

В.А.ВАНИН, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А.ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

СОЛИТОНЫ РАССЕЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПРУЖИНЕ

Показано, що низькочастотні нелінійні коливання циліндричної пружини описуються рівняннями Кортевега – де Фриза. Отримані формули, що пов'язують амплітуду, енергію та імпульс солітона зі швидкістю його руху по гвинтовому стрижню.

It is shown, that the low-frequency non-linear oscillations of the cylindrical spring have been described by the equations of Kortevæg – de Vries. The formulae relating the amplitude, the energy and the pulse of the soliton with its traveling Speed along the spiral rod have been gained.

Введение. В работе [1] на основе критического анализа и синтеза известных методов, описанных в [2-6], получена новая математическая модель связанных нелинейных колебаний, возникающих в винтовом цилиндрическом стержне (пружине). Известно (смотри [7-9]), что многие автоколебательные процессы, происходящие в континуальных системах, описываются простейшим одномерным уравнением Кортевега–де Фриза

$$u'_t + (u + u^2 + u''_{xx})'_x = 0, \quad (1)$$

где u – амплитуда волны; t – время, x – пространственная координата (в уравнении (1) все эти величины приведены к безразмерному виду). Устойчивыми решениями уравнения (1) являются уединенные волны переноса $u = \Psi(x - vt)$, движущиеся со скоростью v , зависящей от амплитуды. Эти волны получили название *классические солитоны Рассела*, а их амплитудная функция $\Psi(x)$ описывается равенством

$$\Psi(x) = 1.5(v-1) / ch^2(0.5\sqrt{v-1} \cdot x). \quad (2)$$

В некоторых случаях процесс автоколебаний описывается модифицированным уравнением Кортевега – де Фриза

$$u'_t + (u + u^3 + u''_{xx})'_x = 0, \quad (1 \text{ а})$$

а амплитудная функция *модифицированного солитона Рассела* имеет вид

$$\Psi(x) = \sqrt{2(v-1)} / ch(\sqrt{v-1} \cdot x). \quad (2 \text{ а})$$

В настоящее время считается, что изучение уединенных волн переноса даст ключ к решению универсальных проблем физики, поэтому они активно исследуются в разных областях науки, где их удастся обнаружить; начиная с 1985-го года в мире ежегодно появляется более 2-ух тысяч публикаций по солитонной тематике. В данной работе показано, что такие волны могут возникать и в винтовых цилиндрических стержнях, колебания которых описываются моделью из статьи [1]. Заметим, что цилиндрический винтовой стержень (пружина) имеет, как и кристаллическая решетка, повторяющуюся про-

странственную структуру, что делает задачу изучения его автоколебаний особенно важной как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Выбор математической модели. Полученная в [1] динамическая модель пружины учитывает перемещения 6-ти координат поперечного сечения стержня (рис.1), которые естественным образом объединяются в две группы: x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 , с условными названиями «продольные колебания» и «поперечные колебания». Предполагается, что сечения стержня идентичны, а его

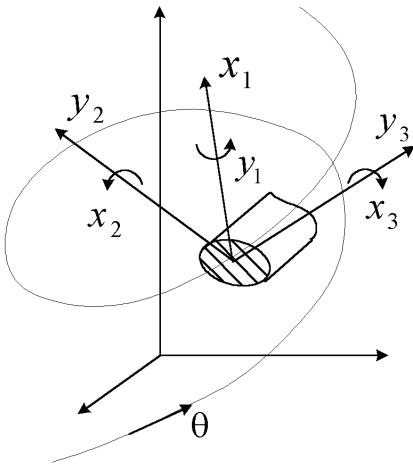


Рисунок 1 – Координаты сечения

колебания» и «поперечные колебания». Предполагается, что сечения стержня идентичны, а его винтовая ось имеет к началу колебаний постоянный угол подъема δ_0 . Величина $\text{tg } \delta_0$ определяет относительное начальное кручение, а $z^{-1} = d/D$ (где d – диаметр поперечного сечения, D – диаметр навивки, z – индекс) – относительную начальную кривизну стержня. Далее рассматриваются стержни круглого или эллиптического сечения с малой кривизной ($z > 7$) и малым начальным кручением ($\delta_0 < 5^\circ$). Основные результаты, полученные в статье, остаются справедливыми и для стержней с квадратным или прямоугольным поперечным сечением.

