

В.А. ЖОВДАК, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»;
Л.Ф. ТАРАСОВА, науч. сотр., НТУ «ХПИ»

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУМЕРНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Запропоновано методику прогнозування надійності елементів конструкцій на основі використання кінетичних рівнянь для опису міри пошкодження і математичного апарату теорії марковських процесів. У результаті визначаються найбільш інформаційні показники залишкового ресурсу – ймовірність безвідмовної роботи й щільність ймовірності відмовлень.

The approach of the construction element's reliability prediction, based on the use of kinetic equations for description of the measure of damage and the mathematical tool for Markoff's process theory is proposed. As the result, the most informative reliability characteristics, such as no-failure operation probability and probability density of failures, are determined.

В данной работе предлагается подход к прогнозированию надежности элементов конструкций при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов. Рассмотрены примеры решения задачи для линейной и автомодельной моделей накопления повреждений.

Постановка задачи. Предполагается, что процесс нагружения $y(t)$ является узкополосным случайным процессом с огибающей $\lambda(t)$ и несущей частотой ω .

Введем меру накопления повреждений $z(t)$ в элементах конструкций при случайном воздействии и постепенных отказах, происходящих в результате накопления различного рода повреждений. Для нахождения текущего значения $z(t)$ используется кинетическое уравнение повреждаемости (КУП) в виде [1, 2]

$$\frac{dz(t)}{dt} = F[z(t), \lambda(t), y_m, R(t)], \quad (1)$$

здесь $z(t)$ – мера повреждений, $F[\dots]$ – детерминированная функция, $\lambda(t)$ – амплитудное значение параметров напряженно-деформированного состояния при гармоническом нагружении, y_m – среднее значение, $R(t)$ – вектор характеристик конструкционной прочности.

Для элементов машиностроительных конструкций, в которых имеет место случайное нагружение и постепенные отказы различной физической природы, можно записать кинетические уравнения соответственно для меры повреждений $z(t)$ и уравнения фильтра для определяющего эти уравнения параметра $\lambda(t)$

$$\begin{cases} dz(t)/dt = F[z(t), \lambda(t), R(t)]; \\ d\lambda(t)/dt = \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda)n(t), \end{cases} \quad (2)$$

здесь где $n(t)$ – нормальный белый шум, $\Phi_1(\lambda)$ и $\Phi_2(\lambda)$ – детерминированные функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Рассматривая совместно уравнения (2), можно утверждать, что $[z(t), \lambda(t)]$ будет представлять двумерный марковский процесс, одномерная плотность вероятности которого $f(z, \lambda, t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [7].

$$\frac{\partial f(\lambda, z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} [A_1(\lambda)f(\lambda, z, t)] - \frac{\partial}{\partial z} [A_2(\lambda, z)f(\lambda, z, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [B(\lambda)f(\lambda, z, t)]. \quad (3)$$

Граничные и начальные условия для уравнения (3) формулируются исходя из физической сущности задачи и общих свойств плотности вероятности [8]:

– граничные условия:

$$\lim_{z, \lambda \rightarrow 0, \infty} f(z, \lambda, t) = 0; \quad (4)$$

– начальные условия:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(z, \lambda, t) = f_0(z)f_0(\lambda), \quad (5)$$

здесь $f_0(z), f_0(\lambda)$ – соответственно начальное значение плотности меры повреждений и плотность вероятности огибающей.

