

**Н.Т.КУРБАНОВ**, канд. физ.-мат. наук, доцент, Сумгаитский  
государственный университет, Азербайджан;  
**У.САЛИЕВА**, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ МАЛОЙ ВЯЗКОСТИ

У статті досліджується задача про коливання в'язкопружних циліндричних оболонок при малій в'язкості. Задача вирішується методом інтегрального перетворення Лапласа і рішення отримано у вигляді ряду, оригіналом перший члена якого є рішення аналогічної задачі, яке отримано методом усереднення. Отримане рішення досліджено для ядра Ржаниціна і показано вплив подальших членів на рішення.

The paper investigates the problem of vibration of viscoelastic cylindrical shells with low viscosity. The problem is solved by the method of integral Laplace transform and the solution is obtained in a series, the original of the first member of which is to solve a similar problem, which is obtained by averaging. The resulting solution is investigated for the kernel Rzhantsina and shows the effect of subsequent terms of the decision.

Развитие современной техники требует широкое применение полимерных, композитных и других материалов с ярко выраженными реологическими свойствами. Изучение физико-механических свойств этих материалов и анализ их применения в промышленности показали необходимость использования в расчетах на прочность конструкции методов теории вязкоупругости.

Отсутствие единого метода пригодного для произвольных наследственных ядер является причиной того, что не были решены важные практические задачи.

В данной работе предлагается новый подход к решению указанной проблемы для малой вязкости пригодных как для решения нестационарных задач, так и задач колебаний линейных вязкоупругих систем.

Рассмотрим задачу о свободном колебании цилиндрической оболочки, который описывается уравнениями в перемещениях

$$L_k[U_1, U_2, U_3] = \rho h \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \quad (k = \overline{1, 3}) \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность материала,  $h$  – толщина оболочки,  $U_k$  – перемещение.

Зависимость между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  принимается в виде:

$$\begin{aligned} s_{ij}(t) &= 2G \left[ \varepsilon_{ij}(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right]; \\ \sigma(t) &= k \left[ \theta(t) - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Gamma(t) = -\frac{1}{2G} R'(t)$ ;  $\Gamma_1(t) = -\frac{1}{k} R_1'(t)$ .

$R(t)$  и  $R_1(t)$  называются функциями сдвиговой и объемной релаксации соответственно,  $G$  – мгновенный модуль сдвига,  $K$  – мгновенный модуль объемного сжатия. Перепишем соотношения (2) в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = s_{ij} + \sigma = 2G \left[ \varepsilon_{ij} - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varepsilon_{ij}(\tau) d\tau \right] + \\ + \frac{3k-2G}{3} \left[ \theta(t) - \int_0^t \Gamma(t-\tau) \theta(\tau) d\tau \right] \delta_{ij} + \\ + k \delta_{ij} \int_0^t [\Gamma(t-\tau) - \Gamma_1(t-\tau)] \theta(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть

$$\int_0^t [\Gamma(t-\tau) - \Gamma_1(t-\tau)] \theta(\tau) d\tau = 0,$$

тогда

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} E^*(\varepsilon_{ij}) + \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} E^*(\theta) \delta_{ij}, \quad (4)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона, а оператор  $E^*(z)$  задается формулой

$$E^*(z) = z - \int_0^t \Gamma(t-\tau) z(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Предполагаем, что выполняется гипотеза Кирхофа-Лява и изотропия материала сохраняется. Тогда при  $\sigma_{33} = 0$

$$E^*(\varepsilon_{33}) = -\frac{\nu}{1-\nu} E^*(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (6)$$

и уравнение (4) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} [E^*(\varepsilon_{11}) + \nu E^*(\varepsilon_{22})]; \\ \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} [E^*(\varepsilon_{22}) + \nu E^*(\varepsilon_{11})]; \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} E^*(\varepsilon_{12}). \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства в уравнениях для моментов и перерезывающих сил, получаем:

