

Г.Н. ТИМЧЕНКО, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
И.О.МОРАЧКОВСКАЯ, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;
Н.А.БУДНИКОВ, аспирант, НТУ «ХПИ», Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Розглядається задача про вільні геометрично нелінійні коливання композитних багатошарових пластин складної форми при різних способах закріплення. Математичну постановку виконано в рамках уточненої теорії типу моделі Тимошенка. Наведено числові результати для багатошарових пластин складної геометрії і різних видів граничних умов. Виконано порівняння з відомими результатами та встановлено добре їх узгодження, що свідчить про вірогідність запропонованого методу.

The problem of geometrically nonlinear free vibrations of multilayer composite plates of complex shape at different ways of fixing is considered. Mathematical statement made in the refined theory of Timoshenko-type model. Numerical results for multilayer plates of complex geometry and different types of boundary conditions are presented. A comparison with known results was made and their good agreement was ascertained, indicating the probability of the proposed method.

Рассматривается задача о свободных геометрически нелинейных колебаниях композитных многослойных пластин сложной формы при различных способах закрепления. Математическая постановка выполнена в рамках уточненной теории типа модели Тимошенко. Приведены числовые результаты для многослойных пластин сложной геометрии и различных видов предельных условий. Выполнено сравнение с известными результатами и установлено хорошо их согласование, которое свидетельствует о достоверности предложенного метода.

Постановки и методы решения задач колебаний изотропных и анизотропных пластин простой геометрической формы в плане даны в [1,2]. Однако обзор литературы показывает, что геометрически нелинейные колебания многослойных пластин, имеющих сложную форму границ, практически изучены недостаточно полно. Исследование влияния способа укладки слоев и врезов краевых границ многослойных пластин актуальны как для развития теории колебаний пластин из композитных материалов, так и для решения прикладных проблем проектирования новой техники. Настоящая работа посвящена исследованию свободных геометрически нелинейных колебаний композитных многослойных пластин, слои которых изготовлены из одного композитного материала, но уложены с разной ориентацией осей анизотропии. Для рассмотренной задачи приводятся дифференциальные уравнения с краевыми условиями для пластин с простыми границами и с врезами. Предложено их решение на основе вариационных методов и теории R-функций. Численные результаты позволили установить влияние как способа укладки слоев, так и глубины врезов многослойных пластин.

Постановка задачи. Рассматриваются пластины постоянной толщины h , в предположении, что проскальзывание между слоями отсутствует. Ограничимся рассмотрением пластин симметричного строения, пренебрегая при этом силами инерции в срединной плоскости. Математическая постановка задачи выполнена в рамках уточненной теории первого порядка, основанной на гипотезе прямой линии принятой для всего пакета в целом [1,2]. Система уравнений движения пластины в рамках рассматриваемой теории имеет вид

$$L_{11}(C_{ij})u + L_{12}(C_{ij})v + Nl_1(C_{ij})w = m_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$L_{21}(C_{ij})u + L_{22}(C_{ij})v + Nl_2(C_{ij})w = m_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$L_{33}(C_{ij})w + L_{34}(C_{ij})\psi_x + L_{35}(C_{ij})\psi_y + Nl_3 = m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$L_{43}(C_{ij})w + L_{44}(C_{ij}, D_{ij})\psi_x + L_{45}(D_{ij})\psi_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}; \quad (4)$$

$$L_{53}(C_{ij})w + L_{54}(D_{ij})\psi_x + L_{55}(C_{ij}, D_{ij})\psi_y = m_2 \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Линейные операторы L_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ представленные в уравнениях (1)–(5) описаны в [4]. Нелинейные операторы Nl_1 , Nl_2 , Nl_3 определены следующим образом:

$$Nl_1(C_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{16} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{16} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{26} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}; \quad (6)$$

$$Nl_2(C_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{16} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{26} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \left(C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{26} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}; \quad (7)$$

$$Nl_3(C_{ij}) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left\{ C_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left\{ C_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + \right.$$

$$+ C_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Bigg\}, \quad (8)$$

где C_{ij} , D_{ij} приведенные жесткостные характеристики [2], которые определяются через упругие постоянные B_{jk}^i для каждого i -го слоя.