В соответствии с общей теорией марковских процессов существует взаимнооднозначное соответствие между коэффициентами уравнения (3) и коэффициентами стохастических дифференциальных уравнений (2) [5, 7]

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= \Phi_1(\lambda) + \frac{N_0}{4} \Phi_2(\lambda) \cdot d\Phi_2(\lambda) / d\lambda; \\ A_2(\lambda, z) &= F[\lambda, z, y_m, R]; \\ B(\lambda) &= \frac{N_0}{2} \Phi^2(\lambda). \end{aligned} \quad (6)$$

Для конкретизации соотношений (6) синтезируется стохастическое дифференциальное уравнение (уравнение фильтра) первого порядка для огибающей, описывающее одномерный марковский процесс. Синтез формирующих фильтров осуществляется на основе системы распределений Пирсона. [3]. В результате проведенных исследований имеем по классификации Пирсона 1-ый тип распределения или β -распределение [7] и уравнения соответствия для коэффициентов $A_1(\lambda)$ и $B(\lambda)$ имеют вид [3]

$$\begin{aligned} A_1(\lambda) &= -\frac{\beta}{2(p-1)} [q - (p+1)\lambda]; \\ B(\lambda) &= \beta(\lambda^2 - \lambda) / (p-1). \end{aligned} \quad (7)$$

где β, q, p – параметры β – распределения.

Коэффициент $A_2(\lambda, z)$ в зависимости от принятой гипотезы накопления

повреждений, может иметь следующий вид [1]:

– для линейной гипотезы накопления повреждений

$$A_2 = C\lambda^r ; \quad (8)$$

– для автомодельной гипотезы накопления повреждений

$$A_2(z) = Cz\lambda^r . \quad (9)$$

Таким образом, решая уравнения (3) получаем одномерную плотность вероятности меры повреждений, по которой определяются все основные показатели надежности: вероятность безотказной работы, плотность вероятности отказов, среднее и дисперсия времени до разрушения.

Метод решения. Решение уравнения (3) представляется в виде [6], позволяющем добиться совпадения одномерных плотностей $\lambda(t)$ и $z(t)$, корреляционного момента, а также математических ожиданий и дисперсий

$$f(\lambda, z, t) = f(\lambda)f(z, t)[1 + R(t)(\lambda - m_\lambda)(z - m_z)] , \quad (10)$$

здесь $f(\lambda)$, $f(z, t)$ – одномерные плотности вероятности соответственно λ , z ; $R(t) = \mu_{\lambda z} / \sigma_\lambda \sigma_z$ – коэффициент корреляции, $\mu_{\lambda z}$ – смешанный момент; m_z , σ_z^2 – соответственно математическое ожидание и дисперсия меры повреждений; m_λ , σ_λ^2 – соответственно математическое ожидание и дисперсия огибающей.

Получим уравнение для одномерной плотности вероятности меры повреждений $f(z, t)$. Для этого проинтегрируем уравнение (3) по λ в пределах $[0, \infty]$. При удовлетворении граничных условий (4) первое и третье слагаемые полученного соотношения обращаются в нуль, в результате получим

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\int_0^\infty A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) d\lambda \right] . \quad (11)$$

Подставляя решение (10) в соотношение (11), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty A_2(\lambda, z) f(\lambda) f(z, t) [1 + R(t)(\lambda - m_\lambda)(z - m_z)] d\lambda = \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ f(z, t) [\alpha_1(z) + R(t)(z - m_z)(\alpha_2(z) - m_\lambda \alpha_1(z))] \right\} , \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\alpha_1(z) = \int_0^\infty A_2(\lambda, z) f(\lambda) d\lambda ; \quad (13)$$

$$\alpha_2(z) = \int_0^\infty \lambda A_2(\lambda, z) f(\lambda) d\lambda . \quad (14)$$

Вводя обозначение

$$a^*(z, t) = \alpha_1(z) + R(t)(z - m_z)(\alpha_2(z) - m_\lambda \alpha_1(z)) , \quad (15)$$

уравнение (11) можно представить

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z} \{a^*(z,t)f(z,t)\}. \quad (16)$$

