

А.А. ЛАРИН, асс., НТУ «ХПИ»;

В.А. ЖОВДАК, докт.техн.наук, проф., НТУ «ХПИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОЧНЫХ АППАРАТОВ СО СЛУЧАЙНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ РАССТРОЙКОЙ ПО МОДЕЛИ ОДНОГО СЕКТОРА

Розроблено метод для аналізу рівня вимушених коливань випадково розлагоджених облопачених дисків. Метод базується на підході конденсації стохастичного базису та надає можливість проводити аналіз на основі моделі одного сектору. Метод придатний для випадків локально розташованого технологічного розладу. На основі методу отримані та представлені числові дослідження з усталених вимушених коливань лопаткового апарату 3-го ступеня циліндру низького тиску (ЦНТ) парової турбіни з випадковим технологічним розладом.

A method has been developed for analysis of forced response levels for randomly mistuned bladed discs. The method is based on stochastic reduced basis approach and gives an essential possibility to make an analysis using 1 sector model. The method applicable to cases of locally distributed technological mistuning and allows for this case to use of industrial-size sector models of bladings for analysis of forced vibrations of randomly mistuned system. The numerical researches of steady forced vibrations of technologically mistuned bladed disk of a 3-rd stage low pressure cylinder (LPC) of a steam turbine have been done.

Введение. Вибрационная прочность современных турбомашин во многом определяется напряженно деформированным состоянием рабочих колес, которые, несмотря на свое многообразие, обладают общим свойством циклической симметрии. Ее наличие определяет технологичность производства и монтажа лопаточного аппарата, а также формирует особенности динамических характеристик. Известно, что в спектре собственных колебаний таких конструкции присутствуют кратные частоты, а также формируются группы взаимосвязанных частот собственные формы, которых обладают фиксированным числом волн деформаций. Кроме отмеченных особенностей наличие симметрии дает существенные преимущества с расчетной точки зрения и позволяет свести задачу к анализу по модели одного сектора с наложенными условиями цикличности.

Вместе с тем следует отметить, что реальные условия производства, технологии монтажа, а также эксплуатация вызывают отклонения от строгой симметрии и приводят к расстройке. Причем необходимо отметить, что даже в малом она может привести к целому ряду явлений, многие из которых способны отразиться негативным образом на динамической прочности и надежности конструкции.

Современная инженерная практика основывается на использовании подробных конечно-элементных моделей, которые учитывают все ее конструктивные особенности. Это приводит к необходимости учитывать расстройку

не интегрально, а проводить ее предварительное моделирование.

Вместе с тем следует отметить, что на этапе проектирования для инженера-исследователя или конструктора расстройка не является количественно и априорно известной. Как правило, существует лишь некоторая статистика возможных разбросов технологических или производственных отклонений. Таким образом, важным вопросом является оценка возможных разбросов реализаций АЧХ для подобных систем. Это приводит к необходимости считать параметры расстройки случайными величинами и проводить анализ в вероятностном смысле.

Кроме того наличие расстройки разрушает первоначальную симметрию конструкции и требует выполнять анализ для всего рабочего колеса, что существенно увеличивает вычислительную дороговизну, а для подробных КЭ моделей может вообще привести к не преодолимым вычислительным трудностям.

Естественным путем решения этой проблемы является использование методов прямого статистической симуляции типа Монте-Карло. Применимость, которого определяется скоростью расчета соответствующей детерминированной задачи для реализации расстройки. Несмотря на существующие достаточно эффективные способы конденсации детерминированных задач (разложение в ряд по собственным формам симметричной системы [1,2], метод синтеза форм колебаний [3,4] и использование формулы Шермона-Моррисона-Вудбари [6]), для систем с большим числом секторов (например, лопаточные аппараты рабочих колес паровых и газовых турбин) вычислительная дороговизна прямых статистических подходов является решающим фактором и не позволяет применять.

Это обстоятельство определило развитие большого числа работ в которых получили развитие приближенные методы определения вероятностных показателей отклика системы. Это подходы, основанные на анализе чувствительности исследуемых параметров объекта от расстройки [7,8], разложение отклика системы в полиномиальный хаос [9], а также работы [10] посвященные непараметрическому вероятностному анализу с конденсацией размерности задачи по методике синтеза форм колебаний.

