

С.В. УГРИМОВ, канд. техн. наук, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
А.Н. ШУПИКОВ, д-р техн. наук, ИПМаш НАН Украины, Харьков

МОДЕЛИРОВАНИЕ НИЗКОСКОРОСТНОГО УДАРА ПО СЛОИСТЫМ ОРТОТРОПНЫМ ПЛАСТИНАМ. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ

У роботі запропонована узагальнена теорія еластодинаміки ортотропних шаруватих пластин. На її основі розроблено аналітико-чисельний метод розв'язання задачі про низькошвидкісний удар по шаруватим ортотропним пластинам. Можливості та вірогідність запропонованого методу ілюструються на тестових прикладах. Обговорюються питання щодо застосування різних двовимірних теорій для аналізу напружено-деформованого стану шаруватих пластин при ударі.

The generalized theory of elastodynamics orthotropic laminated plates is proposed in paper. On its basis the analytical-numerical method for solving the problem of low-velocity impact on orthotropic laminated plates by ball are developed. Capabilities and reliability of the proposed method are illustrated by test examples. The applicability of different two-dimensional theories for analysis of stress-strain state of laminated plates under impact are discussed.

Введение. Композиты достаточно часто эксплуатируются в условиях действия нестационарных нагрузок. Такие же нагрузки возникают при некоторых аварийных ситуациях, характеризующихся кратковременным воздействием интенсивных импульсных и ударных нагрузок. Особую опасность для композитов представляет поперечный удар твердым телом, который может привести к разрушению его матрицы и расслаиванию. Для оценки прочности композита и влияния различных факторов (структуры композита, геометрических размеров, характеристик нагружения) на напряженно-деформированное состояние (НДС) необходимо наличие высокоэффективных методов их расчета. Поэтому, разработка методов анализа НДС композитов при импульсном и ударном нагружениях является актуальной задачей.

В силу анизотропии свойств и слоистой структуры композита рассматриваемая динамическая задача является математически сложной и требует применения уточненных моделей. Этим объясняется ограниченное количество работ в этой области, большинство из которых посвящено исследованию частотных характеристик. Отдельные вопросы по моделированию отклика композитов на низкоскоростной удар твердым телом были рассмотрены в работах [1-4]. При этом в работах [1-3] для моделирования поведения композита использовались уточненные теории первого порядка (теории типа С.П. Тимошенко), не учитывающие обжатие и нелинейный характер распределения напряжений по толщине композита. В работе [2] решение получено аналитическим методом, а в работах [3-4] – с помощью метода конечного элемента.

В этой работе предлагается численно-аналитический подход к расчету

слоистых ортотропных пластин при импульсном и ударном нагружениях. Этот подход базируется на гипотезах обобщенной теории пластин [5, 6], в основе которой лежит метод степенных рядов. Обобщенная теория относится к классу дискретно-структурных и позволяет регулировать точность описания НДС в зависимости от исследуемого объекта.

Постановка задачи. Слоистая ортотропная пластина находится под действием поперечной импульсной нагрузки $\bar{q}_3 = \bar{q}_3(x_1, x_2, t)$ (рис. 1), приложенной к наружной поверхности первого слоя. Материал каждого слоя является ортотропным (главные направления ортотропии совпадают с направлениями осей). Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание.

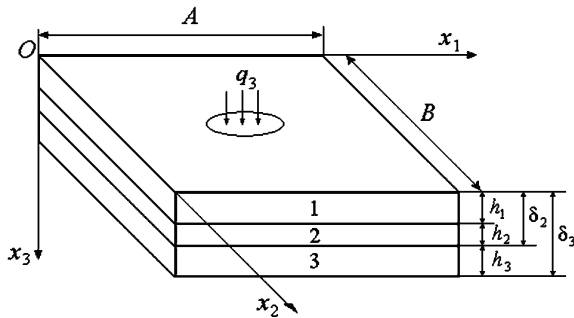


Рисунок 1– Слоистая ортотропная пластина

Поведение слоистой пластины описывается гипотезами обобщенной теории многослойных пластин [5, 6]:

$$u_{\alpha}^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_{\alpha} + \sum_{k=1}^{K_{\alpha}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i \right], \quad (1)$$

где $h_j^k = (h_j)^k$, $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$, $i = \overline{1, I}$; $u_{\alpha}^i (\alpha = \overline{1, 3})$ – перемещение