Для решения уравнения (16) применяется метод характеристических функций [8]. В соответствии с используемым методом умножим соотношение (16) на $e^{i\omega z}$ и проинтегрируем по z в пределах $[0, \infty)$. Произведя интегрирование по частям в правой части полученного соотношения с учетом определения характеристической функции $\Theta(\omega, t)$, получим

$$\frac{\partial \Theta(\omega, t)}{\partial t} = -e^{i\omega z} f(z,t) a^*(z,t) \Big|_0^\infty + i\omega \int_0^\infty f(z,t) a^*(z,t) e^{i\omega z} dz. \quad (17)$$

При удовлетворении граничных условий (4) первое слагаемое соотношения (17) обращается в нуль. Учитывая, что плотность вероятности отлична от 0 на конечном интервале $[0, \Delta]$, в уравнении (17) верхний предел можно заменить на Δ и воспользоваться представлением плотности вероятности через значения характеристической функции в дискретных точках для конечно-го интервала Δ [4]

$$f(z,t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-N}^N \Theta(\omega_n, t) \exp(iz\omega_n); \quad \omega_n = 2\pi n / \Delta. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получим

$$\frac{\partial \Theta(\omega, t)}{\partial t} = i\omega \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-N}^N d_n(\omega, t) \Theta(\omega_n, t), \quad (19)$$

где

$$d_n(\omega, t) = \int_0^\infty a^*(z,t) e^{iz(\omega - \omega_n)} dz. \quad (20)$$

Для любого значения ω_k $k = \overline{-N, N}$ можно записать уравнение (19), то есть

$$\frac{\partial \Theta(\omega_k, t)}{\partial t} = i\omega_k \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-N}^N d_n(\omega_k, t) \Theta(\omega_n, t). \quad (21)$$

При варьировании $k = \overline{-N, N}$, получим $2N + 1$ дифференциальных уравнений с $2N + 1 + 3$ неизвестными.

Помимо $2N + 1$ неизвестных значений характеристической функции $\Theta(\omega_n, t)$ в дискретных точках ω_n , ($n = \overline{-N, N}$), неизвестными также являются: смешанный момент $\mu_{\lambda z}$, математическое ожидание меры повреждений m_z и дисперсия меры повреждений σ_z^2 . Для полноты системы уравнений получим дополнительно три уравнения для указанных моментов.

Для получения уравнения для смешанного момента умножим исходное уравнение (3) на $(\lambda - m_\lambda)(z - m_z)$ и проинтегрируем по λ и по z в пределах $[0, \infty)$. В левой части имеем производную от смешанного момента. Третье слагаемое правой части после интегрирования по частям с учетом граничных

условий (4) и общих свойств плотности вероятности обращается в ноль. Первое и второе слагаемые в правой части уравнения преобразуются после интегрирования по частям и учете граничных условий (4). В результате имеем следующее дифференциальное уравнение для смешанного момента $\mu_{\lambda z}$ [6]

$$\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (z - m_z) A_1(\lambda) f(\lambda, z, t) dz d\lambda + \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) \int_0^{\infty} A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda. \quad (22)$$

Аналогичные выкладки можно проделать для получения дифференциальных уравнений для математического ожидания меры повреждений m_z и дисперсии меры повреждений σ_z^2 . Однако в рамках метода характеристических функций можно воспользоваться соотношениями, для определения первых двух начальных моментов через значения характеристической функции в дискретном ряде точек [4]. Используя вышеупомянутые соотношения, запишем

$$m_z(t) = \Delta \left[\frac{1}{2} + \sum_{\substack{k=-N \\ (k \neq 0)}}^N \frac{1}{\alpha_k} \Theta(\omega_k, t) \right]; \quad (23)$$

$$\sigma_z^2(t) = \Delta^2 \left[\frac{1}{3} + \sum_{\substack{k=-N \\ (k \neq 0)}}^N \frac{\alpha_k - 2}{\alpha_k^2} \Theta(\omega_k, t) \right] - m_z^2(t). \quad (24)$$

здесь $\alpha_k = -i\Delta\omega_k = -i2\pi k$.

Таким образом, получена система уравнений (21) – (24) для получения характеристической функции в дискретном ряде точек, по которой определяется плотность вероятности меры повреждений и соответственно основные показатели надежности.