В данной работе был построен метод, который базируется на подходе конденсации стохастического базиса описанного в работах [11,12]. Согласно, которому решение отыскивается в виде разложения по базисным векторам пространства Крылова. При этом базисные векторы представляют собой компоненты ряда Тейлора по степеням параметра расстройки, а неопределенные коэффициенты в разложении определяются по схеме Галеркина в среднем, т.е. равенства нулю математического ожидания от скалярного произведения базисных векторов с вектором невязки.

Уравнения движения. В общем виде система уравнений движения для амплитуд перемещений при гармонических вынужденных колебаниях дис-

кретной модели конструкции с расстройкой представляются в виде:

$$([K(\alpha)] - \omega^2 \cdot [M(\alpha)] + i \cdot [D(\alpha, \mu)]) \cdot q = [Z(\omega, \alpha)] q = f, \quad (1)$$

где $[K]$, $[M]$ и $[D]$ – матрицы жесткости, масс и демпфирования соответственно; $[Z(\omega)]$ – матрица динамической жесткости; ω – частота возмущения; μ – коэффициент демпфирования, q – амплитуды перемещений; f – вектор амплитуд вынужденной силы, а $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$ – вектор параметров технологических отклонений.

В уравнении (1) целесообразно выделить отдельно компоненты системы со строгой симметрией и те которые зависят от случайных параметров технологических отклонений:

$$([Z_0(\omega)] + [\Delta Z(\alpha, \omega)]) \cdot q = f, \quad (2)$$

где $[\Delta Z(\alpha, \omega)]$ – матрица расстройки, которая определяет случайное отклонение системы от циклической симметрии, и обращается в ноль вместе с параметрами расстройки.

Построение приближенного решения. Для решение матричного уравнения (2) построим аппроксимирующую стохастическую поверхность отклика, согласно методу конденсации стохастического базиса (КСБ).

В рамках КСБ поверхность отклика представляется стохастическими базисными векторами с весовыми коэффициентами. В качестве базисных векторов выступают компоненты ряда Тейлора по степеням параметра расстройки, а производные от вектора амплитуд колебаний рассчитаны в значениях математических ожиданий случайных параметров.

Таким образом, решение системы представляется в виде:

$$q = [\Psi(\alpha)] \xi = \sum_{k=0}^K \psi_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \xi_k, \quad (3)$$

$$\psi_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \sum_{i=1}^N \dots \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial^k q}{\partial \alpha_i \dots \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=M[\alpha]} (\alpha_i - M[\alpha_i]) \dots (\alpha_j - M[\alpha_j]), \quad (4)$$

где $M[\dots]$ – оператор взятия математического ожидания, N – количество случайных параметров.

Не теряя общности рассуждений будем считать, что математические ожидания параметров расстройки являются нулевыми

$$M[\alpha_i] = 0, \forall i = \overline{1, N}. \quad (5)$$

В этом случае, ограничиваясь тремя базисными векторами разложения, получим:

$$\psi_0 = [Z(\alpha = 0)]^{-1} f = [A_0] f = q_0; \quad (6)$$

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^N \left. \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha_i, \quad \psi_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left. \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \right|_{\alpha=0} \alpha_i \alpha_j, \quad (7)$$

где $[A_0]$ – матрица динамической податливости, а q_0 – вектор амплитуд колебаний циклически симметричной системы.

Для получения производных запишем непосредственное решение выражения (2)

$$q = ([Z_0(\omega)] + [\Delta Z(\omega, \alpha)])^{-1} \cdot f. \quad (8)$$

Дифференцируя (8) вокруг математических ожиданий параметров расстройки и с учетом (6) получим:

$$\frac{\partial q}{\partial \alpha_i} = -[A_0] \frac{\partial [\Delta Z]}{\partial \alpha_i} q_0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = [A_0] \cdot \left(-\frac{\partial [\Delta Z]}{\partial \alpha_i} \frac{\partial q}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial^2 [\Delta Z]}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} \cdot q_0 - \frac{\partial [\Delta Z]}{\partial \alpha_j} \frac{\partial q}{\partial \alpha_i} \right). \quad (10)$$

