

**Г. И. ЛЬВОВ**, д-р техн. наук, профессор, зав. каф., НТУ «ХП»;  
**В. А. ОКороков**, студент, НТУ «ХП»

## **ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА НА АВТОФРЕТИРОВАНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ**

У статі розглядається задача автофретування товстостінного циліндра в припущенні плоскої деформації. Представлені співвідношення, які описують пластичну поведінку матеріалу згідно інкрементальної теорії пластичності з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. Описаний алгоритм рішення пружно-пластичної задачі, а також представлені результати рішення задачі автофретування товстостінного циліндра.

**Ключові слова:** автофретування, пошкоджуваність матеріалу.

В статье рассматривается задача автофретирования толстостенного цилиндра в условиях плоской деформации. Представлены соотношения, описывающие пластическое поведение материала согласно инкрементальной теории пластичности с учетом повреждаемости материала. Описан алгоритм решения, и приведены результаты для задачи автофретирования стального цилиндра.

**Ключевые слова:** автофретирование, повреждаемость материала.

This paper presents autofrettage processes in case of plain strain. There are produced equation of elastic-plastic theory in correspondence with Continuum Damage Mechanics. There are described method of solving boundary problem and presented result of solving problem of autofrettage thick-walled tubes.

**Keywords:** autofrettage, damage of material.

**Введение.** Применительно к толстостенным цилиндрам процедуру автофретирования используют для повышения предельно допустимого внутреннего давления. Для этого цилиндр нагружают так, чтобы во внутренних слоях или по всей толщине цилиндра возникли пластические деформации. После снятия нагрузки во внутренних стенках цилиндра появляются остаточные сжимающие напряжения. Автофретирование является альтернативой использования составных цилиндров, собранных с предварительным натягом.

Остаточные напряжения, которые суммируются с противоположными по знаку напряжениями от внутреннего давления, в результате дают меньшее значение действующих напряжений. Таким образом, значительно повышается допусковое внутреннее давление.

Фундаментальными работами в области исследования автофретирования являются работы Ильюшина[1], Огибалова[1], Биргера[2].

При разгрузке цилиндра может возникать такое явление как эффект Баушингера, который для одноосного напряженного состояния проявляется в снижении предела текучести на сжатие, предварительно пластически растянутого образца. В случае сложного напряженного состояния это может про-

явиться в появлении вторичных пластических деформаций при разгрузке, и как следствие к уменьшению благоприятных остаточных напряжений. Поэтому при расчете задач автофреттирования необходимо использовать теории пластичности позволяющие учесть эффект Баушингера. В статье рассматривается модель пластичности с комбинированным упрочнением. При использовании такой модели поверхность пластичности может равномерно расширяться и смещаться, что позволяет учесть эффект Баушингера. Вопрос о влиянии эффекта Баушингера на процесс автофреттирования рассматривается в статьях [3,4].

Процедура автофреттирования приводит к образованию значительных пластических деформаций, что может привести к разупрочнению материала вследствие появления в нем повреждений. На экспериментальных диаграммах деформирования это проявляется в снижении модуля упругости материала при разгрузке. Для моделирования таких явлений используется континуальная механика повреждаемости. Впервые в работах Работнова Ю.Н. [5] предложено связать повреждения материала и деградацию свойств упругости с параметром повреждаемости, который определяется как отношение общей площади сечения материала к площади, эффективно сопротивляющейся нагрузке. В работе Леметра [6] представлены кинетические законы развития для хрупкой повреждаемости, повреждаемости вследствие пластичности, ползучести, малоциклового и многоциклового усталости.

**Формулировка условия пластичности с учетом повреждаемости материала.** В зависимости от принятого закона изменения размеров, формы и перемещения поверхности пластичности, можно получать различные теории пластичности. Для учета анизотропного характера упрочнения может быть применена модель с равномерно расширяющейся и смещающейся поверхностью пластичности. Это равносильно использованию критерия текучести Хубера – Мизеса, который выглядит следующим образом [7]:

$$f(\sigma_{ij}, \rho_{ij}, R) = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij} - \rho_{ij})(S_{ij} - \rho_{ij})} - R - \sigma_T = 0, \quad (1)$$

где  $S_{ij}$  – компоненты тензора диватора напряжений;  $\rho_{ij}$  – компоненты тензора добавочных напряжений;  $R$  – функция изотропного упрочнения;  $\sigma_T$  – предел текучести материала;

Величина  $R$  обычно определяется как функция параметра Удквиста, а компоненты тензора  $\rho_{ij}$ , как функции компонент тензора пластических деформаций:

$$R = \phi\left(\int d\bar{\varepsilon}_i^p\right), \quad (2)$$

$$\rho_{ij} = g(\varepsilon_{ij}^p), \quad (3)$$

где  $d\bar{\varepsilon}_i^p$  – интенсивность приращений пластических деформаций, определяемая формулой:

$$d\bar{\varepsilon}_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}. \quad (4)$$

Функции  $\phi$  и  $g$  могут быть определены из эксперимента на одноосное напряженное состояние.