Коэффициенты разрешающей системы дифференциальных уравнения для различных моделей накопления повреждений. Рассмотрим линейную модель накопления повреждений. Соответственно в этом случае A_2 определяется соотношением (8), подставляя которое в (13), (14), получим коэффициенты a_1, a_2 не зависящие от z

$$a_1 = \int_0^{\infty} C \lambda^r f(\lambda) d\lambda = C m_{\lambda}^r; \quad a_2 = \int_0^{\infty} C \lambda^{r+1} f(\lambda) d\lambda = C m_{\lambda}^{r+1}, \quad (25)$$

здесь $m_{\lambda}^r, m_{\lambda}^{r+1}$ – начальные моменты λ r -го и $(r+1)$ -го порядков соответственно. И тогда соотношения (20) примут следующий вид

$$d_n(\omega, t) = \int_0^{\infty} \left[C m_{\lambda}^r + R(z - m_z)(C m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r C m_{\lambda}^r) \right] e^{iz(\omega - \omega_n)} dz. \quad (26)$$

Произведя интегрирование по частям, имеем уравнения для определения коэффициентов $d_n(\omega, t)$ разрешающей системы дифференциальных урав-

нений (21) в случае линейной модели накопления повреждений

$$d_n(\omega, t) = \frac{e^{iz(\omega - \omega_n)}}{i(\omega - \omega_n)} \left[Cm_\lambda^r + R(Cm_\lambda^{r+1} - Cm_z m_\lambda^r) \left(z - \frac{1}{i(\omega - \omega_n)} - m_z \right) \right] \Bigg|_0^\Delta, \quad \omega \neq \omega_n; \quad (27)$$

$$d_n(\omega, t) = \Delta \left[Cm_\lambda^r + R(Cm_\lambda^{r+1} - Cm_z m_\lambda^r) (\Delta / 2 - m_z) \right], \quad \omega = \omega_n. \quad (28)$$

Рассмотрим автомодельную гипотезу накопления повреждений. Для данной гипотезы коэффициент A_2 определяется выражением (9), соответственно имеем

$$a_1(z) = \int_0^\infty Cz \lambda^r f(\lambda) d\lambda = Cm_\lambda^r z; \quad a_2(z) = \int_0^\infty Cz \lambda^{r+1} f(\lambda) d\lambda = Cm_\lambda^{r+1} z, \quad (29)$$

где m_λ^r , m_λ^{r+1} – начальные моменты λ r -го и $(r+1)$ -го порядков соответственно.

Выражения для коэффициентов (20) с учетом(29) примут следующий вид

$$d_n(\omega, t) = \int_0^\infty \left[Cm_\lambda^r z + Rz(z - m_z)(Cm_\lambda^{r+1} - m_\lambda Cm_\lambda^r) \right] e^{iz(\omega - \omega_n)} dz. \quad (30)$$

Произведя интегрирование по частям, имеем уравнения для определения коэффициентов $d_n(\omega, t)$ разрешающей системы дифференциальных уравнений (21) в случае автомодельной гипотезы накопления повреждений

$$d_n(\omega, t) = \frac{e^{iz(\omega - \omega_n)}}{i(\omega - \omega_n)} \left\{ Cm_\lambda^r \left(z - \frac{1}{i(\omega - \omega_n)} \right) + R(Cm_\lambda^{r+1} - Cm_\lambda^r m_z) \times \right. \\ \left. \times \left[\left(z^2 - \frac{2z}{i(\omega - \omega_n)} - \frac{2}{(\omega - \omega_n)^2} \right) - m_z \left(z - \frac{1}{i(\omega - \omega_n)} \right) \right] \right\} \Bigg|_0^\Delta, \quad \omega \neq \omega_n; \quad (31)$$

$$d_n(\omega, t) = \Delta^2 \left[Cm_\lambda^r / 2 + R(Cm_\lambda^{r+1} - Cm_z m_\lambda^r) (\Delta / 3 - m_z / 2) \right], \quad \omega = \omega_n. \quad (32)$$