Таким образом, аппроксимирующая поверхность (3) определяется матрицей динамической податливости циклически симметричной системы и производными от матрицы расстройки по случайным параметрам рассчитанные вокруг их нулевых значений (математических ожиданий). Компоненты матрицы динамической податливости эффективно могут быть определены в виде разложений по собственным формам колебаний циклически симметричной системы, которая представлена моделью сектора с наложенными условиями циклической симметрии [6]:

$$[A_0] = \begin{bmatrix} [A]_{11} & \cdots & [A]_{1N_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [A]_{N_s 1} & \cdots & [A]_{N_s N_s} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$[A(\omega)]_{jl} = \sum_{k=-N_s/2}^{N_s/2} \sum_{r=1}^m u_r^k \cdot (\bar{u}_r^k)^T \cdot H(i\omega, \mu)_r^{(k)} e^{-i \cdot \beta \cdot k \cdot (j-l)}, \quad \beta = 2\pi/N_s, \quad (12)$$

где u_r^k – r -ая собственная форма колебаний с индексом цикличности k (число волн деформаций), $H(i\omega, \mu)$ – передаточная функция, которая определяется моделью демпфирования, β – угол сектора, N_s – количество секторов в системе, чертой сверху обозначено комплексное сопряжение.

Для задач с расстройкой, которая обусловлена отклонениями при технологических операциях сборки лопаточного аппарата, можно считать, что матрица расстройки осуществляется по жесткости и приложена в каждом секторе (лопатке) локально, то есть в местах, где имели место технологические операции (как правило, это межлопаточные соединения). Это обстоятельство позволяет моделировать расстройку для каждого сектора отдельно и ввести гипотезу [13], о том, что ее матрица может быть представлена, как линейная комбинация матриц определенных по отдельным секторам. Кроме того в силу малости реальной расстройки ограничимся в рассмотрении только линейной составляющей зависимости матрицы расстройки от параметров техноло-

гических отклонений:

$$[\Delta Z(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)] = \sum_{j=1}^N \alpha_j [\Delta Z_j], \quad (13)$$

$$[\Delta Z_j] = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & [\tilde{Z}_j] & & 0 & \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Тогда производные от матрицы расстройки вследствие введенной гипотезы, имеют вид:

$$\frac{\partial [\Delta Z(\alpha_1, \dots, \alpha_N)]}{\partial \alpha_i} = [\tilde{Z}_j], \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 [\Delta Z(\alpha_1, \dots, \alpha_N)]}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 0. \quad (16)$$

Последние выражения, будут точными в случае моделирования расстройки путем введения сосредоточенных элементов массы или жесткости.

Для определения неизвестных весовых коэффициентов в аппроксимации (3) выполнить процедуру Галеркина в среднем, то есть из требования ортогональности стохастического базиса и невязки приближенного решения

$$M[\Psi(\alpha)]^* \cdot R(\alpha) = 0, \quad (17)$$

где

$$R(\alpha) = [Z(\alpha)]q(\alpha) - f = [Z(\alpha)][\Psi(\alpha)]_{\xi}^{\xi} - f. \quad (18)$$

Отсюда определяется система линейных алгебраических уравнений относительно неопределенных компонент:

$$M[[\Psi(\alpha)]^* \cdot [Z(\alpha)] \cdot [\Psi(\alpha)]_{\xi}^{\xi}] = M[[\Psi(\alpha)]^* f]. \quad (19)$$

В выражении (22) присутствует матрица жесткости всей расстроенной системы, ее получение и использование сопряжено с серьезными вычислительными трудностями (для моделей с подробными КЭ сетками секторов), так как требует построение полной модели. В этой связи целесообразно преобразовать это уравнение выделив отдельно из базисных векторов матрицу динамической податливости циклически симметричной системы.

$$[\Psi(\alpha)] = [A_0][\tilde{\Psi}(\alpha)], \quad (20)$$

где

$$\tilde{\psi}_0 = f, \quad \tilde{\psi}_1 = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial [\Delta Z_i]}{\partial \alpha_i} q_0 \cdot \alpha_i, \quad (21)$$

$$\tilde{\psi}_2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial^2 [\Delta Z_i]}{\partial \alpha_i^2} \delta_{ij} \cdot q_0 - \frac{\partial [\Delta Z_i]}{\partial \alpha_i} \frac{\partial q}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial [\Delta Z_j]}{\partial \alpha_j} \frac{\partial q}{\partial \alpha_i} \right) \cdot \alpha_i \alpha_j, \quad (22)$$