В данной работе используется частный случай модели [1], актуальный для описания связанных низкочастотных колебаний пружины. Матричная форма соответствующих уравнений была опубликована в [6] и имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B & \Omega \\ \Omega & -B^T \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T & -\Omega \\ -\Omega & -B \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где Vx, Vy – векторы, составленные из скоростей изменения координат x или y ; Qx, Qy – отвечающие им упругие силы и моменты сил q_j или f_j ; Mx, My, Cx, Cy – диагональные матрицы инерционных коэффициентов и коэффициентов податливости сечения; I, Θ – единичная и нулевая матрицы 3-го порядка; B, Ω – недиагональные матрицы линейной и нелинейной связи координат:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -(tg\delta_0 \pm cx_3 \cdot q_3) & 0 \\ tg\delta_0 \pm cx_3 \cdot q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

знак « + » соответствует пружине растяжения, знак « - » – сжатия. Элементы диагональных матриц $Mx = \text{diag}(mx_1, mx_2, mx_3)$; $My = \text{diag}(my_1, my_2, my_3)$; $Cx = \text{diag}(cx_1, cx_2, cx_3)$; $Cy = \text{diag}(cy_1, cy_2, cy_3)$ вычисляются по формулам, обобщающим приведенные ранее в работе [1] для сечения круглой формы:

$$mx_1, my_2, my_3 = m = \Delta; \quad mx_2 = \Delta^3/(4z^2); \quad my_1 = \Delta/(4z^2); \quad mx_3 = \Delta(1 + \Delta^2)/(4z^2);$$

$$cx_1, cy_2 = (1 + \mu)/(2z^2\Delta); \quad cx_2, cy_1 = 1/\Delta; \quad cx_3 = 0,5(1 + \mu)(1 + \Delta^2)/\Delta^3; \quad cy_3 = (4z^2\Delta)^{-1},$$

где μ – коэффициент Пуассона; Δ – коэффициент овализации сечения (рис. 2).

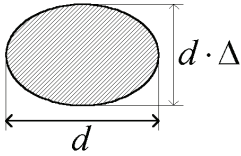


Рисунок 2 – Форма сечения

Модель (3) оперирует с безразмерными величинами. Нормировки выбраны так, что радиус витка пружины R (начальный радиус кривизны) равняется 1 и продолжительность распространения волны поперечной деформации по отрезку прямого стержня длиной R также равна 1. Нормировочные множители для сил δq и времени δT находятся по формулам

$$\delta q = 4z^2/(E \cdot S); \quad \delta T = \sqrt{E/\rho}/(2z \cdot R),$$

где E – модуль упругости; ρ – плотность материала стержня; S – площадь его сечения.

Моменты сил перед нормировкой дополнительно делятся на радиус витка R .

Постановка задачи. В работе [1] показано, что среди простых волн малой амплитуды, возникающих после линеаризации модели (3), (4) и имеющих форму

$$Vx, Vy, Qx, Qy \sim \exp(i \cdot (\omega\tau + \lambda\theta)),$$

различают колебания низкой, средней и высокой частоты. Этим колебаниям отвечают решения характеристического уравнения

$$\det \begin{bmatrix} i\omega Mx & \Theta & i\lambda I - B & \Omega \\ \Theta & i\omega My & \Omega & i\lambda I + B^T \\ i\lambda I + B^T & -\Omega & i\omega Cx & \Theta \\ -\Omega & i\lambda I - B & \Theta & i\omega Cy \end{bmatrix} = 0, \quad (6)$$

где, в силу условия $cx_3 \cdot |q_3| \leq tg \delta_0$, все элементы матрицы Ω считаются постоянными величинами. Колебаниям низкой частоты отвечают нижние ветви характеристического уравнения (рис. 3), причем точкам первого квадранта соответствуют гармонические, а третьего квадранта – экспоненциальные бегущие волны. Заметим, что для всех этих колебаний существенным

является только изменение кручения χ_3 стержня, а остальными нелинейными факторами, учитываемыми в модели [1], здесь допустимо пренебречь.