Уравнение для смешанного момента. Преобразуем первое слагаемое правой части уравнения (22), используя соотношения (7), (10). Учитывая определение для центральных моментов, получим

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (z - m_z) A_1(\lambda) f(\lambda, z, t) dz d\lambda = -\frac{\beta}{2(p-1)} \int_0^\infty \int_0^\infty (z - m_z) [q - (p+1)\lambda] \times \\ \times f(\lambda) f(z, t) [1 + R(t)(\lambda - m_\lambda)(z - m_z)] dz d\lambda = \\ = -\frac{\beta}{2(p-1)} \int_0^\infty [q - (p+1)\lambda] R(t)(\lambda - m_\lambda) \sigma_z^2 f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \beta R(t) \sigma_\lambda^2 \sigma_z^2. \quad (33)$$

С учетом (33) соотношение(22) примет следующий вид

$$\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} = \frac{1}{2} \beta R(t) \sigma_\lambda^2 \sigma_z^2 + \int_0^\infty \int_0^\infty (\lambda - m_\lambda) A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda. \quad (34)$$

Преобразуем второе слагаемое правой части уравнения (34) для случая линейной гипотезы накопления повреждений. Подстановка соотношений (8), (10), позволяет разделить переменные интегрирования. Учитывая определение для моментов, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda = \\
 & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) C \lambda^r f(\lambda) f(z, t) [1 + R(t)(\lambda - m_{\lambda})(z - m_z)] dz d\lambda = \\
 & = \int_0^{\infty} C \lambda^r (\lambda - m_{\lambda}) f(\lambda) \int_0^{\infty} [1 + R(t)(\lambda - m_{\lambda})(z - m_z)] f(z, t) dz d\lambda = C(m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r m_{\lambda}^r).
 \end{aligned} \tag{35}$$

В итоге имеем дифференциальное уравнение для смешанного момента для случая линейной гипотезы накопления повреждений

$$\frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} = \frac{1}{2} \beta R(t) \sigma_{\lambda}^2 \sigma_z^2 + C(m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r m_{\lambda}^r). \tag{36}$$

Преобразуем второе слагаемое уравнения (34) для случая **автомодельной** гипотезы накопления повреждений. Подставляя (9), (10) в (34) и производя аналогичные преобразования, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) A_2(\lambda, z) f(\lambda, z, t) dz d\lambda = \\
 & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - m_{\lambda}) C z \lambda^r f(\lambda) f(z, t) [1 + R(t)(\lambda - m_{\lambda})(z - m_z)] dz d\lambda = \\
 & = \int_0^{\infty} C \lambda^r (\lambda - m_{\lambda}) f(\lambda) \int_0^{\infty} z [1 + R(t)(\lambda - m_{\lambda})(z - m_z)] f(z, t) dz d\lambda = \\
 & = m_z C(m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r m_{\lambda}^r) + R(t) \sigma_z^2 C(m_{\lambda}^{r+2} - 2m_{\lambda}^{r+1} m_{\lambda} + m_{\lambda}^r m_{\lambda}^2).
 \end{aligned} \tag{37}$$

В итоге имеем дифференциальное уравнение для смешанного момента в случае автомодельной гипотезы накопления повреждений

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mu_{\lambda z}}{dt} & = \frac{1}{2} \beta R(t) \sigma_{\lambda}^2 \sigma_z^2 + m_z C(m_{\lambda}^{r+1} - m_{\lambda}^r m_{\lambda}^r) + \\
 & + R(t) \sigma_z^2 C(m_{\lambda}^{r+2} - 2m_{\lambda}^{r+1} m_{\lambda} + m_{\lambda}^r m_{\lambda}^2).
 \end{aligned} \tag{38}$$