Для учета повреждаемости необходимо использовать принцип эквивалентных деформаций, согласно которому любое уравнение состояния для поврежденного материала может быть заменено на такое же для неповрежденного материала, путем введения тензора эффективных напряжений. Эффективный тензор напряжений определяется согласно концепции эффективных напряжений:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-D}, \quad (5)$$

где  $D$  – скалярный параметр повреждаемости.

При замене тензора напряжений на эффективный, критерий текучести переписывается следующим образом:

$$f(\sigma_{ij}, \rho_{ij}, R, D) = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{S_{ij}}{1-D} - \rho_{ij} \right) \left( \frac{S_{ij}}{1-D} - \rho_{ij} \right)} - R - \sigma_T = 0. \quad (6)$$

В условиях активного нагружения должно выполняться следующее равенство:

$$\dot{f} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, для получения условия пластичности необходимо рассмотреть скорость приращения функции текучести:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} + \frac{\partial f}{\partial \rho_{ij}} \dot{\rho}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial D} \dot{D}. \quad (8)$$

С учетом (2) и (3) приращения  $R$  и  $\rho_{ij}$  будут иметь вид:

$$\dot{R} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_i^p} d\bar{\varepsilon}_i^p; \quad (9)$$

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (10)$$

Для определения приращения параметра повреждаемости необходимо рассмотреть кинетический закон развития повреждаемости, который имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= \frac{\partial F_D}{\partial Y} d\bar{\varepsilon}_i^p (1-D), \quad \text{при } \varepsilon_i^p \geq p_D, \\ \dot{D} &= 0, \quad \text{при } \varepsilon_i^p < p_D, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\varepsilon_i^p$  – интенсивность пластических деформаций;  $p_D$  – порог, после которого

го возникают первые повреждения;  $F_D$  – потенциал повреждаемости. В зависимости от выбора этого потенциала можно получать различные модели развития повреждаемости.

Частные производные из выражения (8) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial R} &= -1; & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{3}{2} \frac{S_{ij}^A}{\sigma_i^A (1-D)}; \\ \frac{\partial f}{\partial \rho_{ij}} &= -\frac{3}{2} \frac{S_{ij}^A}{\sigma_i^A}; & \frac{\partial f}{\partial D} &= \frac{3}{2} \frac{S_{ij}^A}{\sigma_i^A} \frac{S_{ij}}{(1-D)^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $S_{ij}^A$  и  $\sigma_i^A$  это:

$$\begin{aligned} S_{ij}^A &= \frac{S_{ij}}{1-D} - \rho_{ij}; \\ \sigma_i^A &= \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{S_{ij}}{1-D} - \rho_{ij} \right) \left( \frac{S_{ij}}{1-D} - \rho_{ij} \right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Ассоциированный закон течения для выбранной поверхности пластичности имеет вид:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_i^p}{\sigma_i^A} S_{ij}^A. \quad (14)$$

Если подставить (9)-(14) в (8), то условие (7) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}_i^p &= \frac{\frac{3}{2} \frac{S_{ij}^A}{\sigma_i^A (1-D)} \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_i^p} + \frac{9}{4} \frac{S_{mn}^A{}^2}{\sigma_i^A{}^2} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{mn}^p} - \frac{3}{2} \frac{S_{mn}^A}{\sigma_i^A} \frac{S_{mn}}{(1-D)} \frac{\partial F_D}{\partial Y}}. \end{aligned} \quad (15)$$

С использованием ассоциированного закона течения с учетом (15) могут быть получены 6 уравнений связывающих приращения пластических деформаций с приращениями напряжений:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{\frac{9}{4} \frac{S_{ij}^A S_{kl}^A}{\sigma_i^A{}^2 (1-D)} \dot{\sigma}_{kl}}{\frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_i^p} + \frac{9}{4} \frac{S_{mn}^A{}^2}{\sigma_i^A{}^2} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{mn}^p} - \frac{3}{2} \frac{S_{mn}^A}{\sigma_i^A} \frac{S_{mn}}{(1-D)} \frac{\partial F_D}{\partial Y}}. \end{aligned} \quad (16)$$

или в сокращенном виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = B_{ijkl}^p \dot{\sigma}_{kl}. \quad (17)$$