точки i -го слоя в направлении координатной оси Ox_{α} ; u_{α} , $u_{\alpha k}^i$ – коэффициенты разложений перемещений в степенные ряды, представляющие функции аргументов x_1, x_2, t ; h_i – толщина i -го слоя; I – количество слоев в пакете; K_{α} ($\alpha = \overline{1, 3}$) – количество удерживаемых членов в степенных рядах для перемещений. При этом в разложениях (1) для плоскостных перемещений удерживается одно и то же число членов степенного ряда, то есть параметры $K_1 = K_2 = K$. В дальнейшем, будем обозначать обобщенную теорию по количеству удерживаемых членов в рядах для перемещений – теория $\{K, K_3\}$.

Деформации в каждом слое пластины предполагаются малыми и описы-

ваются линейными соотношениями

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} \left(u_{\alpha,\beta}^i + u_{\beta,\alpha}^i \right), \quad \alpha, \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Связь между компонентами тензоров деформаций и напряжений для рассматриваемого случая имеет вид [7]

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \varepsilon_{33}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\nu_{21}^i}{E_2^i} & -\frac{\nu_{31}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{13}^i}{E_1^i} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_3^i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{11}^i \\ P_{22}^i \\ P_{33}^i \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \varepsilon_{12}^i &= \frac{1}{2G_{12}^i} P_{12}^i; \\ \varepsilon_{13}^i &= \frac{1}{2G_{13}^i} P_{13}^i; \\ \varepsilon_{23}^i &= \frac{1}{2G_{23}^i} P_{23}^i. \end{aligned}$$

где $E_\alpha^i, \nu_{\alpha\beta}^i$ – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для i -го слоя, $G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i$ – модули сдвига для i -го слоя.

Усилия и моменты в i -м слое определяются по формулам

$$N_{\alpha\beta}^{ik} = N_{\beta\alpha}^{ik} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (x_3 - \delta_{i-1})^k p_{\alpha\beta}^i dx_3, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Уравнения движения. Уравнения движения и граничные условия получены с помощью вариационного принципа Остроградского-Гамильтона и в усилиях и моментах имеют следующий вид:

$$\sum_{i=1}^I [L_\alpha^i - I_{\alpha 1}^i] + q_\alpha = 0;$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_\alpha} + N_{\alpha 2,2}^{ik_\alpha} - k_\alpha N_{\alpha 3}^{ik_\alpha-1} + h_i^{k_\alpha} \sum_{j=i}^{I-1} [L_\alpha^{j+1} - I_{\alpha 1}^{j+1}] - I_{\alpha k_\alpha+1}^i = 0, \quad (2)$$

где $L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}$; $L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}$; $L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0}$;

$$I_{\alpha r}^i = \frac{\rho_i h_i^r}{r} \left(u_{\alpha 0,rr} + \sum_{k=1}^{K_\alpha} \left[\sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k,rr}^j + \frac{r h_i^k}{k+r} u_{\alpha k,rr}^i \right] \right), \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}; \quad i = \overline{1, I}.$$

Таким образом, динамический отклик пластины описывается $(2K + K_3)I + 3$ дифференциальными уравнениями.

Уравнения движения (2) могут быть записаны в перемещениях

$$\Omega \cdot \bar{U}_{,rr} - \Lambda \cdot \bar{U} = \bar{Q}, \quad (3)$$

где \bar{U} – вектор, компонентами которого являются искомые функции

$$\bar{U}^T = (u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i), \quad \alpha = \overline{1, 3}; \quad i = \overline{1, I}; \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha},$$

Λ, Ω – симметричные квадратные матрицы порядка $(2K + K_3)I + 3$; \bar{Q} – вектор, компоненты которого зависят от внешней силы, приложенной к наруж-

ной поверхности многослойной пластины

$$\bar{\mathbf{Q}}^T = (q_\alpha, 0, \dots, 0).$$

Элементы матриц Λ , Ω не приводятся в силу их громоздкости.

