УДК 629.783

В.Б. УСПЕНСКИЙ, канд. техн. наук, НТУ «ХПИ»;
М.В. НЕКРАСОВА, ст. преп., НТУ «ХПИ»

ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ И УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ИЗБЫТОЧНОЙ СИСТЕМЫ АКСЕЛЕРОМЕТРОВ

Пропонуються метод і алгоритми визначення компонент векторів кутової швидкості й прискорення центру мас рухомого об'єкту, заснованих на використанні тільки датчиків прискорення, розташованих в заданих точках рухомого об'єкту, без використання гіроскопів. Показано, що для цього достатньо використовувати дев'ять акселерометрів, орієнтованих певним чином в обраних точках.

The method and algorithms for determining angular velocity vector and acceleration of center of mass of a moving object, based on using only acceleration sensors located at specified points of a moving object without the use of gyroscopes is proposed. It is sufficient to use nine accelerometers oriented in some way in selected locations.

Предлагаются метод и алгоритмы определения компонент векторов угловой скорости и ускорения центра масс подвижного объекта, основанные на использовании только датчиков ускорения, расположенных в заданных точках подвижного объекта, без использования гироскопов. Показано, что для этого достаточно использовать девять акселерометров, ориентированных определенным образом в выбранных точках.

Введение. В настоящее время для измерения параметров движения используются, как правило, гироскопы и акселерометры. Различные схемы таких измерителей приведены в [1]. В связи с развитием МЭМС-технологии стоимость инерциальных измерителей и, в частности, акселерометров, становится малой. Это открывает возможность построения избыточных и сильно избыточных систем акселерометров (АК). До настоящего времени вопросы эффективного использования таких систем еще не изучены. В данной статье исследуется возможность использования сильно избыточных систем АК для измерения как ускорения, так и вектора угловой скорости. Такой подход позволит создавать полные инерциальные модули, построенные на основе АК, сравнительно невысокой стоимости.

Постановка задачи. В данной статье рассматривается задача компоновки в твердом теле избыточной (более 3) системы акселерометров и определения угловой скорости и ускорения по их измерениям.

Математическая модель измерений. Рассмотрим акселерометр, расположенный в некоторой фиксированной точке подвижного объекта. Построим математическую модель его измерений.

Пусть $\xi\eta\zeta$ – некоторая инерциальная система координат (ИСК), xyz – система координат, связанная с инерциальным базисом (ИБ, ССК), с центром в произвольно заданной точке О, далее называемой базовой, и задаваемой радиус-вектором $\bar{r}$. ССК вращается в инерциальном пространстве с абсолютной угловой скоростью $\overline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ в проекциях на оси ССК.

Расположение акселерометра в ССК (точка А) задается радиус-вектором $\overline{\rho}$. Направление оси чувствительности определяется в ССК единичным вектором $\bar{e}$ (рис. 1).

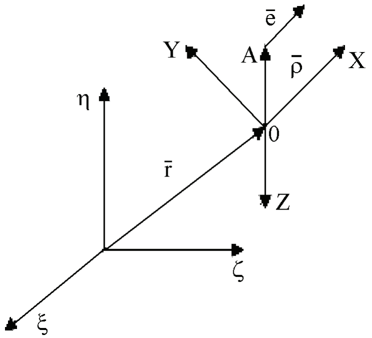

Рисунок 1 – Единичный вектор $\bar{e}$

Будем считать, что акселерометр измеряет не кажущееся, а абсолютное ускорение точки своей дислокации, то есть

$$\overline{w}_A = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + \frac{d^2\overline{\rho}}{dt^2} = \overline{w}_O + \frac{d^2\overline{\rho}}{dt^2}, \tag{1}$$

где $\overline{w}_O$ – абсолютное ускорение точки О (ускорение переносного движения ССК), $\frac{d^2\overline{\rho}}{dt^2}$ – ускорение точки А относительно ССК. Дифференцирование осуществляется в ИСК. Переходя во втором слагаемом от полной производной к локальной, то есть к производной, относительно вращающейся ССК, в общем случае имеем [2]:

$$\frac{d^2\overline{\rho}}{dt^2} = \frac{\tilde{d}\bar{v}}{dt} + 2\cdot[\overline{\omega}\times\bar{v}] + \left[\frac{\tilde{d}\overline{\omega}}{dt}\times\overline{\rho}\right] + [\overline{\omega}\times[\overline{\omega}\times\overline{\rho}]], \tag{2}$$

где $\frac{\tilde{d}}{dt}$ – знак локального дифференцирования, $\bar{v}$ – относительная скорость точки А в ССК.

