

**А.Д.ШАМРОВСКИЙ**, д-р техн. наук, проф., Запорожская государственная инженерная академия;  
**М.А.ШАМРОВСКИЙ**, инженер, Запорожский национальный технический университет;  
**А.С.БЕЗНОС**, аспирант, Запорожская государственная инженерная академия

## **РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ**

У даній роботі запропоновано метод розв'язання динамічних задач для твердих тіл з пружними зв'язками. Проводиться тестування запропонованого метода на конкретній задачі механіки про зміщення шліфувальної бабки металообробного станка. Наводиться також обґрунтування використання саме таких підходів для розв'язання динамічних задач механіки і створення нових методів розв'язання динамічних задач механіки. Запропонований метод орієнтовано для використання ЕОМ, він є надійним та простим у реалізації.

The approach for solving dynamic problems with rigid bodies and spring linkage being proposed in this article. The testing of proposed approach at concrete mechanical application about displacement of wheelhead of metal-working machine-tool was carried out. The substantiation of using and creating such approaches for solution of dynamic problems is adduced. The approach is oriented for implementation using ECM and it is reliable and can be implemented with ease.

### **Вступление**

При проектировании металлорежущих станков требуется знать жесткости ответственных узлов станков с целью правильного определения погрешностей, которые могут вноситься в размеры обрабатываемых деталей при недостаточной жесткости этих узлов. Такая задача весьма специфична и для ее решения может потребоваться специализированный подход. В работе рассматривается подход к расчету на жесткость некоторых узлов металлообрабатывающего станка при помощи создания специализированных расчетных схем и упрощенных методов расчетов. Такой подход сочетает в себе достаточную степень надежности получаемых результатов с высокой простотой и наглядностью процедуры их получения.

### **Материалы и методика исследований**

В работах [1], [2] представлен метод решения задач о движении материальных точек, с упругими связями. В данной работе этот метод развивается для более сложных задач о плоском движении твердых тел. Продемонстрировано применение метода для решения практических задач.

### **Теория и анализ полученных результатов**

Рассмотрим конструкцию, состоящую из твердого тела, прикрепленного

произвольным количеством  $n$  упругих стержней к неподвижному основанию (см. рис. 1).

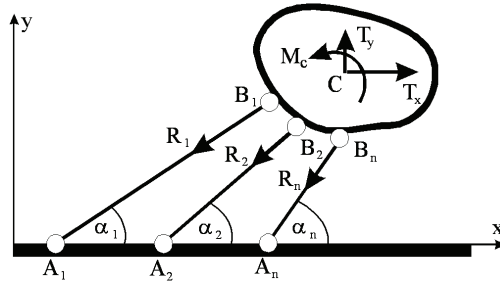


Рисунок 1 – Твердое тело, прикрепленное стержнями к неподвижному основанию

Концы стержней прикреплены к телу и основанию шарнирно. Нагрузки, действующие на тело, приведены к его центру масс  $C$  в виде составляющих  $T_x, T_y$  главного вектора действующих на тело сил и главного момента  $M_c$  этих сил. Требуется изучить плоскопараллельное движение твердого тела при произвольных начальных условиях. Рассмотрим два метода решения этой задачи.

**Первый метод.** Составим уравнения движения тела в виде:

$$m \frac{d^2 u_C}{dt^2} = \sum F_x ; \tag{1}$$

$$m \frac{d^2 v_C}{dt^2} = \sum F_y ;$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_c .$$

Здесь первые два уравнения описывают поступательное движение тела вместе с центром масс; третье – вращательное движение относительно оси, проходящей через центр масс. Используются следующие обозначения:  $u_C, v_C$  – смещения центра масс тела из положения, в котором находится тело при отсутствии нагрузки и реакций стержней, то есть из недеформированного состояния системы;  $\varphi$  – угол поворота тела;  $m$  – масса тела;  $J$  – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс; в правых частях первых двух уравнений (1) стоят суммы проекций всех сил, действующих на тело, на оси  $x$  и  $y$  соответственно; в правой части третьего уравнения стоит сумма моментов всех этих сил относительно центра масс.