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [E^*(\varepsilon_1) + \nu E^*(\varepsilon_2)]; \quad T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} [E^*(\varepsilon_2) + \nu E^*(\varepsilon_1)]; \\ T_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} E^*(\omega); \quad M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [E^*(\varkappa_1) + \nu E^*(\varkappa_2)]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$M_2 = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} [E^*(\aleph_2) + \nu E^*(\aleph_1)]; \quad M_{21} = M_{12} = \frac{E h^3}{12(1+\nu)} E^*(\tau).$$

Поэтому из уравнения (1) для вязкоупругой оболочки получаем:

$$L_k [E^*(U_1), E^*(U_2), E^*(U_3)] = \rho h \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Отметим что, к уравнению (8), описывающему уравнения колебаний вязкоупругой оболочки, следует присоединить начальные и граничные условия.

Граничные условия могут быть заданы различным образом, а начальные условия принимаем в виде:

$$U|_{t=0} = T(t)|_{t=0} = T_0; \quad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = T'(t)|_{t=0} = T'_1 \quad (9)$$

Во многих практических задачах исследование колебаний вязкоупругих систем сводится к решению интегро-дифференциальных уравнений, которые получаются из уравнений (8) либо методом разделения переменных, либо методом Бубнова-Галеркина. При этом из уравнения (8) получаем:

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = \varepsilon \lambda^2 \int_0^t \omega(t-\tau) T(\tau) d\tau, \quad (10)$$

где  $\Gamma(t) = \varepsilon \omega(t)$ ,  $\varepsilon = \Gamma(t_0)$ ,  $0 \leq \omega(t) \leq 1$ .

Отсюда видно, что решение поставленной задачи сводится к решению уравнения (10) при условии (9).

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$  к уравнению (10), получаем:

$$\bar{T}(p) = \frac{pT_0 + T'_0}{p^2 + \lambda^2 - \varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}. \quad (11)$$

Здесь неравенство

$$0 \leq \varepsilon \int_0^t \omega(t) d\tau \ll 1, \quad \varepsilon \omega(t) \geq 0,$$

установленное А.А. Ильюшиным, справедливо. Из этого неравенства следует, что

$$\left| \frac{\varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}{p^2 + \lambda^2} \right| < 1$$

удовлетворяется.

При этих предположениях правую часть равенства (11) разлагаем в ряд:

$$\bar{T}(p) = \frac{pT_0 + T'_0}{p^2 + \lambda^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\varepsilon \lambda^2 \varpi(p)}{p^2 + \lambda^2} \right)^n. \quad (12)$$

Положим

$$\begin{aligned}
& \frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{\omega}(p)}{p^2 + \lambda^2} = \varepsilon \lambda \int_0^t \sin \lambda(t - \tau) \omega(\tau) d\tau = \\
& = \varepsilon \lambda \int_0^t [\sin \lambda t \cos \lambda \tau - \cos \lambda t \sin \lambda \tau] \omega(\tau) d\tau = \\
& = \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_0^t \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_0^t \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau = \\
& = \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_0^\infty \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_0^\infty \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau - \\
& - \varepsilon \lambda \sin \lambda t \int_t^\infty \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau + \varepsilon \lambda \cos \lambda t \int_t^\infty \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau .
\end{aligned}$$

Тогда находим

$$\frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{\omega}(p)}{p^2 + \lambda^2} = \varepsilon \lambda \omega_c \sin \lambda t - \varepsilon \lambda \omega_s \cos \lambda t - \varepsilon \lambda B(t) .$$

В правой части последней формулы, переходя к преобразованию Лапласа, определяем

$$\frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{\omega}(p)}{p^2 + \lambda^2} = \frac{\varepsilon \lambda^2 \omega_c - \varepsilon \lambda p \omega_s - \varepsilon \lambda (p^2 + \lambda^2) \bar{B}(p)}{p^2 + \lambda^2} \quad (13)$$

где

$$\omega_s = \int_0^\infty \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau ; \quad \omega_c = \int_0^\infty \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau ;$$

$$B(t) = \sin \lambda t \int_t^\infty \omega(\tau) \cos \lambda \tau d\tau - \cos \lambda t \int_t^\infty \omega(\tau) \sin \lambda \tau d\tau ,$$