Выражение (2) упрощается, если точка А неподвижна в ССК, так как в этом случае

$$\bar{v} = 0; \qquad \frac{\tilde{d}\bar{v}}{dt} = 0. \tag{3}$$

Таким образом, из (1) с учетом (2) и (3) можно получить векторное равенство

$$\overline{w}_A = \overline{w}_O + \left[\frac{\tilde{d}\overline{\omega}}{dt} \times \overline{\rho} \right] + \overline{\omega} \cdot (\overline{\omega}, \overline{\rho}) - \overline{\rho} \cdot \omega^2 , \qquad (4)$$

связывающие абсолютные ускорения точек А и О. При этом акселерометр, расположенный в точке А, измеряет проекцию $\overline{w}_A$ на свою ось чувствительности, то есть величину $A = (\overline{w}_A, \overline{e})$.

Далее, пусть имеется *n* акселерометров с осями чувствительности $\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., \overline{e}_n$, расположение которых в ССК задается соответственно векторами $\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2, ..., \overline{\rho}_n$. Здесь и в дальнейшем все векторные величины определяются в проекциях на оси ССК. В этом случае показания акселерометров соответствуют следующим выражениям:

$$A_i = (\overline{w}_O, \overline{e}_i) + \left(\left[\frac{\tilde{d}\overline{\omega}}{dt} \times \overline{\rho}_i \right], \overline{e}_i \right) + (\overline{\omega}, \overline{e}_i) \cdot (\overline{\omega}, \overline{\rho}_i) - (\overline{\rho}_i, \overline{e}_i) \cdot \omega^2 , \quad i = \overline{1, n} . \qquad (5)$$

Если вектор $\boldsymbol{\overline{e}_i}$ коллинеарен вектору $\overline{\rho}_i$, то (5) существенно упрощается, так как $\left(\left[\frac{\tilde{d}\overline{\omega}}{dt} \times \overline{\rho}_i \right], \overline{e}_i \right) = 0$, и выражение (5) примет вид:

$$A_i = (\overline{w}_O, \overline{e}_i) + (\overline{\omega}, \overline{e}_i) \cdot (\overline{\omega}, \overline{\rho}_i) - (\overline{\rho}_i, \overline{e}_i) \cdot \omega^2 . \qquad (6)$$

Таким образом, в общем случае измерения акселерометров содержат информацию как об ускорении базовой точки, так и об угловой скорости и угловом ускорении ССК. При выборе базовой точки О на продолжении осей чувствительности (ОЧ) АК, что возможно при пересечении ОЧ всех АК в одной точке, их измерения становятся инвариантными к угловому ускорению.

В этих условиях сформулируем задачу: разработать структуру измерительного акселерометрического модуля и алгоритм определения ускорения и угловой скорости ССК на основании измерений модуля.

Для решения поставленной задачи в общем случае необходимо решить систему уравнений (5), составленную для i акселерометров, где $i = \overline{1, n} \geq 9$, относительно $\overline{w}_O = (w_{Ox}, w_{Oy}, w_{Oz})$; $\overline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$; $\dot{\overline{\omega}} = (\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z)$.

Учитывая нелинейный характер уравнений (5), не удалось подобрать достаточно эффективный в общем случае численный метод решения такой системы. Кроме того, способ определения искомых характеристик движения должен составлять основу алгоритма, функционирующего в реальном масштабе времени, что накладывает существенные ограничения на его вычислительную сложность. В этих условиях реализован следующий подход: путем задания рациональной конфигурации АК максимально упростить систему уравнений и, соответственно, алгоритм ее решения.

