

**Е.Г.ЯНИЮТИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»  
**Н.И.ВОРОПАЙ**, аспирант, ХНАДУ

## УПРАВЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Досліджено неосесиметричне деформування круглої пружної нескінченно довгої циліндричної оболонки під дією навантаження. Розглянуто керування прогином оболонки. Моделювання деформування оболонки виконується на основі уточненої теорії С.П. Тимошенко. При визначенні керуючої сили використано метод регуляризації А.М. Тихонова.

An asymmetric deformation of the cylindrical shell under impulse load is investigated. The shell is supposed to be round, elastic and infinitely long. The controlling of the shell deflection is considered. The simulation of the shell deforming is based on S.P. Timoshenko's refined theory. The Tihonov's regularizing method is used at determination control force.

В данной работе представлена постановка и решение задачи управления нестационарными колебаниями цилиндрической оболочки. Сущность указанной задачи в следующем: пусть на бесконечно длинную круглую упругую цилиндрическую оболочку воздействует нагрузка, закон изменения во времени которой известен и которая вызывает первичный нестационарный колебательный процесс. Предположим также, что на колебания оболочки налагается некоторое условие (критерий управления) в некоторой точке вдоль направляющей ее срединной поверхности. Для удовлетворения требуемого условия к цилиндрической оболочке прилагается управляющая сила в некоторой другой точке, закон изменения которой во времени подлежит определению.

Задача управления нестационарными колебаниями оболочки состоит в определении закона изменения управляющей силы во времени при условии задания конкретной точки приложения этой силы. Удовлетворение критерию колебаний реализует управление только в одной точке оболочки.

Рассмотрим математическую постановку задачи управления для цилиндрической оболочки (рис. 1). Пусть возмущающая сила  $Q(t^*)$  приложена в точке  $\theta_0$ ; точка, в которой требуется управлять колебаниями –  $\theta_s$ ;  $\theta_c$  – точка приложения неизвестного управляющего воздействия  $G(t^*)$  (рис. 1).

Уравнения линейных колебаний цилиндрической оболочки с учетом инерции вращения и поперечного сдвига [1, 2] имеют следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial s} - \gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

$$k_1^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial \psi}{\partial s} \right) - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{a} \right) + \frac{1 - \nu^2}{Eh} P - \gamma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - k_1^2 \left( \frac{\partial w}{\partial s} + \psi \right) - \gamma^2 \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

где  $u$ ,  $w$  – компоненты перемещения срединной поверхности оболочки в радиальном и окружном направлениях соответственно;  $\psi$  – угол поворота нормали к срединной поверхности оболочки;  $a$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $\gamma^2 = \rho(1-\nu^2)/E$ ;  $k_1^2 = k^2(1-\nu)/2$  – коэффициент сдвига;  $s$  – окружная координата;  $P$  – нагрузка, которая описывается функцией, независимой от продольной координаты и является четной функцией угловой координаты.

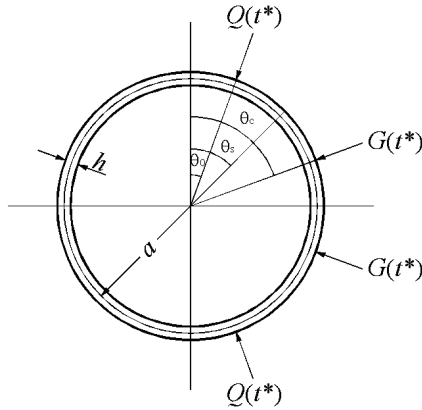


Рисунок 1 – Схема нагружения цилиндрической оболочки

Укажем, что нагрузка  $P(\theta, t^*) = Q(\theta, t^*) + G(\theta, t^*)$ , причем  $Q(\theta, t^*) = Q(t^*) \cdot \delta(\theta - \theta_0)$ ;  $G(\theta, t^*) = G(t^*) \cdot \delta(\theta - \theta_c)$ . Здесь  $t^* = t\sqrt{E}/(a\sqrt{\rho(1-\nu^2)})$  – безразмерное время,  $\theta = s/a$  – угловая координата.

Построение решения системы (1) при нулевых начальных условиях изложено в работе [1]. Отметим только, что оно ищется в виде разложений в ряды Фурье.