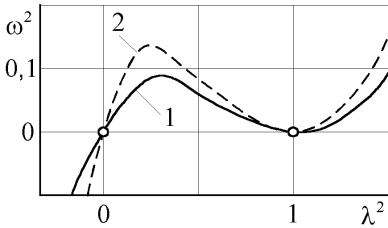


Рисунок 3 – Нижние ветви характеристического уравнения (1 – продольные, 2 – поперечные колебания)

Покажем, что связанные нелинейные свободные колебания малой частоты описываются КДФ – уравнением вида (1) и найдем основные параметры солитонов, которые можно будет наблюдать в длинных пружинах. При этом, поскольку длинные пружины сжатия без использования направляющих оказываются неустойчивыми, в данном исследовании мы ограничимся анализом пружин растяжения.

Аппроксимация характеристического уравнения. Для решения поставленной задачи раскроем определитель в равенстве (6) и упростим соотношения, используя комплекс аналитических и численно-аналитических методов.

Известно (смотри, например, работу [10]), что индекс пружины оказывает слабое влияние на положение нижних ветвей ее характеристического уравнения; здесь инерционность сечения при изгибе и кручении, а также его податливость при сжатии и сдвиге, которые зависят от величины индекса, в первом приближении допустимо не учитывать. В работе [11] для пружины с очень большим индексом (там принято $z = \infty$), изготовленной из проволоки круглого сечения, порядок определителя в равенстве (6) удалось понизить с 12-го до 4-го. Используя те же алгебраические приемы, но для произвольного сечения стержня, мы получили следующий результат:

$$\begin{vmatrix} -(1-\lambda^2+l^2) & (cx_3+\lambda^2cx_2)\cdot m\cdot\omega^2/\lambda^2 & l\cdot m\cdot\omega^2/\lambda^2 & 2l\cdot m\cdot\omega^2 \\ 1-\lambda^2-l^2 & -(1-\lambda^2)(1-\lambda^2+l^2) & 0 & -l\cdot\omega^2/\lambda^2\cdot m\cdot(\lambda^2+1) \\ l\cdot cy_1 & (-\lambda^2(cx_2+cy_1)+cy_1-cx_3)\cdot l & -(1-\lambda^2+l^2) & (1+\lambda^2)\cdot cy_1 \\ 0 & -(\lambda^2cx_2+cx_3)\cdot l & 1-\lambda^2-l^2 & -(1-\lambda^2)(1-\lambda^2+l^2) \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

где обозначено $m = mx_1, my_2, my_3 = \Delta$; $l = \text{tg } \delta = \text{tg } \delta_0 + cx_3 \cdot q_3$.

Уравнение (7) является относительно частоты ω биквадратным и в области малых частот имеет аналитические решения

$$\omega^2 \approx (m \cdot cy_1)^{-1} \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda^2 + l^2)^2 / (1 + \lambda^2) \quad \text{и}$$

$$\omega^2 \approx (m \cdot cx_3)^{-1} \cdot \lambda^2 \cdot (1 - \lambda^2 + l^2)^2 / (1 + \mu + \lambda^2),$$

или, после извлечения корней из обеих частей уравнения,

$$\omega \approx \lambda \cdot (1 - 1.5 \cdot \lambda^2 + l^2) \quad \text{и}$$

$$\omega \approx \lambda \cdot (1 - (1 + 0.5 / (1 + \mu)) \cdot \lambda^2 + l^2) / \sqrt{0.5(1 + \mu)(1 + 1 / \Delta^2)}, \quad (8)$$

где μ – коэффициент Пуассона, а волновое число удовлетворяет неравенству $|\lambda| < 0,3$.

Далее результаты (8), соответствующие модели первого приближения, были уточнены. Влияние индекса учтено за счет использования поправочных множителей:

$$\omega \approx \lambda \cdot (1 + l^2 - 1.5 \cdot \lambda^2) \cdot (1 - 1/(8z^2)), \quad (9)$$

$$\omega \approx \lambda \cdot (1 + l^2 - (1 + 0.5/(1 + \mu)) \cdot \lambda^2) \cdot (1 - 1/(4z^2)) / \sqrt{0.5(1 + \mu)(1 + 1/\Delta^2)}, \quad (10)$$

величина которых была определена путем сопоставления формул (9), (10) с результатами численного решения характеристического уравнения (7); метод решения описан в [1]. В результате, для нижней ветви, отвечающей продольным колебаниям пружины, в области малых волновых чисел $|\lambda| < 0,3$ оказалась справедливой аппроксимация

$$\omega \approx \lambda \cdot (1 + l^2 - (1 + 0.5/(1 + \mu)) \cdot \lambda^2) \cdot k / \sqrt{1 + \mu}, \quad (11)$$

где поправочный коэффициент $k = (1 - 1/(4z^2)) / \sqrt{0.5(1 + \Delta^2)}$.

