

*С. ДАРЯЗАДЕ*, аспирант, НТУ «ХПИ»

## **ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНАХ ИЗ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТОВ**

Робота присвячена дослідженню концентрації напружень в пластинах із композиційних матеріалів. Ефективні пружні постійні односпрямованих композитів розраховані для склопластиків та вуглепластиків з різними коефіцієнтами наповнення. Для визначення максимальних напружень на контурі отвору використане рішення плоскої задачі для ортотропного матеріалу. Проведені розрахунки для розтягнення під різноманітними кутами до головних напрямків ортотропії.

Work is devoted to the research of stress concentration in plates made from composite materials. Effective elastic constants of the unidirectional composites are combed for glass-plastics and coal-plastics with various filling factors. For definition of the maximal stress around of an hole it is used decisions for orthotropic flat problem. Calculations for a stretching under various corners to the main directions of orthotropic material are executed.

Тонкостенные элементы конструкции из композиционных материалов широко используются в различных отраслях современной техники. По конструктивным или технологическим требованиям такие элементы ослабляются круговыми отверстиями, вокруг которых возникает концентрация напряжений. Локальное повышение напряжений оказывает существенное влияние на прочность всей конструкции.

Для пластин из изотропных материалов коэффициент концентрации зависит от условий нагружения вдали от отверстий и их взаимное расположение [1]. Для ортотропных материалов на концентраций напряжений оказывает влияние и направление главных осе ортотропии [11].

В пластинах из композиционных материалов коэффициенты концентрации зависят также от структуры композита, что определяет актуальность исследований напряженного состояние вокруг отверстий с учетом всех факторов определяющих в итоге прочностные свойства конструкций.

В настоящей работе проводится исследование концентрации напряжений вокруг отверстия в пластинах из однонаправленных волокнистых композитов в зависимости от структуры, свойств матрицы и наполнителя, условий нагружения [1-5].

Настоящие исследование включает гомогенизацию и определение эффективных упругих характеристик для эквивалентного ортотропного материала, решение задач о концентрации напряжений в ортотропных пластинах и анализ основных факторов определяющих уровень концентрации напряжений.

### **1. Эффективные упругие постоянные однонаправленного компози-**

**та.** При исследовании концентрации напряжений в композитных пластинах с отверстиями предполагается, что толщина пластины существенно меньше радиуса отверстия. Это позволяет проводить исследования в рамках плоской задачи теории упругости.

Характерные размеры внутренней структуры композита радиус волокон и параметры представительской ячейки значительно меньше толщины пластины.

Материал пластины рассматривается как однородное ортотропное упругое тело.

В настоящее время существуют различные подходы к решению проблемы гомогенизации однонаправленного композита [1].

При всем их многообразии результатом являются эффективные упругие постоянные, которые связывают осредненные напряжения и деформации в ортотропном теле:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = a_{ijkl} \langle \sigma_{kl} \rangle, \quad (i,j = 1,2,3). \quad (1)$$

Если координатные плоскости выбранной системы координат параллельны плоскостям симметрии упругих ортотропного материала, то закон Гука имеет вид [5]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

Для случая плоского напряженного состояния физические соотношения физического однородного материала можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}; \quad (3)$$

В технических приложениях часто используются следующие обозначения:

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}; \quad a_{44} = \frac{1}{G_{12}}. \quad (4)$$

**2. Определение эффективных упругих постоянных для ортотропной пластинки.** Для решения задач плоского напряженного состояния упругие свойства ортотропного тела определяются 4-я независимыми постоянными.

Для их определения использована методика решения плоских двоякопериодических задач с использованием функций комплексного переменного.