Система дифференциальных уравнений (1) – (5) дополняется соответствующими граничными условиями. Приведем некоторые граничные условия, которые использовались при решении задач:

– жестко закрепленный край

$$u = 0; \quad v = 0; \quad \psi_x = 0; \quad \psi_y = 0; \quad w = 0, \quad (9)$$

– шарнирное опирание (неподвижный шарнир)

$$u = 0; \quad v = 0; \quad \psi_x = 0; \quad \psi_y = 0; \quad w = 0; \quad M_n = 0, \quad (10)$$

где n – нормаль к границе области, M_n – изгибающий момент.

Начальные условия принимаются следующими:

$$w = w_{\max}; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Метод решения. Поиск решений рассматриваемых задач реализован в три этапа. На первом – методом Ритца решается линейная задача о колебаниях многослойной пластины с заданной формой границы. Собственные формы и частоты для произвольной области и разных видов граничных условий отыскивается в аналитическом виде с привлечением теории R-функций. В работе [4] подробно описан алгоритм решения таких задач. Собственные векторы, найденные на первом этапе, выбираются в качестве основных базисных функций для представления неизвестных компонент вектора перемещений.

На втором этапе решается геометрически нелинейная задача о колебаниях многослойной пластины с заданной формой границы. Неизвестные функции w , ψ_x , ψ_y , u , v представляются в следующем виде

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= y_1(t) \cdot w_1(x, y); \\ \psi_x(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{x1}(x, y); \\ \psi_y(x, y, t) &= y_1(t) \cdot \psi_{y1}(x, y); \\ u(x, y, t) &= y_1^2(t) \cdot u_2(x, y); \\ v(x, y, t) &= y_1^2(t) \cdot v_2(x, y), \end{aligned} \quad (12)$$

где $w_1(x, y)$, $\psi_{x1}(x, y)$, $\psi_{y1}(x, y)$ компоненты собственного вектора, а u_2 и v_2 являются решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_{11}(C_{ij})u_2 + L_{12}(C_{ij})v_2 &= -Nl_1(C_{ij})w_1; \\ L_{21}(C_{ij})u_2 + L_{22}(C_{ij})v_2 &= -Nl_2(C_{ij})w_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Поиск решения системы уравнений (13), с учетом начальных условий (9), сведен к минимизации функционала

$$\begin{aligned}
I(\bar{U}_2) = \int_{\Omega} \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 + 2C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial y} + C_{66} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(C_{16} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \right. \right. \\
\left. \left. + C_{26} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + 2(NL_1(C_{ij})w_1)u_2 + (NL_2(C_{ij})w_1)v_2 \right\} d\Omega - \\
- 2 \int_{\alpha\Omega} (F_1^0 u_{2n} + F_2^0 v_{2n}) ds, \tag{14}
\end{aligned}$$

где $U_{2n} = u_2 l + v_2 m, V_{2n} = -u_2 m + v_2 l$.

Подставляя выражения для неизвестных функций в дифференциальное уравнение (3) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина, приходим к решению обыкновенного дифференциального уравнения:

$$y_1''(t) + \omega_L^2 y_1(t) + \beta \cdot y_1^3(t) = 0, \tag{15}$$

где коэффициент β имеет вид:

$$\begin{aligned}
\beta = - \frac{\int (NL_{32}(C_{ij}, u_2, v_2, w_1)) \cdot w_1 d\Omega}{\rho h \|w_1\|^2}; \\
NL_{32}(C_{ij}) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \frac{\partial u_2}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(C_{11} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + C_{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\
+ C_{16} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \left. \right\} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \left\{ C_{66} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) + \right. \\
+ C_{16} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) \left. \right\} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \left\{ C_{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\
\left. + C_{22} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

На третьем этапе решается уравнение (15) с начальными условиями (11). С этой целью искомое решение представим в виде $y(t) = A \cos \omega_N t$, где ω_N – частота нелинейных колебаний; A – амплитуда колебаний. Затем, применяя метод Бубнова-Галеркина к уравнению (15), получаем зависимость между отношением частоты нелинейных колебаний к частоте линейных колебаний и амплитудой в виде

$$\frac{\omega_N}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \beta \cdot A^2}. \tag{16}$$

Численные результаты. Задача 1. Рассмотрим квадратную пятислой-

ную пластину с геометрическими свойствами $a/b = 1$, $a/h = 100$ и жесткостными характеристиками: $E_1 = 40E_2$; $G_{12} = G_{13} = 0,6E_2$; $G_{23} = 0,5E_2$; $\nu_1 = 0,25$.