Нелинейное уравнение связанных колебаний. Учтем, что для продольных колебаний нижней ветви существенные значения имеют только три величины, **изменяющиеся синхронно**: скорость продольного перемещения V_{x_1} , перерезывающая сила q_1 и момент кручения q_1 ; остальные три динамических параметра оказываются меньше указанных на порядок и более. Поэтому эти колебания пружины допустимо сводить к изменению только одной величины – момента q_3 , а равенство (11) оказывается характеристическим для следующего уравнения в частных производных:

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\sqrt{1 + \mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + \frac{\partial(l^2(q_3)q_3)}{\partial x} + (1 + 0.5/(1 + \mu)) \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right],$$

или, с учетом условия

$$l^2 = (tg \delta_0 + cx_3 \cdot q_3)^2 \approx tg^2 \delta_0 + 2 \cdot tg \delta_0 \cdot cx_3 \cdot q_3, \quad (12)$$

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\cos^2 \delta_0 \sqrt{1 + \mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + cx_3 \sin 2\delta_0 \frac{\partial(q_3^2)}{\partial x} + (1 + 0.5/(1 + \mu)) \cos^2 \delta_0 \cdot \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right]. \quad (13)$$

Покажем, что дифференциальное соотношение (13) является КДФ – уравнением вида (1). Для этого достаточно выполнить следующие замены:

$$u = q_3 \cdot (\sin 2\delta_0 \cdot cx_3); \quad \xi = x / (\sqrt{(1 + 0.5/(1 + \mu))} \cdot \cos \delta_0); \\ \xi = t \cdot k / (\sqrt{1 + \mu} \cos^2 \delta_0), \quad (14)$$

и мы получим уравнение

$$u'_{\xi} + (u + u^2 + u''_{\xi\xi})'_{\xi} = 0. \quad (15)$$

Отметим, что при колебаниях винтового стержня в соответствии с уравнением (15) величина $\Delta \chi_3 = \sin 2\delta_0$ отвечает изменению его кручения, причем внутри солитона угол наклона винтовой оси увеличивается.

Параметры классического солитона Рассела. Форма солитона (рис. 4) определяется двумя параметрами: амплитудой A изменения кручения $\Delta\chi_3$ и так называемой «эффективной длиной солитона» $2L$; после учета замен (14) получаем:

$$A = 1.5 \cdot (v-1) / \sin 2\delta_0; \quad 2L = \cos \delta_0 \cdot 2\sqrt{(1+0.5/(1+\mu))/(v-1)}, \quad (16)$$

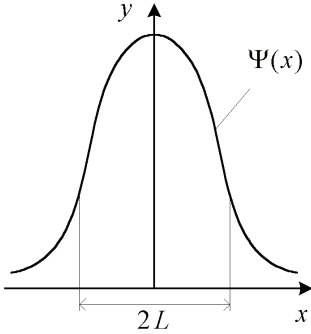


Рисунок 4 – Амплитудная функция солитона Рассела

где v – относительная скорость солитона. Заметим, что значение $v=1$ соответствует скорости a_0 распространения по данной пружине длинной линейной волны продольной деформации; приближенное значение этой скорости можно найти по формулам работы [12], где используется модель эквивалентного стержня:

$$a_0 = 2\pi R i_6 \sqrt{Z_{np} / m_{np}},$$

i_6, m_{np} – число витков и масса пружины; Z_{np} – коэффициент жесткости пружины при ее растяжении.