Решение задач о продольно – поперечном растяжении и продольно – поперечном сдвиге позволяет получить в явном виде зависимости осредненных упругих постоянных композита от свойств материалов матрицы и волокон для различных схем армирования [3].

$$\begin{aligned}
 G_{12} &= G_m \frac{1-\xi + (1-\xi) \cdot G_m / G_b}{1-\xi + (1+\xi) \cdot G_m / G_b}; \\
 \nu_{21} &= \nu_m - \frac{(\chi_m + 1)(\nu_m - \nu_b)\xi}{2-\xi + \chi_m \xi + (1-\xi)(\chi_b - 1) \cdot G_m / G_b}; \\
 E_1 &= \xi E_b + (1-\xi)E_m + \frac{8 \cdot G_m \xi (1-\xi)(\nu_b - \nu_m)}{2-\xi + \chi_m \xi + (1-\xi)(\chi_b - 1) \cdot G_m / G_b}; \\
 \frac{1}{E_2} &= \frac{(\nu_{21})^2}{E_1} + \frac{1}{8G} \left[ \frac{2(1-\xi)(\chi_m - 1) + (\chi_b - 1)(\chi_m - 1 + 2\xi) \cdot G_m / G_b}{2-\xi + \chi_m \xi + (1-\xi)(\chi_b - 1) \cdot G_m / G_b} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\chi_m (1-\xi) + (1+\xi)\chi_m \cdot G_m / G_b}{\chi_m + \xi + (1-\xi) \cdot G_m / G_b} \right].
 \end{aligned} \tag{5}$$

И равенством

$$\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_2}{E_1};$$

где

$$\chi_m = 3 - 4\nu_m; \quad \chi_b = 3 - 4\nu_b, \tag{6}$$

где  $E_1, E_2, G, \nu_{12}$  и  $\nu_{21}$  – осредненные упругие постоянные,  $E_m, G_m, \nu_m$  и  $E_b, G_b, \nu_b$  – упругие постоянные волокна и матрицы.

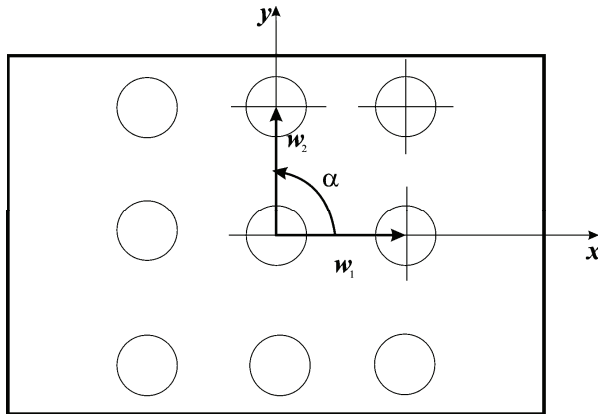


Рисунок 1 – Вид тетрагональной структуры

Все величины, относящиеся к волокну, отмечаются индексом « $b$ », к матрице – индексом « $m$ ».

Для оценки пределов изменения упругих характеристик композиционных материалов находится предельное объемное содержание волокон в представительском элементе композиционного материала для двоякопериодических структур.

Рассмотрим геометрию простейших регулярных упаковок для однонаправленных волокнистых композитов. Представительская ячейка в поперечном сечении среды ограничена векторами  $w_1$  и  $w_2 = w_1 b e^{i\alpha}$ .

Относительное объемное содержание волокон с радиусом « $a$ » будет

$$\xi = \frac{\pi \cdot a^2}{w_1^2 \cdot b \cdot \sin \alpha}. \quad (7)$$

Известно [3], что в гексагональной структуре можно поместить при плотной упаковке на 15 % больше волокон, чем при тетрагональной упаковке.