Подставляя (23) в (22) получим систему детерминированных уравнений размерности 3×3 компоненты, которой определяются: вектором амплитуд нагрузки, матрицей динамической податливости и вектором амплитуд колебаний циклически симметричной системы, а также матрицей расстройки и производными от нее

$$M \left[[A_0]^* [\tilde{\Psi}]^* [\tilde{\Psi}] + [A_0]^* [\Psi]^* [\Delta Z] [A_0] [\tilde{\Psi}] \right] \xi = M \left[[A_0]^* [\tilde{\Psi}]^* f \right]. \quad (23)$$

Таким образом, рассмотренный метод позволяет получить приближенное решение (3) системы со случайной расстройкой, используя модель только одного сектора системы. Это дает существенные преимущества особенно для систем с большим числом секторов (лопаточные аппараты паровых и газовых турбин) и позволяет использовать подробные КЭ модели лопаток с учетом всех их конструктивных элементов.

Используя это решение легко получить вероятностные характеристики отклика системы со случайной расстройкой

$$M[q] = M[\Psi] \xi = \xi_0 q_0 + \xi_2 \sigma_\alpha^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 q}{\partial \alpha_i^2}; \quad (24)$$

$$\sigma_q^2 = \text{diag}(M[q \cdot q^*]) = \text{diag}(M[\Psi] \xi [\Psi]^* \xi^*). \quad (25)$$

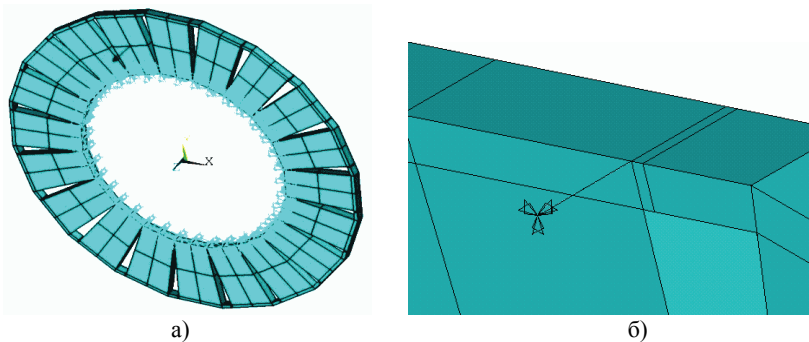


Рисунок 1 – КЭ тестовые модели

Результаты тестовых расчетов. Этот метод был протестирован на конечно-элементной модели малой расстройки (рис. 1), которая позволяет провести непосредственный анализ методом Монте-Карло.

При этом было рассмотрено несколько вариантов модели расстройки. Вектор случайных параметров расстройки:

– представляет собой введенный в системы сосредоточенный жесткост-

- новый элемент добавленный в 1 сектор системы (рис. 1, б);
- представляет собой введенные в каждый сектор системы сосредоточенные жесткостные элементы.

Расстройка задавалась как центрированная нормальная величина Гаусса с разными значениями СКО. Результаты по вероятностным характеристикам амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для диапазона частот вокруг четвертой собственной частоты (соответствующая форма колебаний имеет 3 узловых диаметра) приведены на рис. 2, 3.