Вид граничных условий на контуре опирания для прямоугольной свободно опертой пластины приведен ниже:

$$\text{при } x_1 = 0; \quad x_1 = A - \sum_{i=1}^I N_{11}^{i0} = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = 0;$$

$$N_{11}^{ik_1} + h_i^{k_1} \sum_{j=i}^{I-1} N_{11}^{j+1,0} = 0; \quad u_{2k_2}^i = 0; \quad u_{3k_3}^i = 0,$$

$$\text{при } x_2 = 0; \quad x_2 = B - u_1 = 0; \quad \sum_{i=1}^I N_{22}^{i0} = 0; \quad u_3 = 0;$$

$$u_{1k_1}^i = 0; \quad N_{22}^{ik_2} + h_i^{k_2} \sum_{j=i}^{I-1} N_{22}^{j+1,0} = 0; \quad u_{3k_3}^i = 0; \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}; \quad i = \overline{1, I}. \quad (4)$$

Уравнения движения (3) и граничные условия (4) дополняются начальными условиями. Начальные условия принимаются нулевыми:

$$u_\alpha = u_{\alpha k_\alpha}^i = 0; \quad u_{\alpha,t} = u_{\alpha k_\alpha,t}^i = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (5)$$

Таким образом, динамика свободно опертой слоистой пластины описывается системой уравнений движения (3), граничными (4) и начальными (5) условиями.

Метод решения. Метод решения нестационарной задачи основывается на разложении искомых функций u_α , $u_{\alpha k_\alpha}^i$ и нагрузки q_α в ряды по функциям $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$, удовлетворяющим условиям на контуре опирания

$$[u_\alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i, q_\alpha] = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_{\alpha mn}(t), \Phi_{\alpha k_\alpha mn}^i(t), q_{\alpha mn}(t)] B_{\alpha mn}(x_1, x_2). \quad (6)$$

Для прямоугольной многослойной пластины, свободно опертой по краям, функции $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$ имеют вид

$$B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x_1}{A} \sin \frac{n\pi x_2}{B}; \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x_1}{A} \cos \frac{n\pi x_2}{B}; \quad B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x_1}{A} \sin \frac{n\pi x_2}{B}.$$

В результате задача о нестационарных колебаниях многослойной пластины для каждой пары значений m и n сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Для интегрирования полученной системы используется оригинальный метод интегрирования, основанный на методе разложения решения в ряд Тейлора [5].

Задача об ударе шаром. Исследуется отклик слоистых свободно опертых пластин при поперечном ударном воздействии. Удар наносится шаром

радиуса R и массой M посередине наружной поверхности первого слоя пластины. В момент столкновения с пластиной шар имеет скорость V_0 .

Предполагается, что область взаимодействия индентора и пластины является кругом радиуса $r(t)$, а контактное давление распределено по площадке нагружения в соответствии с законом

$$q_3(x_1, x_2, t) = P_0(t) \left[1 - \frac{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2}{r^2} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

где x_{10} , x_{20} – координаты точки соприкосновения индентора и пластины в начальный момент времени.

Уравнение движения центра масс шара и начальные условия имеют вид

$$Mz_{\ddot{}} = Mg - P; \quad z(0) = 0; \quad \dot{z}_i(0) = V_0,$$

где $z = z(t)$ – координаты центра масс шара, P – контактная сила, g – ускорение свободного падения.

Контактная сила, с учетом (7), равна

$$P(t) = \iint_S q_3 dS = \frac{2}{3} P_0 \pi a^2,$$

где S – площадка контактного взаимодействия.

Условие совместности перемещений шара и пластины имеет вид

$$u_3^1(x_{10}, x_{20}, 0, t) + a(t) - z(t) \geq 0, \quad (8)$$

где $a(t)$ – контактное сближение.

Контактное сближение a определяется по закону Герца [1, 5, 8, 9]

$$a = kP^{2/3}.$$

Коэффициент k , зависящий от материала и формы взаимодействующих тел, и должен выбираться на основе эксперимента [1].

Радиус области контакта $r(t)$ вычисляется по формуле [5, 8]

$$r(t) = \left[\frac{3}{16} P(t) \cdot R \cdot (\theta + \theta_1) \right]^{1/3}; \quad \theta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}; \quad \theta = \frac{4(1 - \nu^2)}{E},$$

где E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала из которого изготовлен шар, E_1 , ν_1 – усредненные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона для первого слоя [1].

Решение задачи об ударе подробно изложено в работе [5]. Используя интегральное преобразование Лапласа, решение уравнения движения шара записывается в виде рекуррентной формы для малых отрезков времени. Значение контактной силы на каждом временном интервале определяется из равенства (8).