**3. Общие выражение для функции напряжений плоской задачи теории упругости.** Для получения аналитических решений плоских задач теории упругости эффективным является применение функций комплексного переменного [8]. Решение для ортотропного материала сводится к определению в области «S» на плоскости «ху» [9], функции напряжений  $F(x,y)$ , удовлетворяющий дифференциальному уравнению [7]

$$\frac{1}{E_2} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_1} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (8)$$

Введением обобщенных комплексных переменных  $x + \mu_k \cdot y$  решение уравнения (8) представляется в следующем виде:

$$F = F_1(x + \mu_1 y) + F_2(x + \mu_2 y) + F_3(x + \overline{\mu_1} y) + F_4(x + \overline{\mu_2} y). \quad (9)$$

Здесь  $F_1, F_2$  – произвольные функции комплексных переменных  $x + \mu_k \cdot y$  или  $x + \overline{\mu_k} \cdot y$ .

Комплексные параметры  $\mu_k$  зависят от упругих постоянных анизотропного тела. В случае ортотропной пластинки при совмещении осей системы координат с главными направлениями упругих свойств эти параметры удовлетворяют уравнению

$$\mu^4 + \left( \frac{E_1}{G} - 2 \cdot \nu_1 \right) \cdot \mu^2 + \frac{E_1}{E_2} = 0. \quad (10)$$

где  $\mu_k$  – корни характеристического уравнения (10).

В зависимости от соотношений упругих постоянных возможны следующие три случая комплексных параметров. Чаще всего для реальных композиционных материалов реализуется случай различных комплексных параметров. В таком случае функция напряжений представляется в виде

$$F = 2 \cdot \text{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)], \quad (11)$$

где  $Z_k = x + \mu_k \cdot y$  – обобщенные комплексные переменные.

Компоненты тензора напряжений выражаются через введенные функции следующим образом

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left[ \mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2) \right]; \\ \sigma_y &= 2 \cdot \operatorname{Re} \left[ \Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2) \right]; \\ \tau_{xy} &= -2 \cdot \operatorname{Re} \left[ \mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2) \right],\end{aligned}\quad (12)$$

где введены обозначения для производных от функций комплексных переменных

$$\Phi_1(z_1) = \frac{dF_1}{dz_1}; \quad \Phi_2(z_2) = \frac{dF_2}{dz_2}; \quad \Phi_1'(z_1) = \frac{d^2F_1}{dz_1^2}; \quad \Phi_2'(z_2) = \frac{d^2F_2}{dz_2^2}. \quad (13)$$

При заданных внешних усилиях  $X_n, Y_n$  на контурах отверстий граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned}2 \cdot \operatorname{Re} \left[ \Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) \right] &= \pm \int_0^s Y_n ds + c_1 = 0; \\ 2 \cdot \operatorname{Re} \left[ \mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2) \right] &= \pm \int_0^s X_n ds + c_2 = 0.\end{aligned}\quad (14)$$

**4. Распределение напряжений в плоских ортотропных областях с круговым отверстием.** Рассмотрены случаи распределение напряжений в бесконечной ортотропной пластинке ослабленной круговым отверстием радиуса «а». Наибольшие напряжения возникают на контуре отверстия. Для оценки концентрации напряжений целесообразно представить результаты в полярной системе координат. Окружная координата  $\theta$  отсчитывается от оси X. Для компактного представления результатов вводятся обозначения:

$$m = \frac{E_1}{G} - 2\nu_1; \quad k = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \quad n = \sqrt{2k + m}, \quad (15)$$

где  $E_\theta$  – Модуль Юнга для направлений касательных к контуру отверстия

$$\frac{1}{E_\theta} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \left( \frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_2}. \quad (16)$$

В случае растяжения под углом  $\psi$  к направлению оси X окружное напряжение на контуре отверстия [7], представляется в виде

$$\sigma_\theta = P \cdot f(\theta),$$

где

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \frac{E_\theta}{E_1} \left\{ -[\cos^2 \psi + (k+n)\sin^2 \psi] k \cos^2 \theta + [(1+n)\cos^2 \psi - k \sin^2 \psi] \sin^2 \theta - \right. \\ &\quad \left. -n(1+k+n)\sin \psi \cos \psi \sin \theta \cos \theta \right\}.\end{aligned}\quad (17)$$

**5. Результаты вычислений.** Численные результаты получены для двух видов композиционных материалов – стеклопластика и углепластика.