Запишем выражения для правых частей уравнений, считая все стержни растянутыми (см. рис. 1):

$$\sum F_x = T_x - \sum_{i=1}^n R_i \cos \alpha_i ; \tag{2}$$

$$\sum F_y = T_y - \sum_{i=1}^n R_i \sin \alpha_i ;$$

$$\sum m_C = M_C + \sum_{i=1}^n [R_i (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i - R_i (y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i] .$$

При нахождении моментов реакций используется стандартный прием вычисления моментов отдельно для вертикальной и горизонтальной составляющих этих реакций. Величины  $x_C, y_C, x_{B_i}, y_{B_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) задают координаты соответствующих точек в недеформированном состоянии системы.

Выразим реакции через величины  $x_C, y_C, \varphi$ . Запишем следующие формулы для перемещений вдоль осей  $x$  и  $y$  точек крепления стержней к телу:

$$u_{B_i} = u_C + (y_C - y_{B_i})\varphi; \quad v_{B_i} = v_C + (x_C - x_{B_i})\varphi \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

Выразим через эти перемещения деформации стержней:

$$\Delta_i = u_{B_i} \cos \alpha_i + v_{B_i} \sin \alpha_i . \quad (4)$$

Для реакций стержней имеем:

$$R_i = D_i \Delta_i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Жесткости стержней  $D_i$  вычисляются по формулам:

$$D_i = \frac{E_i S_i}{L_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (6)$$

где  $E_i$  – модули упругости,  $S_i$  – площади поперечных сечений,  $L_i$  – длины соответствующих стержней.

Подставляя (3) в (4) и результат в (5), получаем:

$$R_i = D_i \{ u_C \cos \alpha_i + v_C \sin \alpha_i + [(y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i - (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i] \varphi \} \quad (7)$$

$(i = 1, \dots, n).$

Подставляя (7) в (2) и результат в (1) имеем:

$$m \frac{d^2 u_C}{dt^2} + a_{11} u_C + a_{12} v_C + a_{13} \varphi = T_x ; \quad (8)$$

$$m \frac{d^2 v_C}{dt^2} + a_{21} u_C + a_{22} v_C + a_{23} \varphi = T_y ;$$

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + a_{31} u_C + a_{32} v_C + a_{33} \varphi = M_C ,$$

где:

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n D_i \cos^2 \alpha_i; \quad a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^n D_i \sin \alpha_i \cos \alpha_i ; \quad (9)$$

$$a_{13} = a_{31} = \sum_{i=1}^n D_i [(y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i - (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i] \cos \alpha_i ;$$

$$a_{22} = \sum_{i=1}^n D_i \sin^2 \alpha_i; \quad a_{23} = a_{32} = \sum_{i=1}^n D_i [(y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i - (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i] \sin \alpha_i ;$$

$$a_{33} = \sum_{i=1}^n D_i [(y_C - y_{B_i}) \cos \alpha_i - (x_C - x_{B_i}) \sin \alpha_i]^2 .$$

Таким образом, решение поставленной задачи об изучении движения твердого тела сведено к решению системы дифференциальных уравнений (8). Выполним это решение. Вначале решим статические уравнения:

$$a_{11}u_C^* + a_{12}v_C^* + a_{13}\varphi^* = T_x ; \quad (10)$$

$$a_{21}u_C^* + a_{22}v_C^* + a_{23}\varphi^* = T_y ;$$

$$a_{31}u_C^* + a_{32}v_C^* + a_{33}\varphi^* = M_C ,$$

отвечающие постоянным значениям искомым величин.

Затем делаем замену:

$$u_C = u_C^* + U; \quad v_C = v_C^* + V; \quad \varphi = \varphi^* + \Phi. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (8) получаем однородные уравнения:

$$m \frac{d^2U}{dt^2} + a_{11}U + a_{12}V + a_{13}\Phi = 0 ; \quad (12)$$

$$m \frac{d^2V}{dt^2} + a_{21}U + a_{22}V + a_{23}\Phi = 0 ;$$

$$J \frac{d^2\Phi}{dt^2} + a_{31}U + a_{32}V + a_{33}\Phi = 0 .$$

Введем обозначения:

$$b_{11} = \frac{a_{11}}{m}; \quad b_{12} = \frac{a_{12}}{m}; \quad b_{13} = \frac{a_{13}}{m}; \quad b_{21} = \frac{a_{21}}{m}; \quad b_{22} = \frac{a_{22}}{m}; \quad b_{23} = \frac{a_{23}}{m}; \quad (13)$$

$$b_{31} = \frac{a_{31}}{J}; \quad b_{32} = \frac{a_{32}}{J}; \quad b_{33} = \frac{a_{33}}{J} ,$$