Для исследования управления колебаниями оболочки в сформулированной постановке достаточно иметь выражения для прогиба  $w(\theta, t^*)$  и оно следующее:

$$w(\theta, t^*) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} P_0(\tau) \sin(t^* - \tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^3 \frac{(B_k - \omega_{ki}^2)(C_k - \omega_{ki}^2)}{\omega_{ki} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\omega_{kj}^2 - \omega_{ki}^2)} \int_0^{t^*} P_k(\tau) \sin \omega_{ki}(t^* - \tau) d\tau \cos k\theta. \quad (2)$$

На основе (2) рассмотрим выражение для точки цилиндрической оболочки, в которой необходимо выполнить условие управления

$$w(\theta_s, t^*) = \int_0^{t^*} Q(\tau) K_Q(t^* - \tau) d\tau + \int_0^{t^*} G(\tau) K_G(t^* - \tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $K_Q(t^*) = K_{Q0}(t^*) + K_{Qk}(t^*)$ ;  $K_G(t^*) = K_{G0}(t^*) + K_{Gk}(t^*)$ . Причем,

$$K_{Q0}(t^*) = \frac{(1-v^2)a^2}{Eh} \cdot \theta_0 \cdot \sin(t^*); \quad K_{Qk}(t^*) = \sum_{k=1}^K \frac{2(1-v^2)r^2}{Eh\pi k} \cdot \sin(k\theta_0) \cdot \cos(k\theta_s) \cdot \Omega_k;$$

$$K_{G0}(t^*) = \frac{(1-v^2)a^2}{Eh} \cdot \theta_c \cdot \sin(t^*); \quad K_{Gk}(t^*) = \sum_{k=1}^K \frac{2(1-v^2)r^2}{Eh\pi k} \cdot \sin(k\theta_c) \cdot \cos(k\theta_s) \cdot \Omega_k,$$

а выражение для величины  $\Omega_k$ , входящий в приведенные формулы, таково

$$\Omega_k = \sum_{i=1}^3 \frac{(B_k - \omega_{ki}^2)(C_k - \omega_{ki}^2)}{\omega_{ki} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 (\omega_{kj}^2 - \omega_{ki}^2)} \cdot \sin(\omega_{ki} t^*).$$

Предположим, условием управления является полное устранение колебаний в точке  $\theta_s$ , то есть  $w(\theta_s, t^*) = 0$ . Тогда для нахождения управляющей силы необходимо решить следующее уравнение, вытекающее из (3)

$$\int_0^{t^*} Q(\tau) K_Q(t^* - \tau) d\tau = - \int_0^{t^*} G(\tau) K_G(t^* - \tau) d\tau, \quad (4)$$

которое является линейным интегральным уравнением Вольтерра I рода относительно функции  $G(t^*)$ .

В силу некорректности поставленной задачи [1, 3] получить точное решение уравнения (4) невозможно. Однако можно построить приближенное решение посредством применения регуляризирующего алгоритма, описанного подробно в [1] и основанного на введении сглаживающего функционала А.Н. Тихонова.

Запишем уравнение (4) в операторной форме:

$$A_Q \cdot Q = A_G \cdot G, \quad (5)$$

где  $A_Q$  – интегральный оператор, соответствующий ядру  $K_Q(t^* - \tau)$ ;  $A_G$  – ядру  $K_G(t^* - \tau)$ .

В матричной форме СЛАУ, из которой находится приближенное решение уравнения (5), на основе методики А.Н. Тихонова [1] можно записать так:

$$(A_G^T A_G + \alpha C) \cdot G = -A_G^T A_Q \cdot Q, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – параметр регуляризации;  $C$  – симметричная трехдиагональная матрица.

Численный расчет управляющей силы был выполнен при следующих параметрах:  $a = 0,3$  м;  $h = 0,04$  м;  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $v = 0,3$ ;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;  $k^2 = 5/6$ ;  $\theta_0 = 0,25$ ;  $\theta_s = 0,3$ ;  $\theta_c = 0,35$ ;  $\alpha = 10^{-21}$ .

Результаты решения СЛАУ (6) приведены на рис. 2, где на графике кривой 1 соответствует закон изменения во времени возмущающей силы, которая вызывает первичное деформирование, а кривой 2 – управляющей силы.

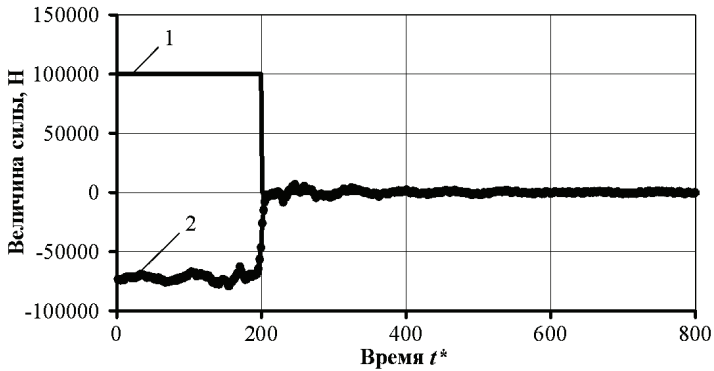


Рисунок 2 – Закон изменения возмущающей и управляющей сил во времени

На рис. 3 показано изменение прогиба во времени цилиндрической оболочки в точке управления. Кривая 1 соответствует случаю, когда управляющее воздействие отсутствует, а кривая 2 – случаю, когда осуществляется управление.