Для записи зависимости между приращениями полных деформаций и приращениями напряжений необходимо определить приращение упругих

деформаций. Из закона Гука в прямой форме можно получить зависимости между приращениями упругих деформаций и приращениями напряжений:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} 3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij}. \quad (18)$$

Приращение тензора эффективных напряжений:

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D} \dot{D}, \quad (19)$$

и после дифференцирования:

$$\dot{\tilde{\sigma}}_{ij} = \frac{1}{1-D} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{(1-D)^2} \dot{D}. \quad (20)$$

После замены тензора напряжений на тензор эффективных напряжений, уравнения (18) переписутся в виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E(1-D)} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E(1-D)} 3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} + \frac{\varepsilon_{ij}^e}{(1-D)} \dot{D}. \quad (21)$$

Если подставить кинетический закон развития повреждаемости (11) и ассоциированный закон течения (14) в (21), то получится следующее выражение:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E(1-D)} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E(1-D)} 3\dot{\sigma}_0 \delta_{ij} + \frac{2}{3} \frac{\sigma_i^A}{S_{ij}^A} \frac{\partial F_D}{\partial Y} \varepsilon_{ij}^e B_{ijkl}^p \dot{\sigma}_{kl}, \quad (22)$$

или в сокращенном виде:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = B_{ijkl}^e \dot{\sigma}_{kl}. \quad (23)$$

Приращение полных деформаций определяется как сумма приращений упругих и пластических деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p = (B_{ijkl}^e + B_{ijkl}^p) \dot{\sigma}_{kl}, \quad (24)$$

и после суммирования тензоров:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= B_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \text{ – в прямой форме,} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= H_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \text{ – в обратной форме.} \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, матрица податливости  $\mathbf{B}$  и матрица жесткости  $\mathbf{H}$  зависят от текущего напряженного состояния, от упругих характеристик материала, а также от величин, характеризующих пластическое поведение материала и развитие повреждаемости.

**Вывод разрешающего уравнения для толстостенного цилиндра постоянной толщины.** Физические соотношения (25) для осесимметричной задачи в полярных координатах можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_r &= H_{11} \dot{\varepsilon}_r + H_{12} \dot{\varepsilon}_\theta; \\ \dot{\sigma}_\theta &= H_{21} \dot{\varepsilon}_r + H_{22} \dot{\varepsilon}_\theta; \end{aligned} \quad (26)$$

Соотношения Коши:

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{d\dot{u}}{dr}; \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \frac{\dot{u}}{r}. \quad (27)$$

Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\frac{d^2\dot{\sigma}_r}{dr^2} + \frac{\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta}{r} = 0. \quad (28)$$

Систему уравнений (26)-(28) можно привести к разрешающему уравнению относительно приращений перемещений:

$$H_{11} \frac{d^2\dot{u}}{dr^2} + \left[ \frac{dH_{11}}{dr} + \frac{1}{r}(H_{12} - H_{21} + H_{11}) \right] \frac{d\dot{u}}{dr} + \left[ \frac{1}{r} \frac{dH_{12}}{dr} - \frac{H_{22}}{r^2} \right] \dot{u} = 0. \quad (29)$$

Дифференциальное уравнение второго порядка должно быть дополнено граничными условиями на внутреннем и внешнем радиусах:

$$\dot{\sigma}_r(r_a) = -\dot{P}; \quad \dot{\sigma}_r(r_b) = 0. \quad (30)$$

Относительно приращений перемещений граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} H_{11} \frac{d\dot{u}}{dr}(r_a) + \frac{H_{12}}{r_a} \dot{u}(r_a) &= -\dot{P}; \\ H_{11} \frac{d\dot{u}}{dr}(r_b) + \frac{H_{12}}{r_b} \dot{u}(r_b) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Система (29), (31) формирует краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

**Алгоритм решения упругопластической задачи с учетом повреждаемости.** Для решения задачи используется метод шагов. Задача разбивается на  $N$  шагов по нагрузке. На каждом шаге решается краевая задача (29), (31). В результате вычисляются приращения перемещений  $\dot{u}$ . Суммарные перемещения на  $n$  шаге вычисляются по формуле:  $u^n = u^{n-1} + \dot{u}^n$ . Таким же образом вычисляются компоненты напряжений и деформаций. На каждом шаге проверяется условие текучести:  $f < 0$ ; если неравенство выполняется, то пластическая деформация не вычисляется и матрица жесткости  $\mathbf{H}$  совпадает с матрицей упругих коэффициентов, если выполняется, то к расчету подключается матрица податливости  $\mathbf{B}^p$ . Затем, если интенсивность пластических деформаций превысила порог повреждаемости, то согласно кинетическому закону развития повреждаемости вычисляется приращение повреждаемости.