Численное исследование. Для проверки эффективности предлагаемой теории были проведены расчеты отклика трехслойных и десятислойных композитов на удар шаром.

Рассмотрен отклик трехслойного композита ($0^0/90^0/0^0$) на удар стальным шаром диаметром 12,7 мм и массой 8,4 гр. с начальной скоростью 2,54 м/с [1]. Удар наносится посередине верхнего слоя. Геометрические размеры композита $A = B = 0,254$ м, $\delta_l = 0,635$ см. Упругие характеристики композита: $E_{11} = 173,058$ ГПа, $E_{22} = 33,095$ ГПа, $E_3 = 5,171$ ГПа, $G_{12} = 9,377$ ГПа, $G_{13} = 8,274$ ГПа, $G_{23} = 3,241$ ГПа, $\nu_{12} = 0,036$, $\nu_{13} = 0,25$, $\nu_{23} = 0,171$, $\rho = 1568$ кг/м³. Коэффициент k в законе Герца выбирался таким же, как и в работе [1]: $k = 0,4736 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н}^{2/3}$.

В таблице приведены максимальные значения контактной силы, прогиба и напряжений, полученные по обобщенной теории, при различном числе удерживаемых членов в степенных рядах (1). При этом в разложениях (6) учитывалось по 100 гармоник в каждом направлении и исследовался интервал времени от 0 до 80 мс. Значения прогиба приведены в точке удара, а значения напряжений – под точкой удара посередине внешних поверхностей композита.

Отклик трехслойной пластины на удар

Теория	Сила P , Н	Прогиб $u_3^3 \cdot 10^4$, см	Напряжение p_{11}^1 / p_{11}^1 , МПа
Теория {1,0}	692	70,54	- 84,896 / 84,896
Теория {3,2}	579	74,17	-350,560 / 42,090
Теория {5,4}	576	74,18	-380,412 / 41,394
Теория {7,6}	576	74,18	-381,952 / 41,261

Из таблицы видно, что при увеличении параметров K , K_3 лучше всего сходятся значения силы и перемещений, а значения напряжений, особенно под точкой удара, сходятся хуже. Обобщенная теория {3,2} и теории более высокого порядка, учитывающие обжатие по толщине и нелинейный характер распределения перемещений по толщине, дают близкие значения как для силы и прогибов, так и для напряжений на тыльной стороне.

На рис. 2, 3 приведено изменение во времени контактной силы и перемещений при ударе. Результаты расчета по предложенному методу (пунктир – теория {7,6}, штрихпунктир – теория {1,0}) сопоставляются с данными, приведенными в работе [1] (сплошная линия) Из рисунка видно, что результаты расчета по обобщенной теории согласуются с данными, полученными A.Nosier, R.K.Kapania, J.N.Reddy по двумерной теории LWPT [1].

Изменение напряжений p_{11}^i по толщине композита дано на рис. 4. Распределение приведено для момента времени, когда напряжения достигают максимального значения под точкой удара. Здесь пунктирной линией показаны результаты расчета по теории {7,6}, штрихпунктиром – теории {1,0}, точ-

ками – теории {3,2}. Наблюдается существенное отличие результатов, полученных по приведенным теориям. Это объясняется тем, что в исследуемых задачах имеет место локализованное в пространстве нагружение, при котором характер распределения напряжений по толщине является нелинейным [5, 6].