Численные исследования. Описанный выше алгоритм реализован для случая автомодельной гипотезы накопления повреждений. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений осуществлялось методом Рунге-Кутты. Расчеты производились в системе MATLAB 5.2 при следующих исходных данных: начальные условия заданы нормальным законом со следующими значениями параметров – $m_{z_0} = 0,08$; $\sigma_{z_0}^2 = 0,0002$; $\mu_{\lambda z} = 0,01$; $m_{\lambda} = 0,333$; $m_{\lambda}^2 = 0,1515$; $m_{\lambda}^r = 0,049$; $m_{\lambda}^{r+1} = 0,032$; $m_{\lambda}^{r+2} = 0,032$; $\beta = 2$.

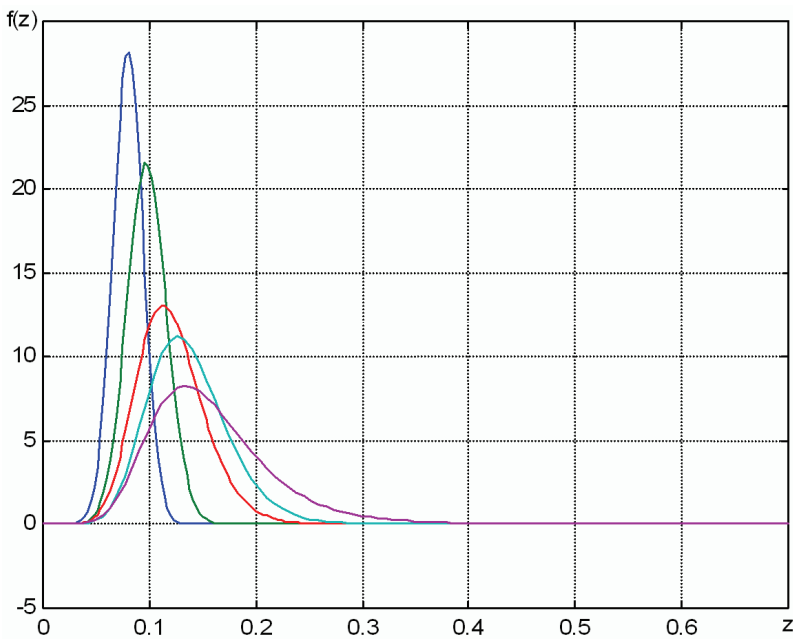


Рисунок 1 – Плотности вероятности меры повреждений в различные моменты времени

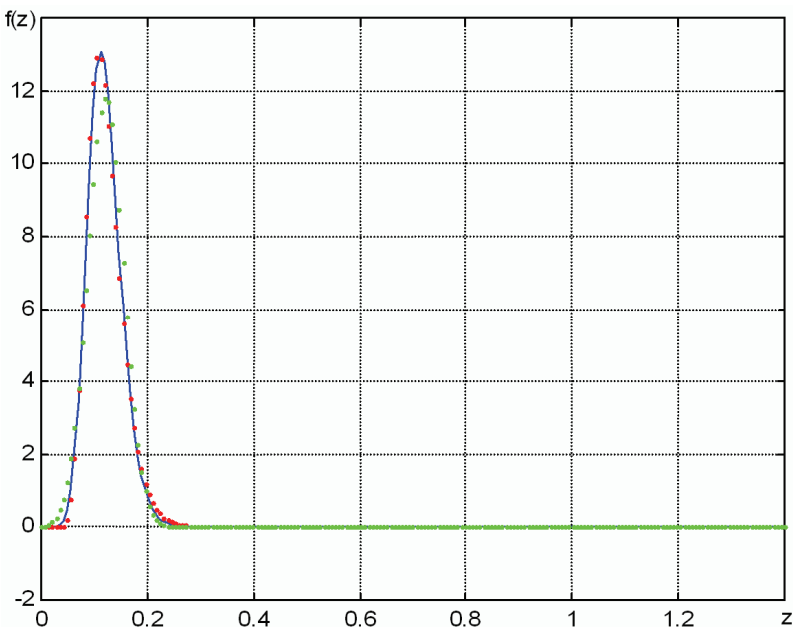


Рисунок 2 – Плотность вероятности меры повреждений

В результате получены плотности вероятности меры повреждений при различных значениях времени, вероятность безотказной работы. На рис.1 приведены плотности вероятности меры повреждений в различные моменты времени.