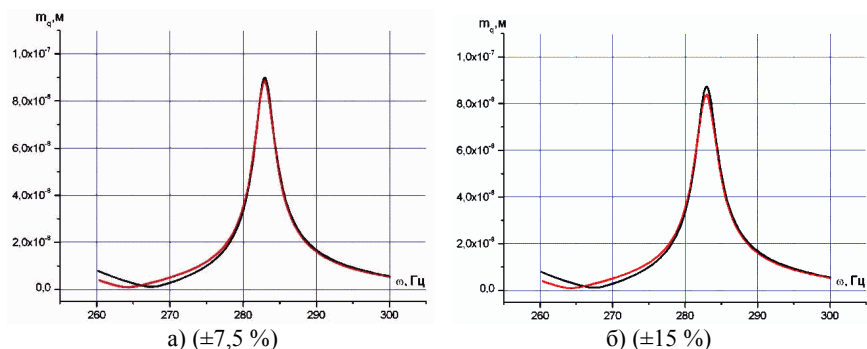


Рисунок 2 – Математическое ожидание АЧХ

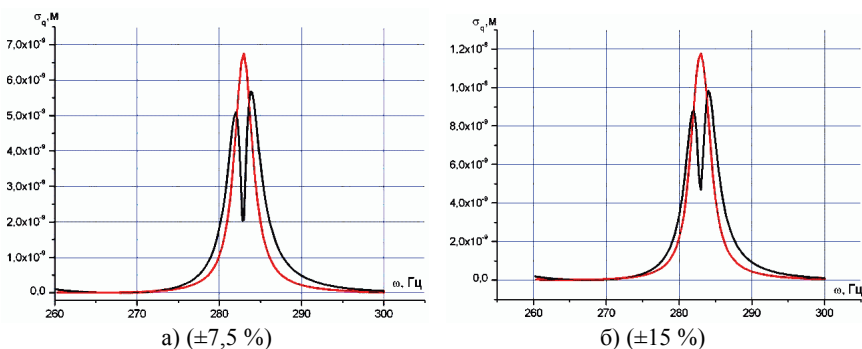


Рисунок 3 – Среднеквадратичное отклонение АЧХ

Представленные результаты показывают, что наличие отклонений – при этом наблюдается некоторое занижение математических ожиданий и завышение по среднеквадратическим отклонениям АЧХ. Подобная погрешность есть закономерной вследствие определения весовых коэффициентов из невязки в среднем.

Однако данная погрешность заметно нивелируется при определении огибающей возможных разбросов реализаций АЧХ. На рис. 4 результаты определений огибающей по правилу 3 сигм (точками результаты полу-

ченные методом Монте-Карло для всей системе).

Аналогичное тестирование было проведено и для системы со случайной расстройкой по всем секторам. Результаты представлены на рис. 5.

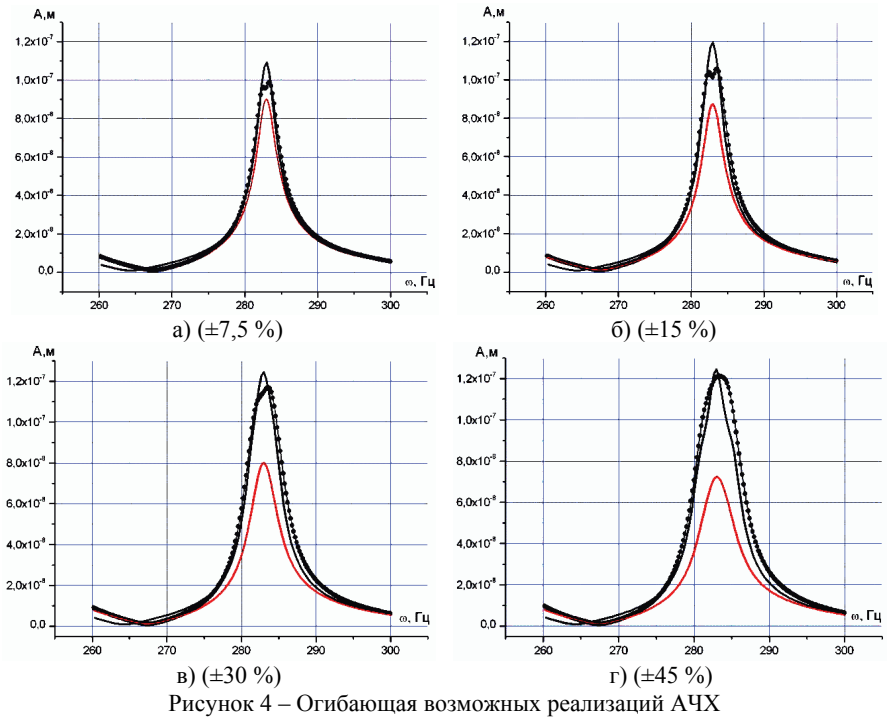


Рисунок 4 – Огибающая возможных реализаций АЧХ

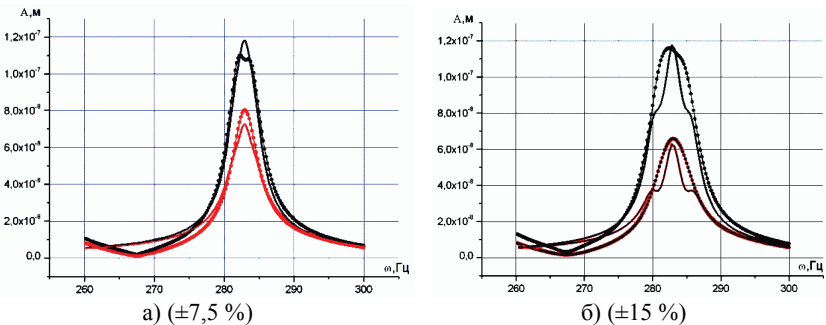


Рисунок 5 – Огибающая возможных реализаций АЧХ и ее математическое ожидание (расстройка задана по всем секторам)

