

В.П.ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ;
С.В.ОЛЬШАНСКИЙ, асп., НТУ «ХПИ»

КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА СЕПАРИРУЕМОЙ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

Розглянуто гармонічні коливання швидкості потоку зернової суміші, яка рухається по внутрішній поверхні вертикального циліндричного решета вібросепаратора. Використовуючи теорію вібророзрідження зернового шару, аналітичний розв'язок граничної задачі гідродинаміки представлено за допомогою функцій Кельвіна. Побудовано також наближений розв'язок задачі для спрощеного розрахунку швидкості потоку сепарованої суміші та продуктивності решета в виробничих умовах.

Harmonically vibrations of velocity of a flow a grain mix are considered, driven on an internal surface of a vertical cylindrical sieve of vibroseparator. Using the theory vibroliquefaction of a grain layer, the analytical solution of a regional problem of hydrodynamics is submitted with the help of Kelvin functions. The approximate solution of a problem for the simplified account of velocity of a flow separating of a mix and productivity sieve under production conditions is constructed also.

Постановка проблеми. Для создания рациональных конструкций решет вибросепараторов нужно знать закономерности движения по ним сепарируемых зерновых смесей. Обычно при изучении движения сыпучих зерновых материалов определяют усредненную за период колебаний решета скорость потока смеси. Такой подход упрощает моделирование, но не дает информации о неравномерности потока смеси во времени. Поскольку вибрации интенсифицируют разделение смеси на фракции, желательно знать, как распространяются они от виброрешета по объему движущегося зернового слоя. Для изучения распространения вибраций внутри сыпучего материала приходится решать динамические краевые задачи гидродинамики, используя аналогию движений вязкой жидкости и сыпучей среды в условиях вибраций. Построение и анализ решений таких задач позволяет уточнить существующие математические модели движения сепарируемых смесей и поэтому относятся к актуальным научно-прикладным проблемам.

Анализ последних исследований и публикаций. Установившееся вертикальное движение кольцевого слоя зерновой смеси по внутренней поверхности вращающегося цилиндрического виброрешета без учета колебаний скорости потока рассматривалось в [1-4]. Математическое моделирование колебаний скорости потока слоя, вызванных осевыми вибрациями решета, проводилось в [5], где построено решение краевой задачи гидродинамики в функциях Бесселя и Неймана комплексного аргумента. Но при постановке граничной задачи в [5] пренебрегали искривлением поверхности решета. Здесь строится решение краевой задачи в цилиндрической системе координат.

нат с учетом искривления поверхности виброрешета.

Целью работы является получение и апробация формул для расчета скорости потока кольцевого слоя зерновой смеси с учетом ее колебаний, вызванных осевыми вибрациями решета.

Постановка и аналитическое решение динамической краевой задачи. Как и в работах [1-3], течение виброожиженного зернового слоя описываем уравнениями движения вязкой ньютоновской жидкости, которые при наличии осевой симметрии имеют вид [6, 7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right) + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right); \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} &= \nu \left(\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} \right); \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g + \nu \nabla^2 u_z; \\ \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{\partial}{\partial z} (r u_z) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; u_r, u_φ, u_z – соответственно радиальная, тангенциальная и осевая проекции скорости потока; r, z – радиальная и осевая координаты; ρ – плотность зерновой смеси; p – внутреннее избыточное давление; ν – эффективная кинематическая вязкость виброожиженной зерновой смеси; g – ускорение свободного падения; t – время.

Ось $0z$ направлена вертикально вниз по оси цилиндрического виброрешета, как показано на рис. 1.

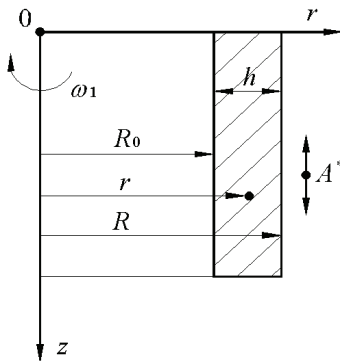


Рисунок 1 – Расчетная схема

Рассматривая установившийся динамический процесс, при решении системы (1), полуобратным методом с учетом [4], задаем:

$$u_r \equiv 0; \quad u_\varphi = \omega_1 r; \quad u_z = u_z(r, t); \quad p = \frac{1}{2} \rho \omega_1^2 (r^2 - R_0^2). \quad (2)$$

Здесь $\omega_1 = \text{const}$ – угловая скорость вращения решета; R_0 – радиус внутренней поверхности движущегося кольцевого слоя зерна.