Воспользуемся описанным ранее свойством инвариантности к угловому ускорению некоторых структур АК. Пусть для шести АК $\vec{e}_1 = (1{,}0{,}0)$; $\vec{e}_2 = (0{,}1{,}0)$; $\vec{e}_3 = (0{,}0{,}1)$; $\vec{e}_4 = (-1{,}0{,}0)$; $\vec{e}_5 = (0{,}-1{,}0)$; $\vec{e}_6 = (0{,}0{,}-1)$ и $\overline{\rho}_i = \mu_i \cdot \overline{e}_i$, где μ_i – удаленность i-го акселерометра от точки O (рис. 2).

В этом случае система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{cases} w_{0x} - \mu_1\omega_y^2 - \mu_1\omega_z^2 = A_1; \\ w_{0y} - \mu_2\omega_x^2 - \mu_2\omega_z^2 = A_2; \\ w_{0z} - \mu_3\omega_x^2 - \mu_3\omega_y^2 = A_3; \\ w_{0x} - \mu_4\omega_y^2 - \mu_4\omega_z^2 = -A_4; \\ w_{0y} - \mu_5\omega_z^2 - \mu_5\omega_x^2 = -A_5; \\ w_{0z} - \mu_6\omega_x^2 - \mu_6\omega_y^2 = -A_6. \end{cases}$$

Решая эту систему аналитически, получим

$$\begin{cases} w_{0x} = \dfrac{\mu_4 \cdot A_1 - \mu_1 \cdot A_4}{\mu_1 + \mu_4} \\ w_{0y} = \dfrac{\mu_5 \cdot A_2 - \mu_2 \cdot A_5}{\mu_2 + \mu_5} \\ w_{0z} = \dfrac{\mu_6 \cdot A_3 - \mu_3 \cdot A_6}{\mu_3 + \mu_6} \\ \omega_x^2 = \dfrac{A_1 + A_4}{2\cdot(\mu_1 + \mu_4)} - \dfrac{A_2 + A_5}{2\cdot(\mu_2 + \mu_5)} - \dfrac{A_3 + A_6}{2\cdot(\mu_3 + \mu_6)} \\ \omega_y^2 = \dfrac{A_2 + A_5}{2\cdot(\mu\mu} - \dfrac{A_1 + A_4}{2\cdot(\mu_1 + \mu_4)} - \dfrac{A_3 + A_6}{2\cdot(\mu_3 + \mu_6)} \\ \omega_z^2 = \dfrac{A_3 + A_6}{2\cdot(\mu_3 + \mu_6)} - \dfrac{A_2 + A_5}{2\cdot(\mu_2 + \mu_5)} - \dfrac{A_1 + A_4}{2\cdot(\mu_1 + \mu_4)} \end{cases} \qquad (7)$$

Из полученного решения следует, что компоненты вектора угловой скорости $\overline{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ могут быть определены по измерениям АК, организованным в данную структуру, с точностью до знака. Для разрешения знаковой неопределенности предлагается использовать прогнозирующую модель вектора угловой скорости вида

$$\overline{\Omega}_{k+1} = \overline{\omega}_k + 0{,}5 \cdot (\dot{\overline{\omega}}_k + \dot{\overline{\omega}}_{k+1}^{\pm}) \cdot \Delta t, \qquad (8)$$

в которой k – номер предыдущего такта обновления информации продолжительности Δt; $\overline{\omega}_k$, $\dot{\overline{\omega}}_k$ – значения угловой скорости и углового ускорения, определенные для предыдущего момента времени, $\dot{\overline{\omega}}_{k+1}^{\pm}$ – оценка углового ускорения, полученная для текущего момента времени.

Для получения оценки $\dot{\overline{\omega}}_{k+1}^{\pm}$ используются измерения от трех дополнительных АК, расположение которых задается параметрами $\vec{e}_7 = (0,1,0)$, $\vec{e}_8 = (0,0,1)$, $\vec{e}_9 = (1,0,0)$; $\vec{\rho}_7 = (\mu_7,0,0)$, $\vec{\rho}_8 = (0,\mu_8,0)$, $\vec{\rho}_9 = (0,0,\mu_9)$ (рис. 3):