Результаты исследований колебаний лопаточного аппарата паровой турбины со случайной технологической расстройкой. Рассмотр-

ренный метод и программное обеспечение было использовано при исследовании формирования АЧХ лопаточного аппарата 3 ступени ЦНД паровой турбины со случайной трассстройкой параметров бандажной связи вызванной технологическими отклонениями при сборке рабочего колеса. На рис. 6 приведена КЭ модель лопатки, а в таблице рядом основные ее характеристики.

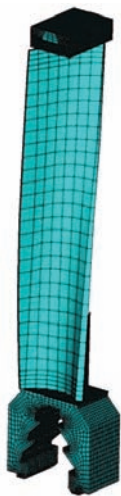


Рисунок 6 – КЭ модель лопатки

Особенностью этой лопатки является наличие разъемных элементов в бандажном соединении: в бандаже присутствует паз, в который согласно технологии сборки помещаются вставка и впоследствии прикатывается (рис. 7). Вообще говоря, жесткость этого соединения априори не известна, так как будет определяться плотностью контакта вставки и бандажной полки в поле центробежных сил [14,15,16].

Анализ характера контактного взаимодействия показывает, что в соединении раскрывается щель по дну паза бандажной полки, то есть вставка контактирует с полкой по только своим боковым поверхностям. Вместе с тем контакт является достаточно плотным, что свидетельствует о не возможности его динамического изменения при малых колебаниях лопаточного аппарата. В этой связи целесообразно заменить нелинейные условия контакта на кинематические граничные условия совместности перемещений по узлам, в которых наблюдается плотный статический контакт.



Рисунок 7 – Фото бандажной полки 3 ступени ЦНД

Следует отметить, что производственная практика показывает, что технология сборки имеет ряд вариаций. Во-первых, это наличие зазоров или плотного контакта между торцевыми поверхностями бандажных полок, во-вторых, процедура глубокой закатки, которая может привести к плотному прилеганию вставки с дном паза.

Очевидным является то, что отмеченные ранее технологические отклонения не будут одинаковыми для всех лопаток рабочего колеса, а значит, приведет к его расстройке.

При этом были рассмотрены различные допуски разбросов зазора от 0,5мм и до 2 мм. Результаты приведены на рис. 8.

Огибающая возможных реализаций АЧХ имеет существенные превышения только на 2, 3 и 4 частотах спектра. В этот диапазон попадает только одно резонансное значение, соответствующее 6 гармонике нагружения. При

этом в случае больших допусков на зазор на 6 гармонике возможное увеличение амплитуд превышает 40 %.

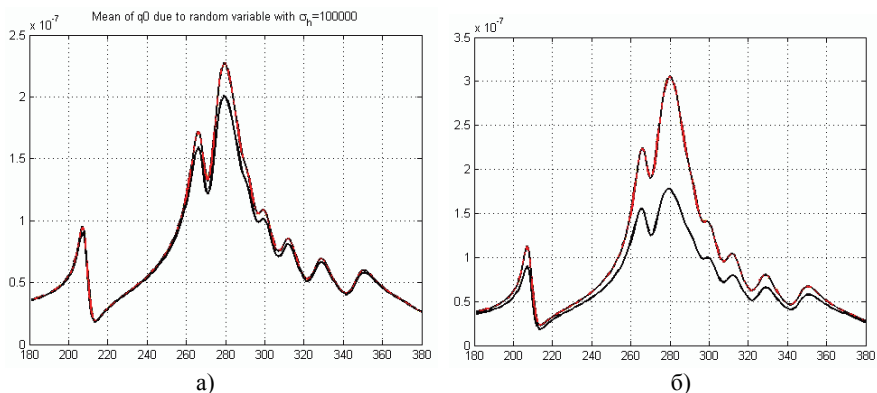


Рисунок 8 – Математическое ожидание и огибающая возможных реализаций АЧХ лопаточного аппарата 3-й ступени ЦНД

Выводы. В работе разработано и обосновано метод решения задачи установившихся вынужденных колебаний систем со случайной расстройкой на основе модели одного сектора системы. Рассмотрены вопросы влияния технологических особенностей и отклонений в бандажном соединении лопаточного аппарата 3 ступени ЦНД паровой турбины. Проведено соответствующее исследование по определению вероятностных характеристик АЧХ этого рабочего колеса на основе разработанной теории и программного обеспечения.