Условие $cx_3 \cdot |q_3| \ll \text{tg } \delta_0$ эквивалентно неравенству $1,5(v-1) \ll 2\sin^2 \delta_0$, откуда получаем следующее ограничение для длины солитона:

$$2L \gg \sqrt{3 \cdot (1+0,5/(1+\mu))} / \text{tg} \delta_0 > 2 / \text{tg} \delta_0. \quad (16)$$

Анализ полученных результатов показывает, что

- скорость солитона близка к скорости a_0 ;
- амплитуда солитона определяется скоростью его движения;
- эффективная длина солитона составляет 10 витков пружины и более;
- общее растяжение ΔS пружины для классического солитона Рассела зависит от его скорости и пропорционально корню из амплитуды A :

$$\Delta S = x_1(+\infty) - x_1(-\infty) = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1,5(v-1) / \sin 2\delta_0}{\text{ch}^2(0,5\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{3\sqrt{v-1}}{\sin 2\delta_0} \cdot R \sim \sqrt{A},$$

где R – радиус навивки пружины;

- энергия солитона пропорциональна величине $A^{3/2}$. Действительно, потенциальная энергия этой волны, в основном, связана с кручением проволоки:

$$\begin{aligned} \Pi &= 0.5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^3 cx_j q_j^2(x) + \sum_{j=1}^3 cy_j f_j^2(x) \right) dx \approx 0.5 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} cx_3 q_3^2(x) dx = \\ &= \frac{0.5}{cx_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(9/4)(v-1)^2 / \sin^2 2\delta_0}{\text{ch}^4(0,5\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{3(v-1)^{3/2}}{cx_3 \sin^2 2\delta_0} = \frac{A^{3/2}}{cx_3 \sqrt{3 \sin 2\delta_0}}, \end{aligned}$$

а кинетическая энергия здесь равна потенциальной энергии;

- кроме энергии солитон переносит импульс P_c , направленный вдоль

оси пружины, и момент количества движения J_c относительно этой оси:

$$P_c = \int_{-\infty}^{+\infty} mx_1 \cdot Vx_1(x) dx; \quad J_c = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} my_3 \cdot Vy_3(x) dx;$$

данные величины пропорциональны растяжению ΔS витков пружины.

Если стержень имеет круглое поперечное сечение, то переход к размерным величинам приводит к следующим формулам для энергии и импульса солитона:

$$E_M = \frac{\pi}{8(1+\mu)z\sqrt{3\sin 2\delta_0}} G \cdot d^3 \cdot A^{3/2}; \quad P_c = \frac{3\pi/4}{\sqrt{3\sin 2\delta_0}} d^3 \cdot \sqrt{\rho \cdot G \cdot A},$$

где G – модуль сдвига.

Например, если пружина изготовлена из стальной проволоки диаметром $d = 2$ мм, имеет индекс $z = 10$ и начальный угол подъема винтовой оси $\delta_0 = 2,5^\circ$, то скорость линейной волны деформации составляет

$$a_0 = \sqrt{(2G/\rho) \cdot (1 - 1/(4z^2))} / (z \cos \delta_0) \approx 460 \text{ м/с}.$$

В этой пружине для солитона с амплитудой $A = 0,001$, что соответствует увеличению угла подъема спирали примерно на $0,5^\circ$, получаем следующие значения:

$$v \approx 460,3 \text{ м/с}; \quad E_M \approx 0,04 \text{ Дж}; \quad P_c \approx 0,092 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

«Длина» $2L$ солитона соответствует для этого случая примерно 15,6 витков пружины; растяжение пружины на длине солитона составляет около 26 мм. Более 92 % энергии солитона Рассела и около 75 % смещения ΔS и импульса P_c сосредоточено на участке $[x_M - L, x_M + L]$, где координата x_M отвечает максимуму амплитуды.

Модифицированное КДФ уравнение для пружины и его решение.

Если пружина имеет большой индекс и/или значение параметра овализации ее сечения $\Delta = 1$, то она может быть навита с очень малым углом δ_0 подъема винтовой оси, и для величины l^2 вместо равенства (12) допустимо использовать другое соотношение:

$$l^2 = (tg \delta_0 + cx_3 \cdot q_3)^2 \approx cx_3^2 \cdot q_3^2.$$

В результате уравнение (13) изменяется и приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial q_3}{\partial t} = \frac{k}{\sqrt{1+\mu}} \left[\frac{\partial q_3}{\partial x} + cx_3^2 \frac{\partial(q_3^3)}{\partial x} + (1+0.5/(1+\mu)) \frac{\partial^3 q_3}{\partial x^3} \right]. \quad (13 \text{ а})$$

После использования замен

$$u = q_3 \cdot cx_3; \quad \xi = x / (\sqrt{1+0.5/(1+\mu)}); \quad \mathfrak{t} = t \cdot k / \sqrt{1+\mu} \quad (14 \text{ а})$$