1 Стеклопластик. В качестве матрицы стеклопластика использовался эпоксидный полимер со следующими параметрами  $E_m = 4200$  МПа;  $G_m = 1500$  Мпа и  $\nu_m = 0,4$ .

Армирующий элемент композиции имеет механические характеристики стекловолокна  $E_m = 74800$  МПа;  $G_m = 31000$  Мпа и  $\nu_m = 0,2$ .

2 Углепластик. Для армирующего элемента – углеволокна приняты следующие упругие постоянные  $E_m = 235000$  МПа;  $G_m = 90400$  Мпа и  $\nu_m = 0,3$ . Упругие характеристики связующего равны  $E_m = 3500$  МПа;  $G_m = 1320$  Мпа и  $\nu_m = 0,32$ .

Результаты получены для двух видов структур при растяжении на бесконечности напряжением  $P = 100$  МПа в направлениях осей симметрии упругих свойств ортотропного материала.

Таблица 1 – характеристики стеклопластика гексагональной структуры

$\xi$	$E_1^0$ , ГПа	$E_2^0$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}^0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\xi_{\max} 0,92$	69,07	47,8	0,72	0,21	0,12I	9,7I
0,573	44,4	13,55	1,33	0,28	0,32I	5,7I
0,227	20	6,8	1,4	0,34	0,48I	3,58I
0,142	14	5,8	1,47	0,36	0,53I	2,92I
0,0574	8,2	4,9	1,49	0,38	0,62I	2,08I

Таблица 2 – максимальное напряжение при  $\psi = 0$  и  $\psi = 90$  для стеклопластика гексагональной структуры

$\xi$	$\sigma_{\theta\max} (\psi = 0)$	$\sigma'_{\theta\max} (\psi = 90)$
$\xi_{\max} 0,92$	1100	910
0,573	700	440
0,227	510	340
0,142	440	320
0,0574	380	310

Таблица 3 – характеристики стеклопластика тетрагональной структуры

$\xi$	$E_1^0$ , ГПа	$E_2^0$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}^0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\xi_{\max} 0,78$	59	24,4	1,13	0,4	0,21I	7,19I
0,488	38,6	11,1	1,38	0,4	0,36I	5,20I
0,196	18	6,4	1,47	0,4	0,5I	3,35I
0,1225	12,8	5,6	1,48	0,4	0,55I	2,75I
0,049	7,6	4,8	1,49	0,4	0,63I	1,98I

В табл. 1-8 приведены упругие характеристики, корни характеристиче-

ского уравнения и максимальные напряжения на контуре отверстия для гексагональной и тетрагональной структур при различных значениях относительного объемного содержания волокон.

Таблица 4 – максимальное напряжение при  $\psi = 0$  и  $\psi = 90$   
для стеклопластика тетрагональной структуры

$\zeta$	$\sigma_{\theta\max}(\psi = 0)$	$\sigma'_{\theta\max}(\psi = 90)$
$\zeta_{\max} 0,78$	850	575
0,488	660	400
0,196	490	350
0,1225	440	310
0,049	360	305

Таблица 5 – характеристики углепластика гексагональной структуры

$\zeta$	$E_1^0$ , ГПа	$E_2^0$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}^0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\zeta_{\max} 0,92$	216	57	0,99	0,3	0,132I	14,75I
0,573	136	11,3	1,27	0,3	0,34I	10,31I
0,227	56	5,5	1,3	0,31	0,49I	6,48I
0,142	36	4,78	1,3	0,31	0,53I	5,17I
0,0574	16,8	4,1	1,3	0,31	0,588I	3,43I

Таблица 6 – максимальное напряжение при  $\psi = 0$  и  $\psi = 90$   
для углепластика гексагональной структуры