переходя к уравнениям:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + b_{11}U + b_{12}V + b_{13}\Phi = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} + b_{21}U + b_{22}V + b_{23}\Phi = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + b_{31}U + b_{32}V + b_{33}\Phi = 0$$

Разыскиваем решение уравнений (14) в виде:

$$U = A \sin(\omega t + \delta), \quad V = B \sin(\omega t + \delta), \quad \Phi = C \sin(\omega t + \delta) \quad (15)$$

Подставляя (15) в (14) приходим к системе алгебраических уравнений:

$$(b_{11} - \omega^2)A + b_{12}B + b_{13}C = 0 ; \quad (16)$$

$$b_{21}A + (b_{22} - \omega^2)B + b_{23}C = 0 ;$$

$$b_{31}A + b_{32}B + (b_{33} - \omega^2)C = 0.$$

Приравниваем к нулю определитель этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} - \omega^2 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} - \omega^2 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Раскрывая этот определитель, получаем бикубическое уравнение относительно  $\omega$ :

$$\omega^6 - c_1\omega^4 + c_2\omega^2 - c_3 = 0. \quad (18)$$

Здесь:

$$c_1 = b_{11} + b_{22} + b_{33}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \quad (19)$$

$$= b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} + b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} + b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32};$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{32}b_{13} + b_{12}b_{23}b_{31} - \quad (20)$$

$$- b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{23}b_{32}b_{11}.$$

Решая уравнение (18) каким-либо численным методом, например, методом касательных Ньютона, находим три квадрата частоты:  $\omega_1^2$ ,  $\omega_2^2$ ,  $\omega_3^2$ , а затем три частоты:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3. \quad (21)$$

Возвращаясь к уравнениям (16) подставляем найденные частоты по очереди в первые два уравнения, обозначая соответствующими индексами и амплитуды:

$$(b_{11} - \omega_i^2)A_i + b_{12}B_i + b_{13}C_i = 0; \quad (22)$$

$$b_{21}A_i + (b_{22} - \omega_i^2)B_i + b_{23}C_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Решая эти уравнения, выражаем величины  $A_i$  и  $B_i$  через  $C_i$ :

$$A_i = \alpha_i C_i; \quad B_i = \beta_i C_i; \quad (23)$$

$$\alpha_i = \frac{b_{12}b_{23} - b_{13}(b_{22} - \omega_i^2)}{(b_{11} - \omega_i^2)(b_{22} - \omega_i^2) - b_{12}b_{21}}; \quad \beta_i = \frac{b_{21}b_{13} - b_{23}(b_{11} - \omega_i^2)}{(b_{11} - \omega_i^2)(b_{22} - \omega_i^2) - b_{12}b_{21}} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Общее решение уравнений (14) имеет вид:

$$U = \alpha_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \alpha_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + \alpha_3 C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3); \quad (24)$$

$$V = \beta_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \beta_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + \beta_3 C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3);$$

$$\Phi = C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3).$$

Из (11) получаем:

$$\begin{aligned}
u_C &= u_C^* + \alpha_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \alpha_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + \alpha_3 C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3); \quad (25) \\
v_C &= v_C^* + \beta_1 C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + \beta_2 C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + \beta_3 C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3); \\
\varphi &= \varphi^* + C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) + C_3 \sin(\omega_3 t + \delta_3); \\
\dot{u}_C &= \alpha_1 \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \alpha_2 \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \alpha_3 \omega_3 C_3 \cos(\omega_3 t + \delta_3); \\
\dot{v}_C &= \beta_1 \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \beta_2 \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \beta_3 \omega_3 C_3 \cos(\omega_3 t + \delta_3); \\
\dot{\varphi} &= \omega_1 C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + \omega_2 C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) + \omega_3 C_3 \cos(\omega_3 t + \delta_3).
\end{aligned}$$