соотношение (13 а) совпадает с модифицированным КДФ уравнением вида (1 а) и имеет устойчивое решение – уединенную волну переноса (2 а). Амплитуда A изменения кручения витка и длина солитона $2L$ для этого случая определяются равенствами

$$A = \sqrt{2(v-1)}, \quad 2L = 4\sqrt{(1+0.5/(1+\mu))/(v-1)} = 4\sqrt{2(1+0.5/(1+\mu))/A}. \quad (15 \text{ a})$$

Заметим, что у данного солитона амплитуда убывает медленнее, чем у классического, поэтому эффективную длину $2L$ пришлось увеличить в 2 раза.

Учтем, что для стальной проволоки по условиям пропорциональности деформаций и напряжений амплитуда $A < 0,005 \cdot z$ [13]. Если индекс пружины $z < 20$, то эта амплитуда остается малой величиной, а в отношении параметров солитона справедливо большинство выводов, сформулированных выше.

Но модифицированный солитон обладает дополнительными «квантовыми» свойствами, которых нет у классического солитона Рассела. Так, площадь под кривой $\Delta\chi_3$ (рис. 5) здесь не зависит от амплитуды волны. Это означает, что у всех модифицированных расхождение ΔS крайних витков одинаково и не зависит от его амплитуды и скорости:

$$\Delta S = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) dx = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2(v-1)}}{ch(\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \sqrt{2} \cdot \pi R,$$

где R – радиус наивки пружины.

Кроме того, оказалось, что энергия E_M этого солитона пропорциональна его амплитуде (таким свойством обладает фотон, смотри [14]):

$$E_M = \int_{-\infty}^{+\infty} cx_3 q_3^2(x) dx = \frac{1}{cx_3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(v-1)}{ch^2(\sqrt{v-1} \cdot x)} dx = \frac{4\sqrt{v-1}}{cx_3} = \frac{2\sqrt{2}}{cx_3} \cdot A.$$

Если пружинная проволока имеет круглое поперечное сечение, то переход к размерным величинам приводит к следующей формуле для энергии солитона:

$$E_M = [\pi / (4(1+\mu)z)] G \cdot d^3 \cdot A.$$

Например, для стальной проволоки при значениях $d = 3$ мм; $z = 20$; $A \approx 0,06$ (что соответствует изменению угла δ примерно на $3,5^\circ$) получаем:

$$a_0 \approx 226,5 \text{ м/с}; \quad v_c \approx 226,9 \text{ м/с}; \quad E_M \approx 4 \text{ Дж}.$$

«Длина» $2L$ модифицированного солитона для этого случая равняется 17,7 виткам пружины, то есть 3,4 м винтовой оси. Расширение пружины на длине солитона составляет около 100 мм, что в 1,5 раза больше ее диаметра. Величина ΔS оказалась настолько большой, что ее будет несложно зарегистрировать в эксперименте.

Импульс модифицированного солитона определяется формулой

$$P_c = (\pi^2 / 4) d^3 \cdot \sqrt{\rho \cdot G}$$

и не зависит от амплитуды волны, то есть для данной пружины его ве-

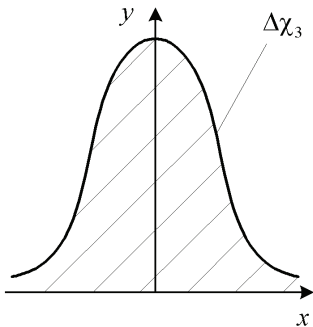


Рисунок 5 – Изменение кручения стержня внутри модифицированного солитона

личина является квантованной. В этом примере она равняется $1,66 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. Квантованным является и момент количества движения J_c этой волны.

Принципы генерирования солитонов в пружине. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что для появления солитона в стальной пружине необходимо обеспечить высокую интенсивность ее деформирования. Анализируя динамику работы пружин в механизмах различного назначения (смотри, например, [15]), следует признать, что она далека от тех уровней, при которых будет возможно наблюдать возникновение солитона, и для генерирования этих волн понадобится специальная экспериментальная установка. Так, в рассмотренных примерах максимальные скорости V_{x_1} перемещения витков достигали $10 \dots 12 \text{ м/с}$, что в $2 \dots 3$ раза превышает уровень, принятый для пружин циклического действия исходя из предела их выносливости. Эти скорости можно уменьшить за счет снижения амплитуды волны, но при этом длина солитонов дополнительно возрастет и превысит 20 витков, что потребует соответствующего удлинения пружины.