Подстановка (2) в (1) обращает первое, второе и четвертое уравнения в тождества, а третье уравнение системы принимает вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{g}{v}. \quad (3)$$

Его следует решать при граничных условиях:

$$u_z(R, t) = A^* \omega \cos(\omega t); \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (4)$$

где $R_0 = R - h$; R – радиус цилиндрической поверхности решета; h – толщина зернового слоя; A^* , ω – амплитуда и круговая частота осевых вертикальных колебаний решета.

В общем случае кинематическая вязкость смеси зависит от параметров вибраций и частоты вращения решета, а также от механико-технологических характеристик зерновой смеси и радиальной координаты r [2, 8]. Здесь, с целью упрощения математической модели, используем усредненное значение $v = \text{const}$.

Отметим, что решение однородного (без правой части) уравнения (3), при отличных от (4) граничных условиях, решали в [6, 7], рассматривая течение вязкой жидкости в цилиндрической трубе при пульсирующем во времени перепаде давления.

Здесь решение уравнения (3) ищем в виде суммы

$$u_z(r, t) = u_1(r) + u_2(r, t), \quad (5)$$

при условии, что

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} = -\frac{g}{v}; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

При таком выборе $u_z(r, t)$ она удовлетворяет уравнению (3).

Согласно (4), слагаемые суммы (5) должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$u_1(R) = 0; \quad \left. \frac{du_1}{dr} \right|_{r=R_0} = 0; \quad (8)$$

$$u_2(R, t) = A^* \omega \cos(\omega t); \quad \left. \frac{\partial u_2(r, t)}{\partial r} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (9)$$

Решение краевой задачи, представленной выражениями (6) и (8), имеет вид

$$u_1(r) = \frac{g}{4\nu} \left(R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right). \quad (10)$$

Оно опубликовано в работах [1, 2, 3].

Решение уравнения (7) ищем в виде

$$u_2(r, t) = \operatorname{Re} \left(w(z) e^{i\omega t} \right) = \operatorname{Re} w(r) \cdot \cos(\omega t) - \operatorname{Im} w(r) \cdot \sin(\omega t), \quad (11)$$

где $i = \sqrt{-1}$; $w(r)$ – комплексная функция вещественного аргумента.

Она должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \frac{i\omega}{\nu} w = 0 \quad (12)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} w(R) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(R) = 0; \quad (13)$$

$$\left. \frac{d}{dr} \operatorname{Re} w(r) \right|_{r=R_0} = \left. \frac{d}{dr} \operatorname{Im} w(r) \right|_{r=R_0} = 0,$$

вытекающим из (9), (11).

Общим решением уравнения (12) является

$$w(r) = (c_1 + ic_2) \cdot I_0(\lambda r \sqrt{i}) + (c_3 + ic_4) \cdot K_0(\lambda r \sqrt{i}). \quad (14)$$

Здесь $\lambda = \sqrt{\omega/\nu}$; $I_0(x)$, $K_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда нулевого индекса; c_1, c_2, c_3, c_4 – вещественные произвольные постоянные.

Записанные в (14) цилиндрические функции комплексного аргумента выражаются через функции Кельвина нулевого индекса: $ber(x)$, $bei(x)$, $ker(x)$, $kei(x)$ по формулам [9]:

$$I_0(x\sqrt{i}) = ber(x) + i bei(x); \quad K_0(x\sqrt{i}) = ker(x) + i kei(x). \quad (15)$$

Поэтому, согласно (14) и (15):

$$\operatorname{Re} w(r) = c_1 ber(\lambda r) - c_2 bei(\lambda r) + c_3 ker(\lambda r) - c_4 kei(\lambda r); \quad (16)$$

$$\operatorname{Im} w(r) = c_1 bei(\lambda r) + c_2 ber(\lambda r) + c_3 kei(\lambda r) + c_4 ker(\lambda r).$$