Для нахождения констант интегрирования  $C_1, C_2, C_3, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  используем начальные условия:

$$t_0 = 0; u_{C0}, v_{C0}, \varphi_0, \dot{u}_{C0}, \dot{v}_{C0}, \dot{\varphi}_0. \quad (26)$$

Из (25) имеем:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 C_1 \sin \delta_1 + \alpha_2 C_2 \sin \delta_2 + \alpha_3 C_3 \sin \delta_3 &= u_{C0} - u_C^*; \quad (27) \\
\beta_1 C_1 \sin \delta_1 + \beta_2 C_2 \sin \delta_2 + \beta_3 C_3 \sin \delta_3 &= v_{C0} - v_C^*; \\
C_1 \sin \delta_1 + C_2 \sin \delta_2 + C_3 \sin \delta_3 &= \varphi_0 - \varphi^*; \\
\alpha_1 \omega_1 C_1 \cos \delta_1 + \alpha_2 \omega_2 C_2 \cos \delta_2 + \alpha_3 \omega_3 C_3 \cos \delta_3 &= \dot{u}_{C0}; \\
\beta_1 \omega_1 C_1 \cos \delta_1 + \beta_2 \omega_2 C_2 \cos \delta_2 + \beta_3 \omega_3 C_3 \cos \delta_3 &= \dot{v}_{C0}; \\
\omega_1 C_1 \cos \delta_1 + \omega_2 C_2 \cos \delta_2 + \omega_3 C_3 \cos \delta_3 &= \dot{\varphi}_0.
\end{aligned}$$

Первые три из уравнений (27) решаем относительно величин:

$$C_{is} = C_i \sin \delta_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (28)$$

Последние три из этих уравнений решаем относительно величин:

$$C_{ic} = C_i \cos \delta_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (29)$$

После этого находим искомые величины:

$$C_i = \sqrt{C_{is}^2 + C_{ic}^2}; \quad \delta_i = \arctg \frac{C_{is}}{C_{ic}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (30)$$

Задача полностью решена.

### Программная реализация алгоритма

Рассмотрим применение полученных результатов к конкретному примеру из инженерной практики. На рис. 2 изображен чертеж Шлифовальной Бабки (ШБ), то есть узла шлифовального станка, предназначенного для крепления мотора, вращающего шлифовальный круг, и самого круга.

На современных станках с Числовым Программным Управлением (ЧПУ) ШБ совершает горизонтальные перемещения с достаточно большими ускорениями. Возникающие при этом силы инерции деформируют ШБ, что приводит к потере точности шлифовки. В связи с этим в процессе проектирования ШБ необходимо иметь возможность расчета деформаций с целью создания достаточно жесткой конструкции, для которой эти деформации не будут превышать некоторых допустимых значений.

На рис. 3 изображена упрощенная расчетная схема для данной конст-

рукции. Для стержней жесткое крепление к обойме заменено на шарнирное.

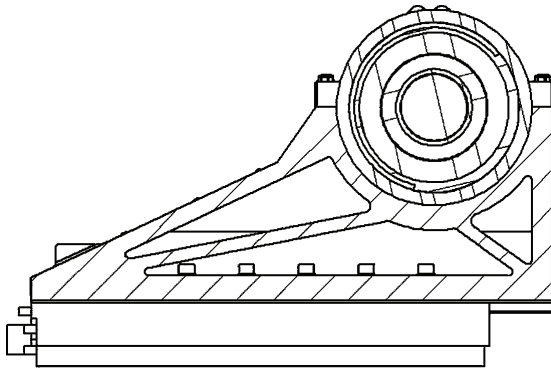


Рисунок 2 – Поперечный разрез шлифовальной бабки

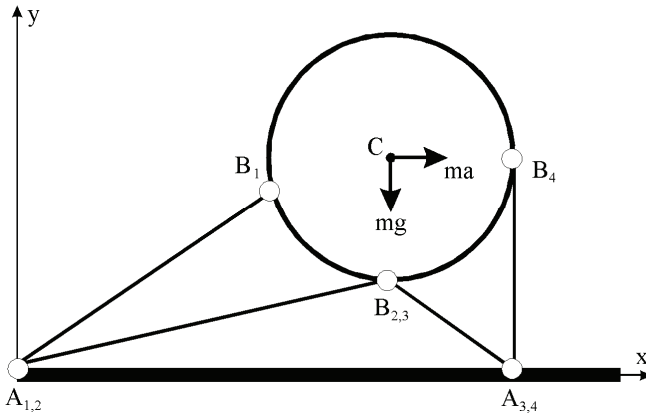


Рисунок 3 – Расчетная схема шлифбабки

Рассмотрим пример конкретного расчета. Зададим следующие характеристики стержней:

