \frac{1}{48}a_1\theta_{02}\theta_{03}(a_3\theta_{02}^2 - a_2\theta_{03}^2) - \frac{1}{64}\theta_{02}\theta_{03}(\theta_{01}^2(a_1 + a_2 + a_3) + \theta_0^2) - \\
& - \frac{1}{192}\theta_{02}\theta_{03}(\theta_{01}^2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1\theta_0^2) + \frac{1}{48}\mu_1(a_3\theta_{02}^2 - a_2\theta_{03}^2) - \frac{1}{96}\mu_1\theta_0^2 + \\
& + \frac{1}{48}\theta_{01}(a_3\mu_2\theta_{02} - a_2\mu_3\theta_{03}) - \frac{1}{48}\mu_1\theta_{01}^2 - \frac{1}{48}\theta_{01}(\mu_2\theta_{02} + \mu_3\theta_{03}) + \\
& + \frac{1}{160}a_1\theta_{01}(a_3^2\theta_{02}^4 - a_2^2\theta_{03}^4) - \frac{1}{240}a_1\theta_{01}(a_3\theta_{02}^4 + a_2\theta_{03}^4) + \frac{1}{960}\theta_{01}(a_2\theta_{03}^4 - \\
& - a_3\theta_{02}^4) + \frac{1}{480}a_2a_3\theta_{01}^3(a_3\theta_{02}^2 - a_2\theta_{03}^2) + \frac{1}{960}a_1\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2 + a_3\theta_{02}^2) - \\
& - \frac{7}{960}a_3\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2 + a_3\theta_{02}^2) - \frac{1}{160}a_2a_3\theta_{01}^3\theta_0^2 + \frac{1}{160}a_2a_3\theta_{01}^5 + \frac{1}{960}\theta_{01}^3(a_2\theta_{03}^2 - \\
& - a_3\theta_{02}^2) - \frac{1}{64}a_1^2\theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2 - \frac{3}{160}a_1(a_2 + a_3)\theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2 + \frac{1}{960}(a_2 - a_3) \times \\
& \times \theta_{01}\theta_{02}^2\theta_{03}^2 + \frac{1}{3840}\theta_{01}\theta_0^4 - \frac{1}{32}a_1\mu_1\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03} + \frac{7}{480}(a_2 + a_3)\mu_1\theta_{01}\theta_{02}\theta_{03} + \\
& + \frac{11}{480}a_1\theta_{02}\theta_{03}(a_3\mu_2\theta_{02} - a_2\mu_3\theta_{03}) - \frac{1}{160}a_1(a_2\mu_2\theta_{03}^2 - a_3\mu_3\theta_{02}^2) + \frac{1}{480}a_2a_3\theta_{01}^3 \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times (\mu_3 \theta_{02} - \mu_2 \theta_{03}) - \frac{1}{80} a_1 \theta_{02} \theta_{03} (\mu_2 \theta_{02} + \mu_3 \theta_{03}) - \frac{1}{240} a_1 (\mu_2 \theta_{03}^3 + \mu_3 \theta_{02}^3) - \\
& - \frac{1}{96} a_1 \theta_{01}^2 (\mu_2 \theta_{02} + \mu_3 \theta_{03}) - \frac{1}{48} \theta_{01}^2 (a_3 \mu_2 \theta_{02} + a_2 \mu_3 \theta_{03}) - \frac{1}{960} \theta_{01}^2 (\mu_3 \theta_{02} - \\
& - \mu_2 \theta_{03}) + \frac{1}{60} \mu_1 (a_3 \mu_2 \theta_{02} - a_2 \mu_3 \theta_{03}) - \frac{1}{120} \mu_1 (\mu_2 \theta_{02} + \mu_3 \theta_{03}) - \frac{1}{64} \mu_1^2 \theta_{01}^2 + \\
& + \frac{1}{240} \theta_{01} (a_2 \mu_3^2 - a_3 \mu_2^2) - \frac{7}{960} \theta_{01} (\mu_2^2 + \mu_3^2) + O(\theta_0^6), \quad (1,2,3) \quad (14)
\end{aligned}$$