Как это следует из теории, для генерирования солитона в предварительно растянутой пружине достаточно выполнить интенсивное перемещение одного из крайних витков (прицепа), увеличивая длину пружины со скоростью $V_{x_1}(t)$, близкой к зависимости

$$\Delta S'(t) = R \cdot \Psi(v_c t),$$

где $\Psi(x)$ – амплитудная функция солитона, определяемая формулами (2) или (2 а). При этом выполнение условия $V_{x_1}(t) \approx \Delta S'(t)$ важно обеспечить на участке, отвечающем эффективной длине солитона $2L$. Сформированная начальная волна деформации будет перемещаться по пружине со скоростью $v_c \approx a_0$, при этом форма волны будет корректироваться, асимптотически приближаясь к ее устойчивому состоянию $u = \Psi(x - v_c t)$.

Требования к интенсивности динамического возбуждения волны можно существенно снизить, если в экспериментальной установке для генерирования солитонов заменить стальную пружину пружиной из полимерного материала.

В заключение заметим, что уединенная волна переноса может использовать также и часть солитона (например, как указывалось в [9], его задний фронт), объединяя ее с гармоническими или экспоненциальными бегущими волнами в так называемый *волновой пакет*. Принципы формирования в пружине волновых пакетов и вопросы их устойчивости изучаются и будут рассмотрены в дальнейших публикациях этого цикла.

Выводы. Показано, что низкочастотные связанные нелинейные колебания длинной пружины растяжения описываются уравнениями автоколебаний Кортевега – де Фриза.

Получены формулы, связывающие скорость, энергию и другие характеристики уединенной нелинейной волны переноса (классического или моди-

фицированного солитона Рассела) с ее амплитудой.

Характерной особенностью изучаемых солитонов является узкий (для данной пружины) диапазон их скоростей, которые во всех случаях отличаются от скорости распространения соответствующей линейной волны деформации на доли процента.

Список литературы: 1. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – 2008. – № 47. – С. 92-104. 2. *Светлицкий В.А., Нарайкин О.С.* Упругие элементы машин. – М.: Машиностроение, 1989. – 264 с. 3. *Асланян А.Г., Гулин А.В., Картышов С.В.* Расчет собственных частот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование, т. 2. – 1990. – № 8. – С. 21-30. 4. *Товстик П.Е.* Асимптотический метод интегрирования уравнений колебаний пружин // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – Л.: ЛГУ, 1962. – Вып. 27. – С. 119-134. 5. *Григорьев А.Л., Деряченко А.И.* Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високи технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПИ», 2004. – Вип. 2 (9). – С. 257-264. 6. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Симметричная матричная линеаризованная модель колебаний винтового стержня. – II Університетська наук.-практ. конф. магістрантів. Тези доповідей. – Харків: НТУ «ХПИ», 2008. – Т. 1. – С. 64-66. 7. *Захаров В.Е., Манаков С.В., и др.* Теория солитонов. – М.: Наука, 1980. 8. *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов поход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. 9. *Филлипов А.Т.* Многоликий солитон. – М.: Наука, 1990. 10. *Грунауэр А.А., Григорьев А.Л., Вештак И.А.* Определение функциональных зависимостей динамических характеристик пружины от закона ее ударного деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1987. – Вып. 42. – С. 40-49. 11. *Деряченко А.И., Король С.А., Григорьев А.А.* Идентификация модели винтового бруса колебаний пружины для расчета спектра собственных частот // Вісник КДПУ. – Кременчук, 2008. – Вип. № 1 (48). – С. 46-50. 12. *Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л.* О связи силы пружины с законом ее деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа, 1985. – Вып. 39. – С. 7-22. 13. Справочник машиностроителя. В трех томах / Под ред. *Е.А.Чудакова.* – М.: Гос. науч.- техн. изд-во машин. литературы, 1951. – Т. 3. – 1098 с. 14. *Вихман Э.* Квантовая физика. – М.: Наука, 1983. – 415 с. 15. *Хвингия М.В.* Вибрация пружин. – М.: Машиностроение, 1969.

Поступила в редколлегию 28.08.2009