Первый стержень:

Координаты начальной точки:  $x_{A1} = 0$ ;  $y_{A1} = 0$ ; координаты конечной точки:  $x_{B1} = 354$  мм;  $y_{B1} = 225$  мм; площадь поперечного сечения:  $S_1 = 20 \times 500 = 10000 \text{ мм}^2$  (20 – толщина стержня, 500 – его размер в направлении, перпендикулярном рисунку); модуль упругости материала:  $E_1 = 66000 \text{ Н/мм}^2$ .

Второй стержень:

Координаты начальной точки:  $x_{A2} = 0$ ;  $y_{A2} = 0$ ; координаты конечной точки:  $x_{B2} = 450$  мм;  $y_{B2} = 225$  мм; площадь поперечного сечения:

$S_2 = 15 \times 500 = 7500 \text{ мм}^2$ ; модуль упругости материала:  $E_2 = 66000 \text{ Н/мм}^2$ .

Третий стержень:

Координаты начальной точки:  $x_{A3} = 625 \text{ мм}$ ;  $y_{A3} = 0$ ; координаты конечной точки:  $x_{B3} = 450 \text{ мм}$ ;  $y_{B3} = 111 \text{ мм}$ ; площадь поперечного сечения:  $S_3 = 15 \times 500 = 7500 \text{ мм}^2$ ; модуль упругости материала:  $E_3 = 66000 \text{ Н/мм}^2$ .

Четвертый стержень:

Координаты начальной точки:  $x_{A4} = 625 \text{ мм}$ ;  $y_{A4} = 0$ ; координаты конечной точки:  $x_{B4} = 625 \text{ мм}$ ;  $y_{B4} = 240 \text{ мм}$ ; площадь поперечного сечения:  $S_4 = 25 \times 500 = 12500 \text{ мм}^2$ ; модуль упругости материала:  $E_3 = 66000 \text{ Н/мм}^2$ .

Координаты центра масс:  $x_C = 471 \text{ мм}$ ;  $y_C = 245 \text{ мм}$ ; радиус тела:  $R = 134 \text{ мм}$ .

Масса тела:  $m = 350 \text{ кг}$ . Считая тело однородным кругом, вычисляем его момент инерции по формуле:

$$J = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} 350 \times 134^2 = 3142300 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2. \quad (31)$$

Обратим внимание на то, что при задании размеров в миллиметрах единица силы равна:

$$1 \text{ Н} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = 1000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2}. \quad (32)$$

Отсюда для модуля упругости имеем:

$$E = 66000000 \frac{\text{кг}}{\text{мм} \cdot \text{с}^2}. \quad (33)$$

Для всех стержней находим:

$$L_i = \sqrt{(x_{B_i} - x_{A_i})^2 + (y_{B_i} - y_{A_i})^2}; \quad (34)$$
$$\cos \alpha_i = \frac{x_{B_i} - x_{A_i}}{L_i}; \quad \sin \alpha_i = \frac{y_{B_i} - y_{A_i}}{L_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Таким образом получены все необходимые для расчетов параметры системы.

На тело действует его вес, равный:

$$mg \approx 350 \cdot 10000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2} = 3500000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2}. \quad (35)$$

Следовательно, имеем:

$$T_y = -mg = -3500000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2}. \quad (36)$$

При горизонтальном движении с ускорением  $a$ , которое достигает значения  $g$ , на тело действует горизонтальная сила инерции:

$$T_x = ma = 3500000 \frac{\text{кг} \cdot \text{мм}}{\text{с}^2}. \quad (37)$$



Момент в данной задаче равен нулю:  $M_c = 0$ .