Список литературы: 1. *Griffin J.H.* A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes / *J.H.Griffin, M.-T.Yang* // Trans. of the ASME. J. of Engin. for Gas Turb. and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 893-900. 2. *Griffin J.H.* A fundamental model of mistuning for a single family of modes / *J.H.Griffin, D.M.Feiner* // Trans. of the ASME. J. of Turbomach. – 2002. – Vol. 124. – P. 597-605 3. *Pierre C.* Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks – part I: theoretical models / *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier* // Trans. of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 89-99. 4. *Pierre C.* Component-mode-based reduced order modeling techniques for mistuned bladed disks – part II: application / *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier* // Trans. of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2001. – Vol. 123. – P. 100-108. 5. *Pierre C.* A compact, generalized component mode mistuning representation for modelling bladed disk vibration / *C.Pierre, R.Bladh, M.P.Castanier, S-H.Lim* // Proc. of 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Norfolk, Virginia. – 2003. – P. 1-22. 6. *Ewins D.J.* A new method for dynamic analysis of mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and mistuned systems / *E.P.Petrov, D.J.Ewins, K.Y.Sanliturk* // Trans. of the ASME. J. of Engin. for Gas Turb. and Power. – 2002. – Vol. 124. – P. 586-597. 7. *Griffin J.H.* Forced response of turbine engine bladed disks and sensitivity to harmonic mistuning / *J.H.Griffin, J.A.Kenyon* // Trans. of the ASME. J. of Turbomach. – 2003. – Vol. 125. – P. 113-120. 8. *Petrov E.P.* A sensitivity-based method for direct stochastic analysis of nonlinear forced response for bladed disks with friction interfaces / *E.P.Petrov* // Proc. of GT2007 ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air, Montreal, Canada. – 2007. – P. 24-35. 9. *Sinha A.* Computation of the statistics of forced response of a mistuned bladed disk assembly via polynomial chaos / *A.Sinha* //

Trans. of the ASME. J. of Vibration and Acoustics. – 2006. – Vol. 128. – P. 449-457. **10.** *Soize C.* Non-parametric modelling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks / *C.Soize, E.Capiez-Lernout* // Trans. of the ASME. J. of Engineering for Gas Turbines and Power. – 2004. – Vol. 126. – P. 610 -618. **11.** *Nair P.B.* Stochastic reduced basis method / *P.B.Nair, A.J.Keane* // American Institute of Aeronautics and Astronautics J. – 2001. – Vol. 32. – P. 212-225. **12.** *Nair P.B.* Forced response statistics of mistuned bladed disks: a stochastic reduced basis approach / *M.T.Bah, P.B.Nair, A.Bhaskar, A.J.Keane* // J. of Sound and Vibration. – 2003. – Vol. 263. – P. 377–397. **13.** *Ларін О.* Розв'язок задачі вимушених випадкових коливань лопаткового апарату з розладом на основі моделі одного сектору / *Ларін О., Жовдак В.* // *Машинознавство*. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2008. – № 10 (136). – С. 12-16. **14.** *Ларин А.А.* Собственные колебания циклически-симметричных систем с расстройкой // *Системы обработки информации*. – № 7 (47). – 2005. – С. 91-95. **15.** *Жовдак В.А.* Исследование влияния бандажного соединения на статические и динамические характеристики лопаточного аппарата на основе трехмерных моделей / *Жовдак В.А., Кабанов А.Ф., Ларин А.А., Степченко А.С.* // *Вісник НТУ «ХПІ»*. – Харків, НТУ «ХПІ», 2005. – № 21. – С. 35-43. **16.** *Жовдак В.А.* Исследование влияния технологических отклонений в бандажном соединении на спектр собственных частот лопаточного аппарата / *Жовдак В.А., Демуз Я.Д., Кабанов А.Ф., Ларин А.А., Степченко А.С.* // *Надійність і довговічність машин і споруд*. – Київ: Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАН України, 2006. – Вип. 26. – С. 59-67.

Поступила в редколлегию 13.11.2009