В табл. 1 приведены результаты сравнения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для двух случаев укладки слоев пластины и различных способов закрепления (неподвижный шарнир и жесткая заделка), с результатами работы [5].

Таблица 1

| (0/90/0/90/0) | | | | | |
|--------------------|--------|---------|-----------------|--------|---------|
| Неподвижный шарнир | | | Жесткая заделка | | |
| w_{\max} / h | RFM | [5] | w_{\max} / h | RFM | [5] |
| 0,2 | 1,0315 | 1,03147 | 0,2 | 1,0079 | 1,00847 |
| 0,4 | 1,1207 | 1,12099 | 0,4 | 1,0313 | 1,03347 |
| 0,6 | 1,2553 | 1,25723 | 0,6 | 1,0692 | 1,07390 |
| 0,8 | 1,4226 | 1,42805 | 0,8 | 1,1201 | 1,12820 |
| 1,0 | 1,6124 | 1,62368 | 1,0 | 1,1823 | 1,19461 |
| 1,2 | 1,8176 | 1,83697 | 1,2 | 1,2541 | 1,27141 |
| (45/-45/45/-45/45) | | | | | |
| Неподвижный шарнир | | | Жесткая заделка | | |
| w_{\max} / h | RFM | [5] | w_{\max} / h | RFM | [5] |
| 0,2 | 1,0146 | 1,01473 | 0,2 | 1,0069 | 1,00717 |
| 0,4 | 1,0571 | 1,05776 | 0,4 | 1,0274 | 1,02834 |
| 0,6 | 1,1244 | 1,12601 | 0,6 | 1,0607 | 1,06258 |
| 0,8 | 1,2123 | 1,21542 | 0,8 | 1,1056 | 1,10855 |
| 1,0 | 1,3168 | 1,32185 | 1,0 | 1,1608 | 1,16474 |
| 1,2 | 1,4342 | 1,44162 | 1,2 | 1,2248 | 1,22969 |

Из таблицы видно, что полученные и расчетные данные из [5] отличаются менее чем на 1 %, что свидетельствует о достоверности предложенного метода. Результаты, представленные в таблице, соответствуют аппроксимации неопределенных компонент степенными полиномами. Данные таблицы 1 получены для полиномов седьмой степени. Количество координатных функций определялось по данным о сходимости численных результатов.

Задача 2. Рассмотрим пятислойную пластину с геометрическими свойствами $a/b = 1$; $a/h = 100$ и жесткостными характеристиками: $E_1 = 40E_2$; $G_{12} = G_{13} = 0,6E_2$; $G_{23} = 0,5E_2$; $\nu_1 = 0,25$, изображенную на рис. 1.

В табл. 2 приведены значения трех первых частот, полученные при решении задачи о линейных колебаниях пластин, для случая шарнирного опирания при укладке слоев (0/90/0/90/0) и размерами врезов $c = e = 0,2a$.

Формы колебаний, соответствующие частотам из табл. 2, изображены на рис. 2.

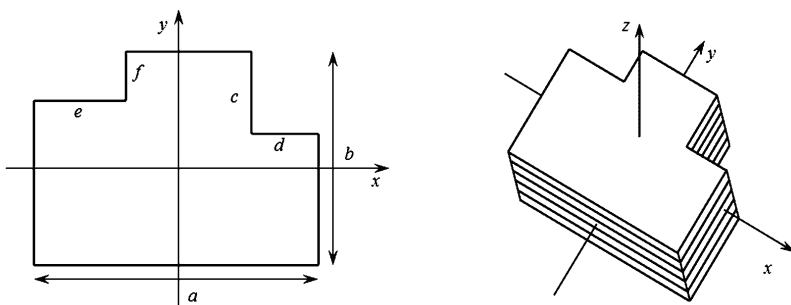


Рисунок 1

Таблица 2

| Ω_1 | Ω_2 | Ω_3 | Ω_4 |
|------------|------------|------------|------------|
| 78,45 | 170,07 | 232,68 | 310,22 |

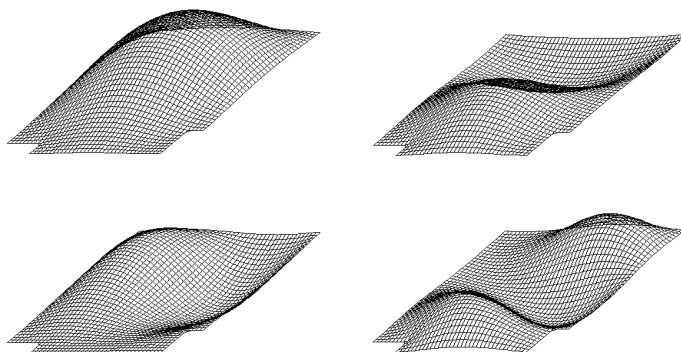


Рисунок 2

В табл. 3 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) для двух случаев укладки слоев пластины и различных способов закрепления (неподвижный шарнир и жесткая заделка) при различных значениях врезов.