$\zeta$	$\sigma_{\theta\max}(\psi = 0)$	$\sigma'_{\theta\max}(\psi = 90)$
$\zeta_{\max} 0,92$	1590	860
0,573	1180	410
0,227	790	320
0,142	660	305
0,0574	500	300

Таблица 7 – характеристики углепластика тетрагональной структуры

$\zeta$	$E_1^0$ , ГПа	$E_2^0$ , ГПа	$G$ , ГПа	$\nu_{12}^0$	$\mu_1$	$\mu_2$
$\zeta_{\max} 0,78$	184	23	1,19	0,3	0,23I	12,37I
0,488	116	9,2	1,28	0,3	0,37I	9,5I
0,196	48,85	5,2	1,31	0,31	0,5I	6,0I
0,1225	31,8	4,6	1,31	0,31	0,54I	4,8I
0,049	14,8	4,06	1,32	0,32	0,6I	3,2I

Распределение окружных напряжений на контуре отверстия показано на рис. 2-5 для относительного объемного содержания волокон гексагональной  $\zeta = 0,573$  и тетрагональной структур  $\zeta = 0,488$ .

Таблица 8 – максимальное напряжение при  $\psi = 0$  и  $\psi = 90$   
для углепластика тетрагональной структуры

$\zeta$	$\sigma_{\theta\max} (\psi = 0)$	$\sigma'_{\theta\max} (\psi = 90)$
$\zeta_{\max}$ 0,78	1350	540
0,488	1100	380
0,196	760	320
0,1225	650	305
0,049	480	290

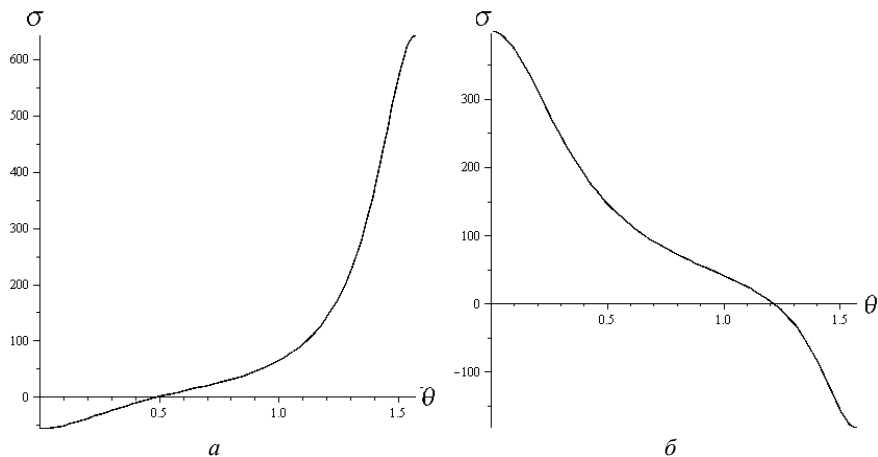


Рисунок 2 – распределение напряжений для стеклопластика гексагональной структуры (*a* – при  $\psi = 0$ ; *б* – при  $\psi = 90$ )