Зададим начальные условия. Решая вначале уравнения (10) при  $T_x = 0$ , мы находим статические перемещения центра масс, которые и являются начальными координатами центра масс  $u_{C0}$ ,  $v_{C0}$  при нулевой начальной скорости  $\dot{u}_{C0} = 0$ ;  $\dot{v}_{C0} = 0$ .

Теперь все исходные данные для применения описанного алгоритма заданы. Выполняя соответствующие вычисления получаем изображенную на рис. 4 траекторию центра масс тела (сплошная линия) на некотором начальном промежутке времени. В процессе построения этой траектории мы можем найти максимальное горизонтальное отклонение центра масс. В данном случае имеем:  $u_{C \max} = 0,0000017909$  м. Это значение и является ключевым при проектировании ШБ.

**Метод Ньютона.** Проанализируем описанный выше аналитический метод решения задачи. Во-первых, при его реализации необходимо применять какие-то численные алгоритмы с реализацией на компьютере. Это касается, в первую очередь, вопроса поиска корней характеристического уравнения (18).

Во-вторых, этот метод является, в рамках решения большинства инженерных проблем, в частности, той, которая рассмотрена в примере, избыточным и достаточно сложным.

Рассмотрим другой метод [1], который опирается на исходные идеи Ньютона, примененные им при решении задач небесной механики [3]. Ньютон, фактически, рассматривал только движение материальных точек под действием постоянных сил, то есть равноускоренное движение. В случае переменных сил решение получалось как последовательность перемещений со скачкообразно изменяющимися значениями сил. Применим подобный подход и здесь.

На тело в его произвольном положении действуют некоторые суммарные нагрузки (2). В частности, эти нагрузки можно рассчитать и для начального момента времени  $t_0$ . С этой целью необходимо вычислить начальные значения реакций стержней при помощи выражений (7), подставляя в них значения  $u_C = u_{C0}$ ;  $v_C = v_{C0}$ ;  $\varphi = \varphi_0$ , а затем подставить найденные реакции в (2). Считая нагрузки постоянными на некотором небольшом промежутке времени  $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$  запишем закон движения тела:

$$\begin{aligned} u_C &= u_{C0} + \dot{u}_{C0}(t-t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2m} \sum F_{x0} ; \\ \dot{u}_C &= \dot{u}_{C0} + \frac{t-t_0}{m} \sum F_{x0} ; \\ v_C &= v_{C0} + \dot{v}_{C0}(t-t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2m} \sum F_{y0} ; \\ \dot{v}_C &= \dot{v}_{C0} + \frac{t-t_0}{m} \sum F_{y0} ; \end{aligned} \quad (38)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0(t-t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2J} \sum m_{C0};$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 + \frac{t-t_0}{J} \sum m_{C0}.$$

Индекс 0 в выражениях для нагрузок показывает, что они вычислены в момент времени  $t_0$ .

Вычислим все искомые величины в момент времени  $t_1 = t_0 + \Delta t$ :

$$u_{C1} = u_{C0} + \dot{u}_{C0}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2m} \sum F_{x0}; \quad \dot{u}_{C1} = \dot{u}_{C0} + \frac{\Delta t}{m} \sum F_{x0}; \quad (39)$$

$$v_{C1} = v_{C0} + \dot{v}_{C0}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2m} \sum F_{y0}; \quad \dot{v}_{C1} = \dot{v}_{C0} + \frac{\Delta t}{m} \sum F_{y0};$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2J} \sum m_{C0}; \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0 + \frac{\Delta t}{J} \sum m_{C0}.$$

Подставляя в (7) значения  $u_C = u_{C1}$ ;  $v_C = v_{C1}$ ;  $\varphi_C = \varphi_{C1}$  находим новые реакции стержней и, при помощи (2), новые суммарные нагрузки, действующие на тело  $\sum F_{x1}$ ;  $\sum F_{y1}$ ;  $\sum m_{C1}$ . Вычисляем приращения:

$$\Delta F_x = \sum F_{x1} - \sum F_{x0}; \quad \Delta F_y = \sum F_{y1} - \sum F_{y0}; \quad \Delta m_C = \sum m_{C1} - \sum m_{C0}. \quad (40)$$