На рис. 2 приведены плотности вероятности меры повреждений, полученные методом характеристических функций (сплошная линия) и точное решение (точки) представляющее логнормальный закон. Вероятность безотказной работы, построенная по полученным значениям плотности вероятности меры повреждений, приведена на рис. 3.

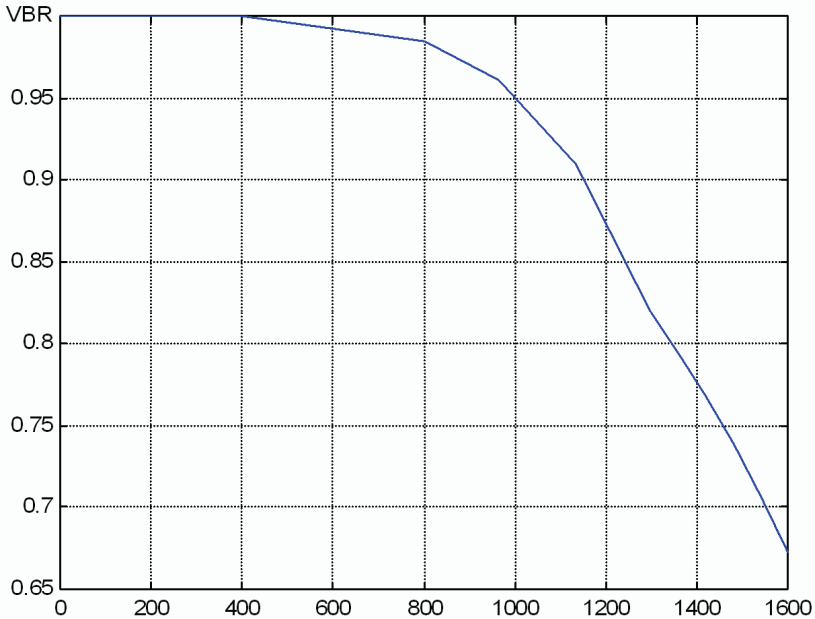


Рисунок 3 – Вероятность безотказной работы

Выводы. Решена задача прогнозирования остаточного ресурса при случайном нагружении и постепенных отказах на основе применения кинетических уравнений для описания мер повреждений и математического аппарата теории марковских процессов. Предложенная методика позволяет получить наиболее информативные показатели остаточного ресурса – вероятность безотказной работы и плотность вероятности отказов.

Список литературы: 1. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с. 2. Гусев А.С. Сопротивление усталости и живучесть конструкций при случайных нагрузках. – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с. 3. Жовдак В.А., Мищенко И.В. Прогнозирование надежности элементов конструкции с учетом технологических и эксплуатационных факторов. – Х.: ХГПУ, 1999. – 120 с. 4. Жовдак В.А., Тарасова Л.Ф. Прогнозирование

вание ресурса элементов конструкций при широкополосном случайном воздействии // Динамика и прочность машин. – Вып. 50. – X.: 1989. – С. 118-124. **5. Левин Б.Р.** Теоретические основы статистической радиоэлектроники. – М., Радио и связь, 1989. – 656 с. **6. Павлов П.А.** Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. – Л.: Машиностроение, 1988. – 252 с. **7. Писаренко Г.С., Лебедев А.А.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Наукова думка, 1976. – 415 с. **8. Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с. **9. Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

Поступила в редколлегию 17.02.2011