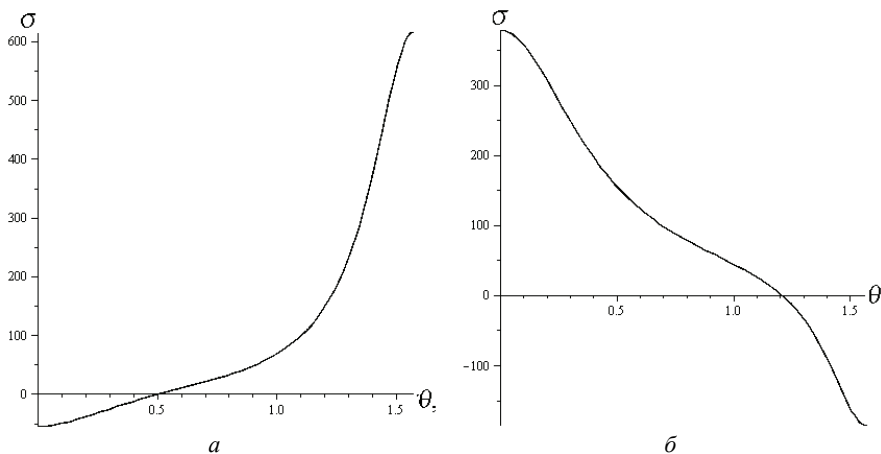


Рисунок 3 – распределение напряжений для стеклопластика тетрагональной структуры (*a* – при  $\psi = 0$ ; *б* – при  $\psi = 90$ )



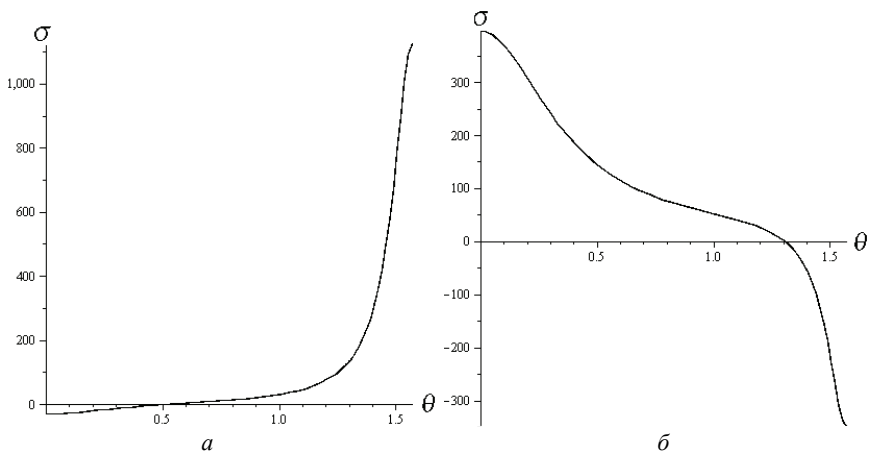


Рисунок 4 – распределение напряжений для углепластика гексагональной структуры (*a* – при  $\psi = 0$ ; *б* – при  $\psi = 90$ )

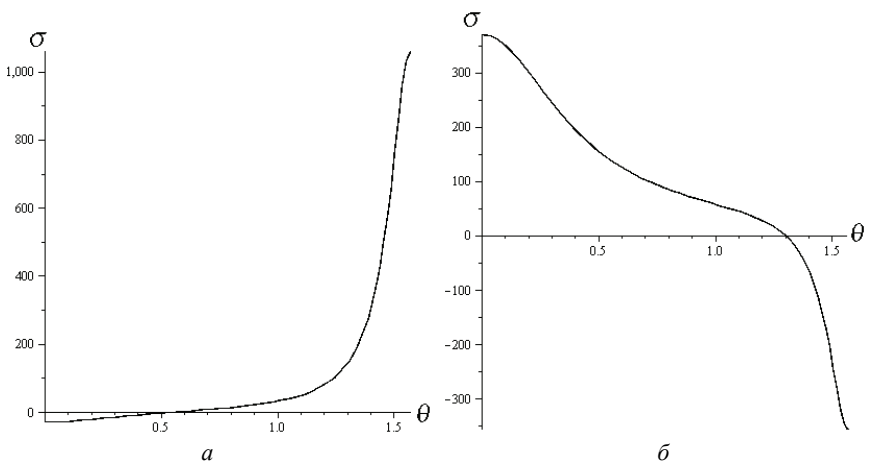


Рисунок 5 – распределение напряжений для углепластика тетрагональной структуры (*a* – при  $\psi = 0$ ; *б* – при  $\psi = 90$ )

Для проверки достоверности результатов решения по изложенной методике выполнен расчет по методу конечных элементов с помощью программного комплекса ANSYS[9].