учитывая эту формулу в (12) и суммируя ряды, получаем

$$\bar{T}(p) = \frac{pT_0 + T_0'}{a(p) - \varepsilon \lambda^2 \bar{b}(p)} ; \quad (14)$$

здесь:

$$\bar{a}(p) = \left( p + \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda \right)^2 + \lambda^2 \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)^2 ,$$

$$\bar{b}(p) = \bar{\omega}(p) + \omega_s \frac{p}{\lambda} + \omega_c + \frac{\varepsilon}{4} (\omega_s^2 + \omega_c^2) .$$

Аналогично вышеприведенному, при тех же значениях параметра  $p$  и следовательно времени  $t$ , можно показать что, справедливо неравенство

$$\left| \frac{\varepsilon \lambda^2 \bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right| < 1 .$$

Поэтому формулу (14) можем написать в виде:

$$\bar{T}(p) = \frac{pT_0 + T_0'}{\bar{a}(p)} \left[ 1 + \varepsilon \lambda^2 \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} + \varepsilon^2 \lambda^4 \frac{\bar{b}^2(p)}{\bar{a}^2(p)} + \dots \right]. \quad (15)$$

Оригинал первого члена этого ряда имеет вид:

$$T_0(t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda t\right) \times \left[ T_0 \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t + \frac{T_0' - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda}{\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right)} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t \right]. \quad (16)$$

Это есть известное решение поставленной задачи, полученное методом усреднения. Оригинал второго члена ряда (15) вычисляется с помощью свертки функции в виде:

$$T_1(t) = \varepsilon \lambda^2 T_0(t) * L^{-1} \left[ \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right], \quad (17)$$

где  $L^{-1}$  – оператор обратного преобразования Лапласа, а звездочка обозначает свертку функций

$$g(t) \cdot \varphi(t) = \int_0^t g(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

С этой целью представляем отношение  $\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)}$  в виде:

$$\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} = \frac{\bar{w}(p)}{\bar{a}(p)} + \frac{\omega_s}{\lambda} \cdot \frac{p+d}{\bar{a}(p)}.$$

Отсюда находим

$$L^{-1} \left[ \frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)} \right] = \omega(t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda t\right) \times \frac{\sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t}{\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right)} + \frac{\omega_s}{\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda t\right) \times \left[ \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t + \frac{d - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda}{\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right)} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t \right], \quad (18)$$

где

$$d = \frac{\omega_c}{\omega_s} \lambda + \frac{\varepsilon \lambda}{4 \omega_s} (\omega_s^2 + \omega_c^2).$$

Отсюда видно, что восстановление оригиналов следующих приближений ряда (15) не представляет труда. Из уравнений (17) и (18) следует, что в силу вязкости материала с течением времени колебания затухают по экспоненциальному закону, а коэффициент затухания равен  $\left(-\frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda\right)$ .

Для вычисления влияния члена (17) на решение

$$T(t) = T_0(t) + T_1(t),$$

где  $T_0(t)$  и  $T_1(t)$  определяются по формулам (16) и (18) соответственно, рассмотрим ядро Ржаницина, который имеет вид:

$$\omega(t) = \varepsilon t^{\alpha-1} \exp(\beta t),$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta$  – постоянная,  $\varepsilon$  – некоторый малый параметр. Для этого ядра из (17) находим:

$$\begin{aligned} T_1(t) = & \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon \lambda \omega_s t\right) \times \\ & \times \left\{ \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t + \frac{\varepsilon A_4}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t \right] \times \right. \\ & \times \int_0^t \exp(-\beta \tau) \tau^{\alpha-1} \sin 2\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) \tau d\tau + \\ & + \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t - \frac{\varepsilon A_4}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t \right] \times \\ & \times \int_0^t \exp(-\beta \tau) \tau^{\alpha-1} d\tau - \left[ \frac{\varepsilon A_1}{2} \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t - \frac{\varepsilon A_4}{2} \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t \right] \times \\ & \times \int_0^t \exp(-\beta \tau) \tau^{\alpha-1} \cos 2\lambda (1 - \varepsilon \omega_c) \tau d\tau + \frac{t}{2} (A_2 - A_6) \cos \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \Gamma_c\right) t + \\ & \left. + \left[ \frac{A_2 + A_6}{2\lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right)} + \frac{t}{2} (A_3 + A_5) \right] \times \sin \lambda \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c\right) t \right\}. \end{aligned}$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – гамма функция Эйлера.

$$\omega_s = \varepsilon \Gamma(\alpha) (\beta^2 + \lambda^2)^{\frac{\alpha}{2}} \sin[\alpha \arctg(\lambda/\beta)];$$

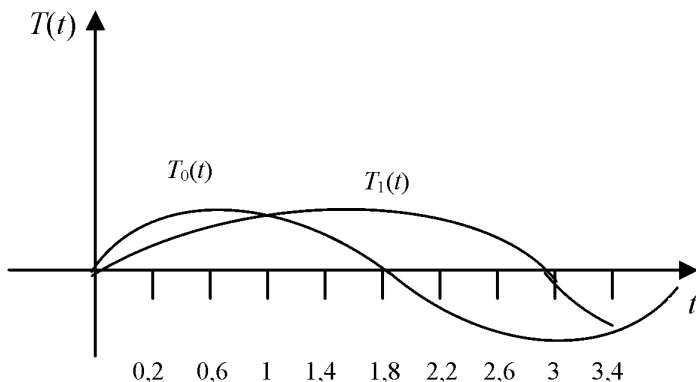
$$\omega_c = \varepsilon \Gamma(\alpha) (\beta^2 + \lambda^2)^{\frac{\alpha}{2}} \cos[\alpha \arctg(\lambda/\beta)];$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon \lambda T_0}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c}; \quad A_2 = \varepsilon \lambda T^0 \omega_s;$$

$$A_3 = \frac{\varepsilon \omega_s T_0 \left( d - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda \right)}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c}; \quad A_4 = \frac{\varepsilon \left( T_0' - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s T_0 \right)}{\left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)^2};$$

$$A_5 = \frac{\varepsilon \omega_s \left( T_0' - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s \lambda T_0 \right)}{1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c}; \quad A_6 = \frac{\varepsilon \omega_s \left( T_0' - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_s T_0 \right) \left( d - \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \omega_s \right)}{\lambda \left( 1 - \frac{1}{2} \varepsilon \omega_c \right)^2}.$$

Здесь для полипропилена при  $\alpha = 0,1$ ;  $\beta = 0,05$ ;  $\varepsilon = 0,09$ ;  $\lambda = 1$ ;  $T_0 = 1$ ;  $T_0' = 0$  построены графики функций  $T_0(t)$  и  $T_1(t)$ .



Из рисунка видно, что учет последующих членов ряда улучшает точность решения, и амплитуды всех членов ряда с течением времени уменьшаются по экспоненциальному закону, а фазы сдвинуты.

**Список литературы:** 1. *Ильясов М.Х., Курбанов Н.Т.* К решению интегро-дифференциального уравнения динамических задач линейной вязкоупругости // ДАН. Азерб. ССР. – 1984. – № 5. 2. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. 3. *Колтунов М.А.* Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. 4. *Ларионов Г.С.* Исследование колебаний релакстрирующих систем методом усреднения // Механика полимеров. – 1969. – № 5. – С. 806-813. 5. *Ларионов Г.С.* Решение некоторых динамических задач теории вязкоупругости методом усреднения // Механика полимеров. – 1970. – № 2. 6. *Блиштейн Ю.М., Мешиков С.И., Чебан В.Г., Чекаррев А.В.* Распространение волн в вязкоупругих средах. – Кишинев, Штинница, 1977. 7. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. – М.: Изд-во МГУ, 1975.

Поступила в редколлегию 28.01.2010