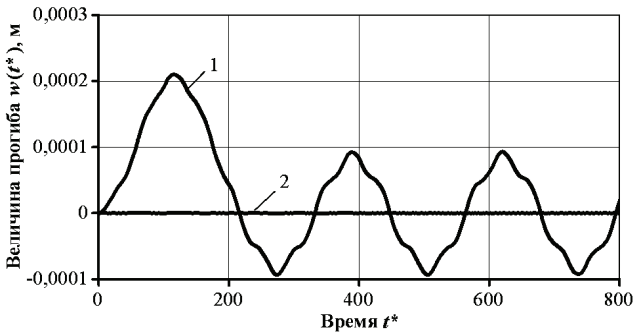


Рисунок 3 – Результаты решения задачи управления колебаниями цилиндрической оболочки

Далее рассмотрим вариант нагружения, когда в качестве критерия управления принимается не отсутствие колебаний в точке  $\theta_s$ , а реализация колебаний в этой точке, отвечающие изменению по закону синуса с некоторой частотой. Тогда уравнение для определения управляющей силы будет иметь следующий вид:

$$(A_G^T A_G + \alpha C) \cdot G = w - A_G^T A_Q \cdot Q. \tag{7}$$

Для численного расчета управляющей силы  $G(\theta, t^*)$  используется выражение (7) и исходные данные, которые были использованы в первом рассмотренном примере, только теперь  $\theta_0 = 0,1744$ ;  $\theta_s = 0,3489$ ;  $\theta_c = 0,5233$ .

На рис. 4 представлен график изменения нагрузки во времени, причем, кривая 1 отвечает возмущающей (первичной) силе, а кривая 2 – найденной управляющей силой.

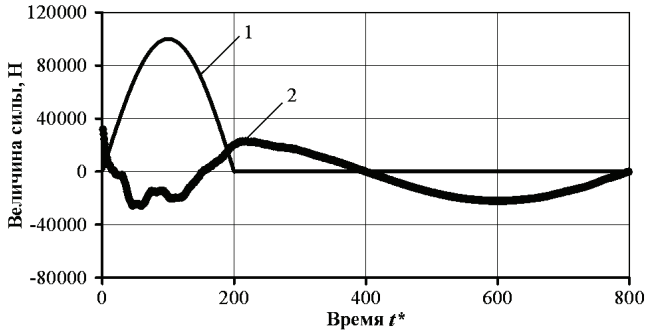


Рисунок 4 – Закон изменения возмущающей и управляющей сил во времени

На рис. 5 изображено изменение нормальных перемещений во времени цилиндрической оболочки в точке управления, кривая 1 соответствует случаю, когда управляющее воздействие отсутствует, а кривая 2 – случаю, когда осуществляется управление. Кривую 2, как закон изменения нормального перемещения, которое отвечает выбранному в этом случае критерию управления, предполагалось получить. Задача управления и во втором примере решена полностью.

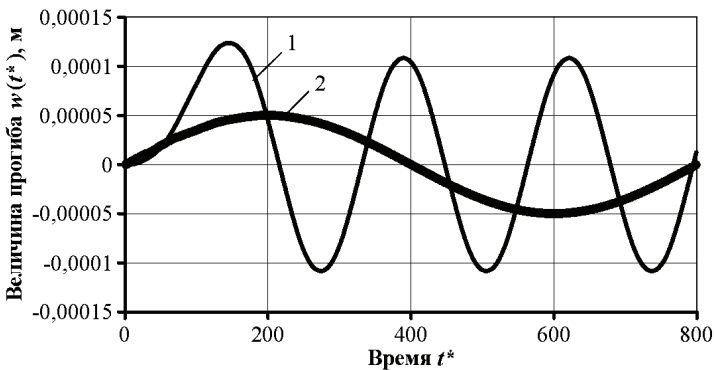


Рисунок 5 – Результаты решения задачи управления колебаниями цилиндрической оболочки

В данном подразделе представлена математическая постановка задачи

управления, на уровне как это принято в задачах математической физики, и ее решение. Вопрос об энергетических затратах при реализации критерия управления не исследуется.

**Список литературы:** 1. Янютин *Е.Г.*, Янчевский *И.В.*, Воропай *А.В.*, Шарапата *А.С.* Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 2. Григолоук *Э. И.*, Селезов *И. Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. 3. Верлань *А. Ф.*, Сизиков *В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.

*Поступила в редколлегию 14.01.2010*