Подставив (16) и их производные в (13), получаем систему четырех алгебраических уравнений с неизвестными c_j , $j = \overline{1,4}$:

$$\begin{aligned} c_1 ber(\eta) - c_2 bei(\eta) + c_3 ker(\eta) - c_4 kei(\eta) &= A^* \omega; \\ c_1 bei(\eta) + c_2 ber(\eta) + c_3 kei(\eta) + c_4 ker(\eta) &= 0; \\ c_1 ber'(\zeta) - c_2 bei'(\zeta) + c_3 ker'(\zeta) - c_4 kei'(\zeta) &= 0; \\ c_1 bei'(\zeta) + c_2 ber'(\zeta) + c_3 kei'(\zeta) + c_4 ker'(\zeta) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В ней $\eta = \lambda R$; $\zeta = \lambda R_0$; штрихом обозначены производные функций Кель-

вина по ζ .

Заметим, что функции Кельвина и их производные затабулированы в [10]. Кроме того, производные можно выразить через функции Кельвина индекса единица, таблицы которых опубликованы в [9].

Решив систему (17), находим

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{A^* \omega}{\Delta} [ber(\eta) + \delta_1 ker(\eta) + \delta_2 kei(\eta)]; \\
 c_2 &= -\frac{A^* \omega}{\Delta} [bei(\eta) + \delta_1 kei(\eta) - \delta_2 ker(\eta)]; \\
 c_3 &= \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = \delta_1 c_2 - \delta_2 c_1; \\
 \Delta &= [ber(\eta) + \delta_1 ker(\eta) + \delta_2 kei(\eta)]^2 + [bei(\eta) + \delta_1 kei(\eta) - \delta_2 ker(\eta)]^2; \\
 \delta_1 &= -\frac{ber'(\zeta) \cdot ker'(\zeta) + bei'(\zeta) \cdot kei'(\zeta)}{(ker'(\zeta))^2 + (kei'(\zeta))^2}; \\
 \delta_2 &= \frac{bei'(\zeta) \cdot ker'(\zeta) - ber'(\zeta) \cdot kei'(\zeta)}{(ker'(\zeta))^2 + (kei'(\zeta))^2}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Определив константы c_j , $j = \overline{1;4}$, после постановки (16) в (11), а затем (10) и (11) в (5), получаем формулу скорости потока зернового слоя

$$\begin{aligned}
 u_z(r, t) &= \frac{g}{4\nu} \left(R^2 - r^2 + 2R_0 \cdot \ln \frac{r}{R} \right) + [c_1 ber(\lambda r) - c_2 bei(\lambda r) + c_3 ker(\lambda r) - c_4 kei(\lambda r)] \times \\
 &\times \cos(\omega t) - [c_1 bei(\lambda r) + c_2 ber(\lambda r) + c_3 kei(\lambda r) + c_4 ker(\lambda r)] \cdot \sin(\omega t). \tag{19}
 \end{aligned}$$

Из нее видно, что колебания скорости потока происходят с той же частотой, что и колебания решета, но их амплитуды и фазы зависят от координаты r . Расчеты по формуле (19) позволяют выяснить как затухают амплитуды колебаний внутри движущегося слоя зерна с удалением от поверхности виброрешета.

Используя (19) можно определить изменение производительности решета во времени. Решение этой задачи сводится к вычислению интеграла

$$Q(t) = 2\pi \int_{R_0}^R r u_z(r, t) dr. \tag{20}$$

Учитывая известные интегралы [9]

$$\begin{aligned}
 \int_r \begin{bmatrix} ber(\lambda r) \\ bei(\lambda r) \end{bmatrix} dr &= -\frac{r}{\lambda \sqrt{2}} \begin{bmatrix} ber_1(\lambda r) - bei_1(\lambda r) \\ ber_1(\lambda r) + bei_1(\lambda r) \end{bmatrix}; \\
 \int_r \begin{bmatrix} ker(\lambda r) \\ kei(\lambda r) \end{bmatrix} dr &= -\frac{r}{\lambda \sqrt{2}} \begin{bmatrix} ker_1(\lambda r) - kei_1(\lambda r) \\ ker_1(\lambda r) + kei_1(\lambda r) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

после подставки (19) в (20), получаем формулу

$$Q(t) = \frac{\pi g}{2v} \cdot \left(\frac{R^4 + 3R_0^4}{4} - R^2 R_0^2 - R_0^4 \ln \frac{R_0}{R} \right) - \frac{\pi \sqrt{2}}{\lambda^2} \cdot \left[(c_1 F_1 - c_2 F_2 + c_3 F_3 - c_4 F_4) \times \right. \\ \left. \times \cos(\omega t) - (c_1 F_2 + c_2 F_1 + c_3 F_4 + c_4 F_3) \right] \sin(\omega t). \quad (21)$$