Теперь можно сделать обратный переход к величинам  $\theta^*$ , используя полученный ряд (12). В результате найдем выражения для компонент кватерниона поворота  $\Delta A = (\Delta \lambda_0, \Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2, \Delta \lambda_3)^T$  на интервале  $[0, \Delta t]$ :

$$\begin{aligned}
\Delta \lambda_0 &= 1 - \frac{1}{8} \theta^{*2} + \frac{1}{384} \theta^{*4} + O(\theta^{*5}); \\
\Delta \lambda_1 &= \frac{1}{2} \theta_1^* (1 - \frac{1}{24} \theta^{*2} - \frac{1}{12} b_1) - \frac{1}{24} \eta_1 + \frac{1}{3840} \theta_1^* \theta^{*4} + \frac{1}{1440} \theta_1^* (a_1 b_1 (a_2 \theta_3^{*2} + \\
& a_3 \theta_2^{*2}) + a_2 b_2 \theta_3^{*2} - a_3 b_3 \theta_2^{*2}) + \frac{1}{720} a_2 a_3 b_1 \theta_1^{*3} + \frac{1}{480} \theta_1^* (a_2 b_3 \theta_3^{*2} - a_3 b_2 \theta_2^{*2}) + \\
& + \frac{1}{960} b_1 \theta_1^* \theta^{*2} + \frac{1}{1440} (b_2 \mu_2 \theta_3^* - b_3 \mu_3 \theta_2^* + \theta_1^* (a_3 \mu_2^2 - a_2 \mu_3^2) + a_1 (a_2 \mu_2 \theta_3^{*2} - \\
& - a_3 \mu_3 \theta_2^{*2})) + \frac{1}{960} \eta_1 \theta^{*2} + \frac{1}{720} a_1 \rho_1 \theta_2^* \theta_3^* + \frac{1}{480} (\mu_1 \rho_1 - a_1 \gamma_1 - a_2 a_3 \eta_1 - \theta_1^* (\mu_2^2 + \\
& + \mu_3^2)) + \frac{1}{360} \mu_1 ((a_2 + a_3) \theta_1^* \theta_2^* \theta_3^* - \gamma_1) - \frac{1}{240} \theta_1^{*2} (a_2 \mu_2 \theta_3^* + a_3 \mu_3 \theta_2^*) + O(\theta^{*6}), \\
& \hspace{20em} (1,2,3) \quad (15)
\end{aligned}$$

где обозначено  $\theta^{*2} = \theta_1^{*2} + \theta_2^{*2} + \theta_3^{*2}$ ,

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_2 \theta_3^{*2} - a_3 \theta_2^{*2}, \quad \eta_1 = \mu_2 \theta_3^* - \mu_3 \theta_2^*, \quad \gamma_1 = a_2 \mu_3 \theta_3^* - a_3 \mu_2 \theta_2^*, \\
\rho_1 &= \mu_2 \theta_2^* + \mu_3 \theta_3^*, \quad (1,2,3). \quad (16)
\end{aligned}$$

Полученное разложение частного решения кинематического уравнения (2) имеет пятый порядок по  $\theta^*$  и представлено в виде степенного ряда в терминах кажущихся поворотов (1), относящихся только к одному такту изменений, и содержит члены, зависящие от динамических коэффициентов  $a_1, a_2, a_3$ , причем минимальный порядок этих членов по  $\theta^*$  равен трем. В практическом плане это решение может быть использовано для исследования влияния динамических характеристик на процессы ориентации твердого тела и полагаться в основу построения алгоритмов определения поворота, имеющих порядок до четвертого включительно, а также для получения аналитических локальных оценок точности.

Сравнение формул (15) с разложениями компонент кватерниона пово-

рота  $\Delta l$  в ряды по степеням компонент вектора истинного поворота  $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  на интервале  $[0, \Delta l]$

$$\Delta \lambda_0 = \cos(\theta/2) = 1 - \frac{1}{8} \theta^2 + \frac{1}{384} \theta^4 + O(\theta^5),$$

$$\Delta \lambda_1 = \frac{\theta_1}{\theta} \sin(\theta/2) = \frac{1}{2} \theta_1 \left( 1 - \frac{1}{24} \theta^2 + \frac{1}{1920} \theta^4 \right) + O(\theta^6), \quad (1,2,3), \quad (17)$$

где  $\theta = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}$ , позволяет сделать вывод, что соответствующие кватернионы поворота (15) и (17) в пределах рассматриваемого пятого порядка имеют сходную структуру для скалярной части и отличаются только векторными частями. В силу этого механическая подстановка в (17) вместо  $\theta_i$  значений кажущихся поворотов  $\theta_i^*$  приводит прежде всего к искажению векторной части кватерниона поворота.

**Список литературы:** 1. В.Н.Бранец, И.П.Шмыглевский Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. Наука, 1973. – 320 с.

*Поступила в редколлегию 12.11.2009*