Использован конечный элемент Plane 2, который содержит 6 узлов и две степени свободы в каждом узле (перемещения вдоль осей  $x$ ,  $y$ ). В силу симметрии задачи вычисления проведены для четверти пластины (рис. 6).

**Вывод:** Предложенная методика позволяет эффективно рассчитывать концентрацию напряжений вокруг отверстий в пластинах из композицион-

ных материалов. Сравнение с численными результатами, полученными методом конечных элементов показывает, что максимальное расхождение результатов по двум методикам не превышает 4 %. Это свидетельствует о достаточной для практического применения точности предложенной методики.

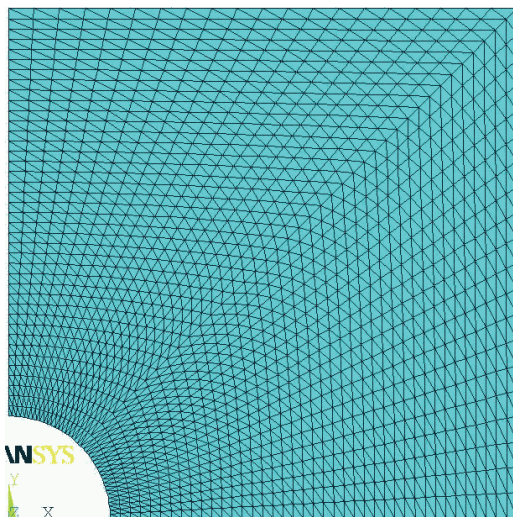


Рисунок 6 – Сетка конечных элементов

SEQV (AVG)  
DMX =.238E-07  
SMN =2.901  
SMX =650.966

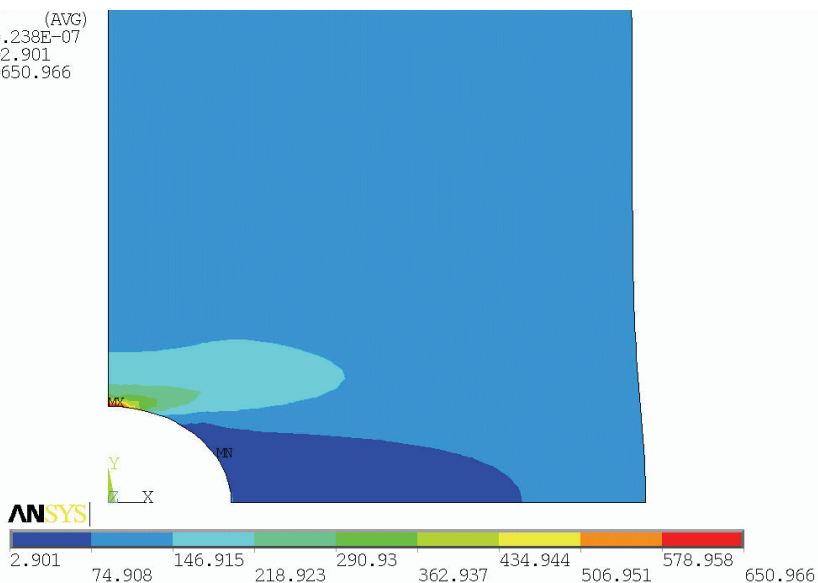


Рисунок 7 – Распределение эквивалентных напряжений для стеклопластика гексагональной структуры при  $\psi = 0$

SEQV (AVG)  
DMX =.515E-07  
SMN =6.943  
SMX =423.086



ANSYS



Рисунок 8 – Распределение эквивалентных напряжений стеклопластика гексагональной структуры при  $\psi = 0$

**Список литературы:** 1. Алфутов Н.А., Зиновьев, Попов Б.Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М: Машиностроение, 1984. – 264 с. 2. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. 3. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. – К. Наукова думка, 1971. – 304 с. 4. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с. 5. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с. 6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с. 7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с. 8. Мухелшвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с. 9. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с. 10. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с. 11. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.

Поступила в редколлегию 13.09.2010.