В ней

$$F_{1,2} = \eta \cdot [ber_1(\eta) \mp bei_1(\eta)] - \zeta \cdot [ber_1(\zeta) \mp bei_1(\zeta)]; \\ F_{3,4} = \eta \cdot [ker_1(\eta) \mp kei_1(\eta)] - \zeta \cdot [ker_1(\zeta) \mp kei_1(\zeta)].$$

Расчет колебаний производительности решета также связан с вычислением цилиндрических функций.

Построение приближенных формул. В производственных условиях работы сепараторов значения расчетных параметров таковы, что $\lambda r \geq \zeta \gg 1$. Поэтому без существенных погрешностей в формулах (18), (19) и (21) функции Кельвина и их производные можно заменить асимптотическими представлениями:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ber(x) \\ bei(x) \end{bmatrix} &\sim \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \left(1 + \frac{1}{8\sqrt{2x}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2x}}\right) \\ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} ker(x) \\ kei(x) \end{bmatrix} &\sim \frac{\sqrt{\pi} e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{8\sqrt{2x}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2x}}\right) \\ -\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} ber'(x) \\ bei'(x) \end{bmatrix} &\sim \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot \left(1 - \frac{3}{8\sqrt{2x}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \\ \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} ker'(x) \\ kei'(x) \end{bmatrix} &\sim \frac{\sqrt{\pi} e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2x}} \cdot \left(1 + \frac{3}{8\sqrt{2x}} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{7\pi}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \\ -\sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{7\pi}{8} + \frac{3}{8\sqrt{2x}}\right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В результате такой замены расчет колебаний скорости потока смеси и производительности решета сводится к вычислениям элементарных функций.

Более существенного упрощения расчетных зависимостей можно дос-

тичь, если пренебречь вторым членом в уравнении (12). Так поступали авторы работы [5], используя малое отношение толщины зернового слоя к радиусу решета. Для упрощенного указанным образом уравнения (12) краевая задача имеет компактное решение

$$w(r) = A^* \omega \frac{\text{ch}[i\lambda(r - R_0)]}{\text{ch}[i\lambda(R - R_0)]}.$$

Используя его, как ранее (14), получаем приближенную формулу скорости потоком зерновой смеси

$$u_z(r, t) = \frac{g}{4v} \cdot \left(R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right) + [B_1 f_1(r) + B_2 f_2(r)] \cdot \cos(\omega t) + [B_2 f_1(r) - B_1 f_2(r)] \cdot \sin(\omega t). \quad (22)$$

В ней

$$f_1(r) = \text{ch}(\beta(r - R_0)) \cdot \cos(\beta(r - R_0)); \quad f_2(r) = \text{sh}(\beta(r - R_0)) \cdot \sin(\beta(r - R_0));$$

$$B_1 = A^* \omega \cdot \text{cth}(\beta h) \frac{\cos(\beta h)}{\text{sh}(\beta h)}; \quad B_2 = A^* \omega \cdot \frac{\sin(\beta h)}{\text{sh}(\beta h)}; \quad \beta = \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{2v}}.$$

Проинтегрировав приближенно выражение (22) по толщине слоя определяем производительность решета

$$Q(t) = \frac{\pi g}{2v} \cdot \left(\frac{R^4 + 3R_0^4}{4} - R^2 R_0^2 - R_0^4 \ln \frac{R_0}{R} \right) + (B_1 \Phi_1 + B_2 \Phi_2) \times \times \cos(\omega t) - (B_1 \Phi_2 - B_2 \Phi_1) \sin(\omega t). \quad (23)$$

Здесь

$$\Phi_{1,2} = \frac{\pi(R + R_0)}{2\beta} [\text{ch}(\beta h) \cdot \sin(\beta h) \pm \text{sh}(\beta h) \cdot \cos(\beta h)].$$

Для больших значений βh , $\text{ch}(\beta h) \sim \text{sh}(\beta h)$ и формула (23) принимает более компактный вид

$$Q(t) = \frac{\pi g}{2v} \cdot \left(\frac{R^4 + 3R_0^4}{4} - R^2 R_0^2 - R_0^4 \ln \frac{R_0}{R} \right) + \pi \cdot (R + R_0) \cdot A^* \sqrt{v\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Из нее следует, что амплитуда колебаний производительности решета возрастает с увеличением R , A^* , v и ω , причем колебания смещены по фазе на $\pi/4$.