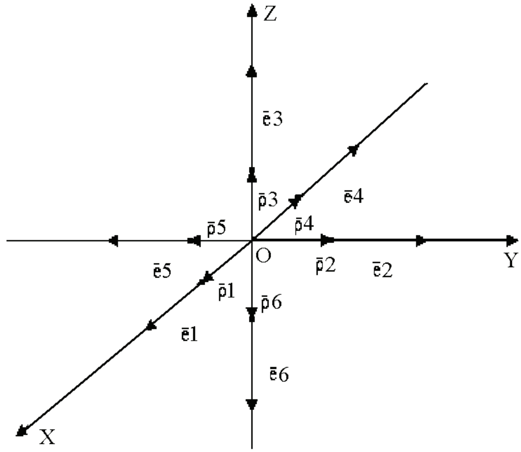

Рисунок 2 – Параметры $\vec{e}_1 - \vec{e}_6$

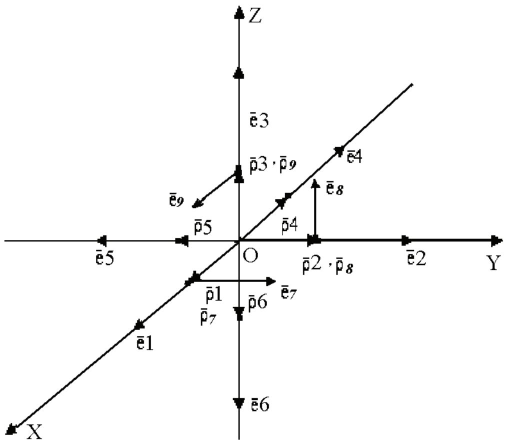

Рисунок 3 – Параметры $\vec{e}_7 - \vec{e}_9; \overline{\rho}_7 - \overline{\rho}_9$

При этом

$$\dot{\omega}_x^{\pm} = \frac{1}{\mu_8} \cdot (A_8 - w_{oz} - \mu_8 \cdot \omega_y^{\pm} \cdot \omega_z^{\pm});$$

$$\dot{\omega}_y^{\pm} = \frac{1}{\mu_9} \cdot (A_9 - w_{ox} - \mu_9 \cdot \omega_x^{\pm} \cdot \omega_z^{\pm});$$

$$\dot{\omega}_z^{\pm} = \frac{1}{\mu_7} \cdot (A_7 - w_{oy} - \mu_7 \cdot \omega_x^{\pm} \cdot \omega_y^{\pm}) .$$

Запись $\omega^{\pm}_{x,y,z}$ означает, что значения проекций угловой скорости вычисляются из (7) либо со знаком «плюс», либо со знаком «минус». При этом вектор $\dot{\overline{\omega}}^{\pm}_{k+1}$ формируется из указанных компонент во всевозможных сочетаниях знаков. Таким образом, учитывая возможную двузначность $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, имеем восемь наборов значений вектора $\dot{\overline{\omega}}^{\pm}_{k+1}$ и восемь значений спрогнозированной угловой скорости $\overline{\Omega}_{k+1}$. Сравнивая прогнозируемое значение скорости $\overline{\Omega}_{k+1}$ с измеренным вектором, составленным из соответствующих компонент $\omega^{\pm}_x, \omega^{\pm}_y, \omega^{\pm}_z$ по критерию минимальной длины вектора разности, принимается решение о действительном значении векторов углового ускорения и угловой скорости, используемых в (8) в последующий момент времени вместо $\dot{\overline{\omega}}_k, \overline{\omega}_k$. Начальное значение ускорения и угловой скорости считаются известными.

Результаты, полученные на основе изложенного алгоритма, приведены на рис. 4–7 и соответствуют следующим условиям: продолжительность моделирования – 100 с, такт обновления информации – 0,01 с. Истинная угловая скорость генерируется на основании решения динамических уравнений Эйлера при значении момента внешних сил $\overline{M}$ = (0,005, 0,005, 0,002) Н · м и главных центральных моментах инерции $I_1 = 0{,}48$ кг·м^2; $I_2 = 1{,}2$ кг·м^2; $I_3 = 1{,}32$ кг·м^2 (рис. 4), а проекции истинного ускорения меняются, как на рис. 5.