Заключение. В работе предложен метод исследования геометрически нелинейных свободных колебаний симметричных многослойных пластин, который основан на использовании теории R-функций, вариационных методов, и метода Рунге-Кутты. Получены новые результаты для пятислойных пластин, исследовано влияние геометрических и физических факторов на свободные нелинейные колебания композитных пластин. Установлено, что при увеличении глубины вреза значения отношения ω_{NL}/ω_L уменьшаются. При малой глубине врезов эти значения стремятся к значениям соответствующим для квадратной пластины.

Таблица 3

| (0/90/0/90/0) | | | | | | | |
|-----------------------|--------------------|----------------------------|--------------------------|-----------------|--------------------|----------------------------|--------------------------|
| Неподвижный шарнир | | | | Жесткая заделка | | | |
| w_{\max} / h | $c=d=0$ $e=f=0$ | $c=d=0,02a$ $e=f=0,02a$ | $c=e=0,2a$ $d=f=0,1a$ | w_{\max} / h | $c=d=0$ $e=f=0$ | $c=d=0,02a$ $e=f=0,02a$ | $c=e=0,2a$ $d=f=0,1a$ |
| 0,2 | 1,0315 | 1,0315 | 1,0244 | 0,2 | 1,0079 | 1,0079 | 1,0078 |
| 0,4 | 1,1207 | 1,1206 | 1,0643 | 0,4 | 1,0313 | 1,0312 | 1,0309 |
| 0,6 | 1,2553 | 1,2551 | 1,2017 | 0,6 | 1,0692 | 1,0688 | 1,0682 |
| 0,8 | 1,4226 | 1,4222 | 1,3377 | 0,8 | 1,1201 | 1,1195 | 1,1184 |
| 1,0 | 1,6124 | 1,6118 | 1,4945 | 1,0 | 1,1823 | 1,1814 | 1,1797 |
| 1,2 | 1,8176 | 1,8169 | 1,6663 | 1,2 | 1,2541 | 1,2529 | 1,2507 |
| (45/-45/ 45 /-45/ 45) | | | | | | | |
| Неподвижный шарнир | | | | Жесткая заделка | | | |
| w_{\max} / h | $c=d=0$ $e=f=0$ | $c=d=0,02a$ $e=f=0,02a$ | $c=e=0,2a$ $d=f=0,1a$ | w_{\max} / h | $c=d=0$ $e=f=0$ | $c=d=0,02a$ $e=f=0,02a$ | $c=e=0,2a$ $d=f=0,1a$ |
| 0,2 | 1,0146 | 1,0143 | 1,0120 | 0,2 | 1,0069 | 1,0067 | 1,0038 |
| 0,4 | 1,0571 | 1,0558 | 1,0473 | 0,4 | 1,0274 | 1,0272 | 1,0150 |
| 0,6 | 1,1244 | 1,1210 | 1,1035 | 0,6 | 1,0607 | 1,0602 | 1,0350 |
| 0,8 | 1,2123 | 1,2067 | 1,1778 | 0,8 | 1,1056 | 1,1048 | 1,0589 |
| 1,0 | 1,3168 | 1,3085 | 1,2669 | 1,0 | 1,1608 | 1,1596 | 1,0907 |
| 1,2 | 1,4342 | 1,4234 | 1,3679 | 1,2 | 1,2248 | 1,2233 | 1,1282 |

Список литературы: 1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с. 2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974, – 448 с. 3. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – К.: Наукова думка, 1987. – 176 с. 4. Курпа Л.В., Тимченко Г.Н. Исследование геометрически нелинейных колебаний композитных пластин сложной формы / Динамика и прочность машин. – № 21. – С. 113-118. 5. M.K. Singha, R. Daripa Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates / Journal of Sound and Vibration. – 328 (2009). – P. 541–554.

Поступила в редколлегию 27.10.2011