Анализ численных результатов. Для проведения расчетов, следуя [5], задавали: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $h = 0,01 \text{ м}$; $A^* = 0,0075 \text{ м}$; $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$; $\rho v = 0,66 \text{ Па} \cdot \text{с}$; $R = 0,3075 \text{ м}$. Вычисленные по формуле (19) скорости вертикального движения смеси представлены на рис. 2 и 3.

Из рис. 2 видно, что по мере удаления от поверхности решета в сторону свободной поверхности слоя происходит уменьшение амплитуд колебаний

скорости, но увеличиваются средние значения скорости, относительно которых происходят эти колебания.

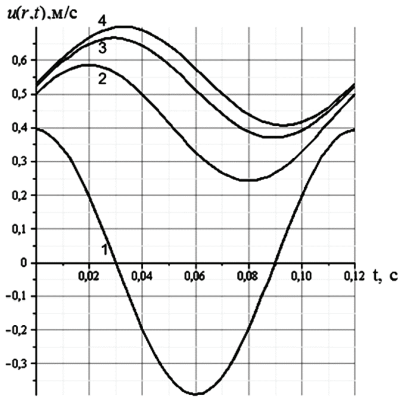


Рисунок 2 – Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы от времени для различных r : 1,2,3,4 –

$$r = R; R_0 + \frac{R - R_0}{2}; R_0 + \frac{R - R_0}{4}; R_0.$$

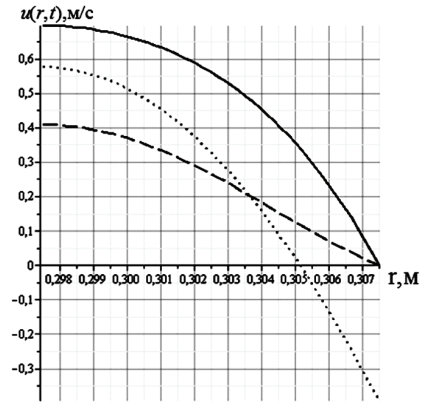


Рисунок 3 – Профили скорости потока зерновой смеси пшеницы по толщине слоя в различные моменты времени:

$$\text{—} t = \frac{\pi}{2\omega}; \dots t = \frac{\pi}{\omega}; \text{---} t = \frac{3\pi}{2\omega}.$$

На рис. 3 показаны распределения скоростей потока по толщине кольцевого слоя в различные моменты времени. Расчеты подтверждают, что профили скорости потока смеси существенно меняются с течением времени, вследствие колебаний решета.

Выводы. Изложенная теория отражает колебательный характер потока сепарируемой зерновой смеси внутри цилиндрического виброрешета, совершающего осевые гармонические колебания. Она может применяться при математическом моделировании процессов зерновых сепараторов.

Список литературы: 1. Тищенко Л.Н. Гидродинамические характеристики псевдооживленных сыпучих сред при виброцентробежном сепарировании на зерноперерабатывающих предприятиях // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних та харчових виробництв: Вісник ХДТУСГ. – Вип. 5. – Харків: ХДТУСГ, 2001. – С. 13-33. 2. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с. 3. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчету движения зерновой смеси по вертикальному цилиндрическому решету вибросепаратора // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – № 2 (54). – С. 50-55. 4. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. О решениях упрощенных уравнений Навье-Стокса в гидродинамической модели движения зерновой смеси // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 75. Т. 1. – С. 217-223. 5. Тищенко Л.Н., Мазоренко Д.И., Пивень М.В., Харченко С.А., Бредихин В.В., Мандрыка А.В. Моделирование процессов зерновых сепараторов. – Харьков: Миськдрук, 2010. – 360 с. 6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. – 847 с. 7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с. 8. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. Сравнение двух способов

вычисления коэффициента вибровязкости псевдооживленной зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании // Вібрації в техніці та технологіях. – 2008. – № 1 (50). – С. 96-100. **9.** *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с. **10.** *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

Поступила в редакцию 01.11.2010