Мы не учитывали изменение нагрузок на промежутке времени от  $t_0$  до  $t_1$ . Для компенсации накопившейся погрешности будем считать, что нагрузки в момент времени  $t_1$  изменились не на величины (40), а вдвое больше, получая:

$$\sum F_{x1} = \sum F_{x0} + 2\Delta F_x; \quad \sum F_{y1} = \sum F_{y0} + 2\Delta F_y; \quad \sum m_{C1} = \sum m_{C0} + 2\Delta m_C. \quad (41)$$

Выполняем замены:

$$t_0 = t_1; \quad u_{C0} = u_{C1}; \quad \dot{u}_{C0} = \dot{u}_{C1}; \quad v_{C0} = v_{C1}; \quad \dot{v}_{C0} = \dot{v}_{C1}; \quad \varphi_0 = \varphi_1; \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_1. \quad (42)$$

$$\sum F_{x0} = \sum F_{x1}; \quad \sum F_{y0} = \sum F_{y1}; \quad \sum m_0 = \sum m_1.$$

повторяем вычисления, начиная с (39). Вычисления заканчиваются после достижения некоторого заданного конечного момента времени  $t_k$ .

В итоге мы получаем значения всех искомых величин на дискретном множестве значений времени  $t$  с шагом  $\Delta t$ . Достижение заданной точности достигается, как обычно при численном интегрировании, подбором достаточно малого значения шага.

Обратим внимание на следующие особенности предлагаемого метода. Хотя формально это метод численного интегрирования дифференциальных уравнений (8), но для его применения запись уравнений в явном виде не требуется, что значительно облегчает задачу. Метод обладает достаточной устойчивостью, что проверяется при помощи решения тестовых задач.

Применим его для решения той же задачи о динамических деформациях ШБ, которая была рассмотрена выше. Соответствующие результаты (кружочки) изображены на том же рис. 4, на котором приведены результаты, по-

лученные аналитическим методом. Мы видим хорошее совпадение полученных результатов. Это показывает, что предлагаемый упрощенный метод является эффективным при решении инженерных задач.

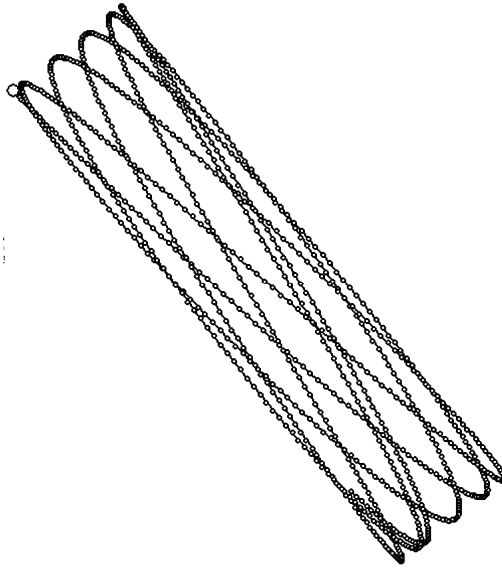


Рисунок 4 – Сравнение численного и аналитического методов. Решение численным методом отображено непрерывной кривой, аналитическим методом – кружочками

Максимальное смещение от положения равновесия по оси  $OX$  составляет  $0,0000017909$  м, по оси  $OY$  –  $0,0000017043$  м. Соответствующие частоты (21) будут  $\omega_1 = 2464,21377$  Гц;  $\omega_2 = 7051,16538$  Гц;  $\omega_3 = 3532,83615$  Гц.

### Выводы

- 1 Разработан численный метод интегрирования, основанный на идеях Ньютона, подходящий для решения широкого круга задач.
- 2 Исследуется использование этого метода для решения задач механики сплошных сред.

**Список литературы:** 1. *Безнос А.С., Шамровский А.Д.* Решение динамических задач для плоских стержневых систем без использования аппарата дифференциальных уравнений при помощи подхода ньютона // *Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні.* – 2009. – № 2. – С. 124-128. 2. *Кривуляк В.В.* Метод последовательных приближений для расчета стержневых систем // *Нові матеріали та технології в металургії та машинобудуванні.* – 2008. – № 2. – С. 110-118. 3. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. – М.: Наука», 1989. – 688 с.

*Поступила в редколлегию 06.05.2010.*