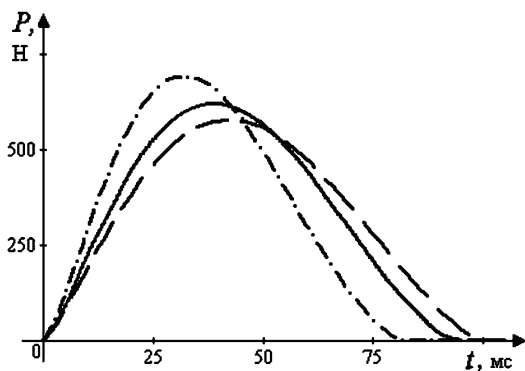


Рисунок 2 – Контактная сила

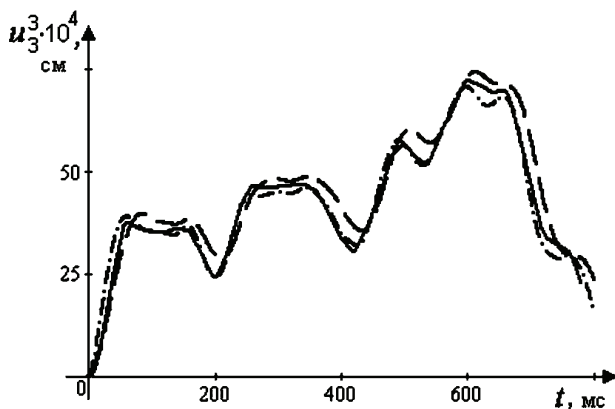


Рисунок 3 – Прогиб

Из рис. 2-4 и таблицы видно, что для анализа напряжений при ударе необходимо использовать теории высокого порядка, а теория {1,0} может быть использована при приближенном расчете силы и перемещений. Характер распределения напряжений по толщине имеет нелинейный характер даже для рассматриваемого случая относительно тонкого композита.

Рассмотрен отклик десятислойного композита симметричного строения $(0^0/90^0/0^0/90^0/0^0)_s$ на удар стальным шаром диаметром 12,7 мм и массой 8,5 гр. с начальной скоростью 3 м/с [1, 2, 4]. Геометрические размеры компо-

зита $A = B = 0,2$ м, $\delta_j = 2,69$ мм. Свойства материала $E_{11} = 120$ ГПа, $E_{22} = E_{33} = 7,9$ ГПа, $G_{12} = G_{23} = G_{13} = 5,5$ ГПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,3$, $\rho = 1580$ кг/м³. Коэффициент k в законе Герца выбирался таким же, как и в работе [1] для этой задачи: $k = 1,1238 \cdot 10^{-6}$ м/Н^{2/3}.

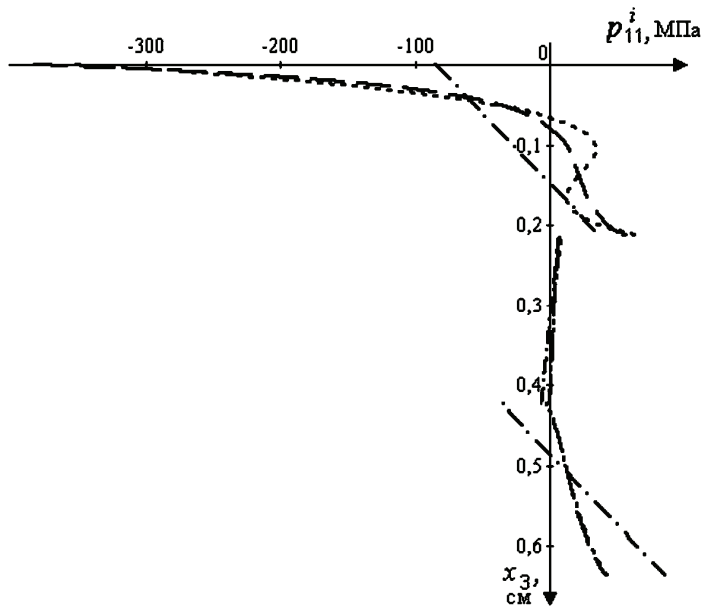


Рисунок 4 – Изменение напряжений p_{11}^i по толщине

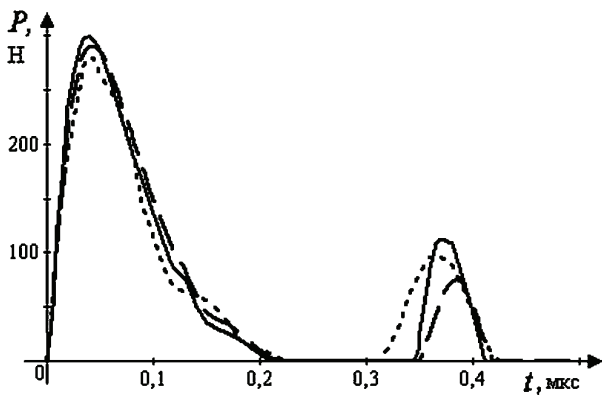


Рисунок 5 – Контактная сила

На рис. 5 показано изменение контактной силы во времени. Сплошной линией показано аналитическое решение двумерной задачи [2], точками – решение методом конечного элемента [2, 4], пунктиром – решение по обобщенной теории {7,6}. Из рисунка видно, что на исследуемом интервале наблюдается повторное соударение после отскока.