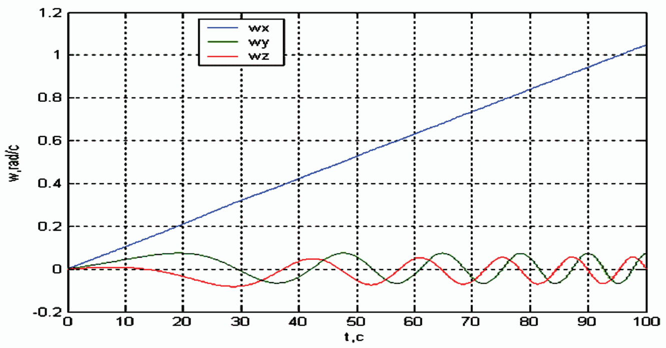

Рисунок 4 – Истинные значения проекций угловой скорости

Малая величина ошибок (рис. 6, 7) свидетельствуют о принципиальной возможности определения вектора абсолютного ускорения базовой точки и вектора угловой скорости ССК по измерениям 9 акселерометров, расположенных указанных выше образом. Алгоритм такого определения не содержит итераций и вполне реализуем в реальном масштабе времени.

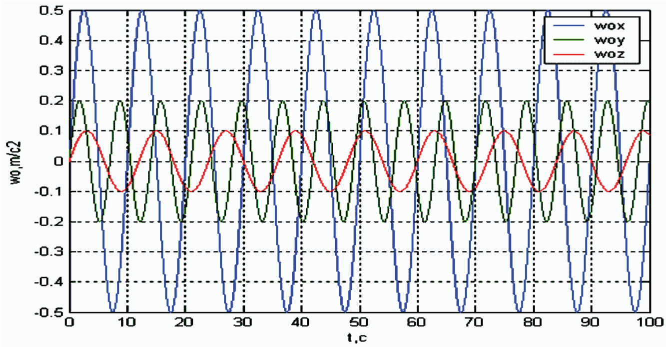

Рисунок 5 – Истинные значения проекций ускорения

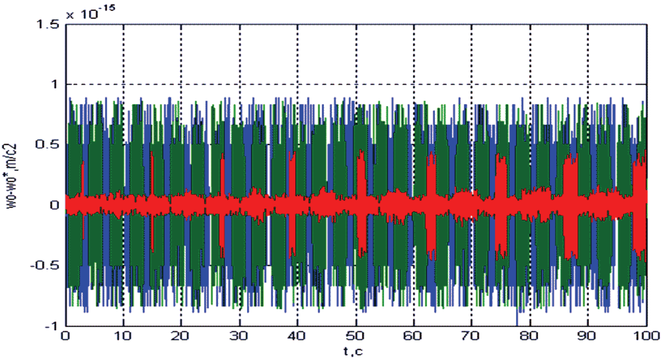

Рисунок 6 – Разность между истинным ускорением и ускорением, полученными на основе измерений

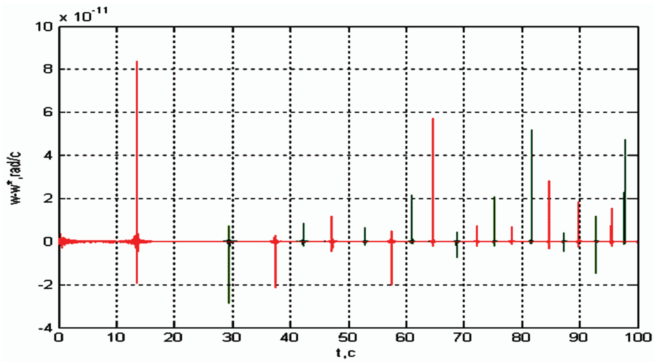

Рисунок 7 – Разность между истинной и полученной по измерениям угловой скоростью

Заключение. Разработана схема компоновки 9 акселерометров в твердом теле, по измерениям которых синтезирован алгоритм определения вектора ускорения и вектора угловой скорости твердого тела. В дальнейшем планируется исследовать область применимости разработанного метода определения характеристик движения по измерениям АК, построить модель ошибок и получить точностные характеристики измерительного акселерометрического модуля с учетом типичных ошибок АК и их сборки.

Список литературы: 1. *Анучин О.Н.* Интегрированные системы ориентации для морских подвижных обьектов / *О.Н Анучин, Г.И. Емельянцев.* – СПб., 1999. – 357 с. **2.** *Бромберг П.В.* Теория инерциальных систем навигации / *П.В Бромберг.* – М.: Наука, 1979. – 294 с.

Поступила в редколлегию 20.10.2011.