Изменение во времени прогибов под точкой удара приведено на рис. 6.

Из рис. 5, 6 видно, что результаты расчета по предлагаемой теории хорошо согласуются с известными решениями.

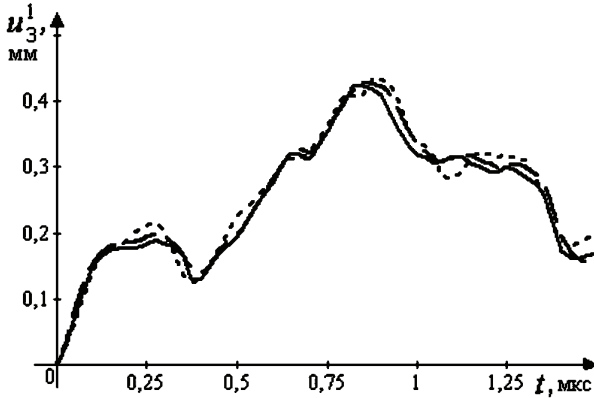


Рисунок 6 – Перемещения

Выводы. На основе обобщенной теории разработан аналитико-численный метод решения задачи о низкоскоростном ударе по ортотропным многослойным пластинам. Обобщенная теория базируется на кинематических гипотезах в виде разложений перемещений в степенные ряды по поперечной координате (1). Решение задачи об ударе основывается на гипотезах Герца.

На примерах показаны возможности предложенного подхода. Достоверность полученных результатов иллюстрируется сравнением их с данными расчетов по другим двумерным теориям (рис. 2, 3, 5, 6). Установлено, что силы и перемещения пластин при ударе, найденные по этим теориям, хорошо согласуются между собой.

Также, рассмотрены вопросы применимости различных двумерных аппроксимаций, построенных на основе обобщенной теории, для расчета отклика ортотропных пластин при низкоскоростном ударе. Показано, что, изменяя количество удерживаемых членов в разложениях (1), удастся получать аппроксимации разного порядка точности (таблица; рис. 4). Установлено, что характер распределения напряжений по толщине композита под точкой удара является существенно нелинейным (рис. 4). Поэтому, теории, основанные на гипотезах типа С.П.Тимошенко (теория {1,0}), могут применяться только

для расчета перемещений и величины силы. Для анализа напряжений необходимо применение теорий более высокого порядка точности, например, обобщенной теории {5,4} или {7,6}. В дальнейшем следует более точно оценить границы применимости обобщенной теории в зависимости от размеров области нагружения и характеристик слоистой пластины.

Список литературы: 1. *Nosier A.* Low-velocity impact of laminated composites using a layerwise theory / *A. Nosier, R.P. Kapania, J. N. Reddy* // *Computational Mechanics*. – 1994. – Vol. 13. – P. 360-379. 2. *Pierson M.O.* Analytical solution for low-velocity impact response of composite plates / *M.O. Pierson, R. Vaziri* // *AIAA Journal*. – 1996. – Vol. 34, № 8. – P. 1633-1640. 3. *Tiberkak R.* Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact / *R. Tiberkak, M. Bachene, S. Rechak, B. Necib* // *Composite structures*. – 2008. – Vol. 83. – P. 73-82. 4. *Sun C.T.* On the impact of initially stressed composite laminates / *C.T. Sun, J.K. Chen* // *Journal of composite materials*. – 1985. – Vol. 19. – P. 490-504. 5. *Шутиков А.Н.* Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / *А.Н. Шутиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угримов*. – Харьков: ХНЭУ, 2004. – 252 с. 6. *Ugrimov S.V.* Generalized theory of multilayer plates // *International Journal of Solids and Structures*. – 2002. – Vol. 39, № 4. – P. 819-839. 7. *Рассказов А.О.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / *А.О. Рассказов, И.И. Соколовская, Н.А. Шульга*. – К.: Вища школа, 1986. – 191 с. 8. *Динник А.Н.* Избранные труды: В 2-х т. – Киев: Изд-во АН УССР, 1952. – Т.1. – 350 с. 9. *Динамика удара* / *Дж. А. Зукас, Т. Николас, Х.В. Сеифт и др.* – М.: Мир, 1985. – 296 с.

Поступила в редколлегию 09.11.2010