**Метод решения краевой задачи.** Для решения дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами применен метод прогонки. Для этого производные заменены следующими конечными разностями:

$$\frac{d^2\dot{u}}{dr^2} = \frac{\dot{u}_{i-1} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}}{h^2}; \quad (32)$$

$$\frac{d\dot{u}}{dr} = \frac{\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_{i-1}}{2h}; \quad (33)$$

$$\frac{d\dot{u}}{dr} = \frac{\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i}{h}; \quad (34)$$

$$\frac{d\dot{u}}{dr} = \frac{\dot{u}_i - \dot{u}_{i-1}}{h}; \quad (35)$$

где  $h$  – величина шага равномерной сетки.

Для замены дифференциального оператора в уравнении, использованы центральные конечные разности второго порядка точности (32), (33), а для краевых условий – левая и правая конечные разности первого порядка точности (34), (35).

После подстановки конечных разностей в уравнение, а также в граничные условия, формируется система линейных алгебраических уравнений [8]:

$$\begin{aligned} c_0\dot{u}_0 - b_0\dot{u}_1 &= f_0; \\ -a_i\dot{u}_{i-1} + c_i\dot{u}_i - b_i\dot{u}_{i+1} &= f_i; i = \overline{1, N}; \\ -a_N\dot{u}_{N-1} + c_N\dot{u}_N &= f_N. \end{aligned} \quad (36)$$

С помощью метода исключения Гаусса выводятся прогоночные коэффициенты:

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}; \quad i = \overline{1, N-1}; \quad \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}; \\ \beta_{i+1} &= \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}; \quad i = \overline{1, N}; \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}. \end{aligned} \quad (37)$$

Вычисление коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  описывает прямой ход прогонки. С помощью обратного хода прогонки находятся значения искомой функции:

$$\dot{u}_i = \alpha_{i+1}\dot{u}_{i+1} + \beta_{i+1}; \quad i = \overline{N-1, 0}; \quad \dot{u}_N = \beta_{i+1}. \quad (38)$$

**Пример решения задачи автофретирования толстостенного цилиндра с учетом повреждаемости.** В качестве теории пластичности выбрана модель с изотропным упрочнением. Параметры для такой модели определены следующим образом:

$$R = \frac{EE_T}{E + E_T} \varepsilon_i^p, \quad (39)$$

где  $E_T$  – модуль упрочнения материала;

Кинетический закон развития повреждаемости принят в таком виде [6]:

$$\dot{D} = \frac{\sigma_i^2 R_v}{2ES} d\bar{\varepsilon}_i^p, \quad \text{при } \varepsilon_i^p \geq p_D,$$

$$\dot{D} = 0, \quad \text{при } \varepsilon_i^p < p_D,$$

$$R_v = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left( \frac{\sigma_0}{\sigma_i} \right)^2. \quad (40)$$

Материал цилиндра – нержавеющая сталь AISI 316. Для такого материала параметры упругости, пластичности и повреждаемости представлены ниже.

Модуль упругости:  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; коэффициент Пуассона:  $\nu = 0,32$ ; предел текучести:  $\sigma_T = 260$  МПа; модуль упрочнения:  $E_T = 6 \cdot 10^9$  Па; параметр, характеризующий рост повреждаемости:  $S = 7$  МПа; порог повреждаемости:  $p_D = 0,1$ . Для цилиндра приняты следующие размеры: внутренний радиус:  $a = 0,03$  м, внешний радиус:  $b = 0,09$  м.

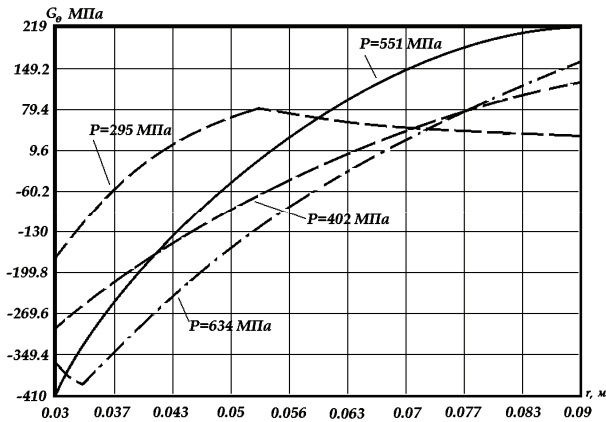


Рисунок 1 – Распределение окружных остаточных напряжений с ростом давления автофретирования

На рис. 1 показаны распределения окружных остаточных напряжений для различных значений давления автофретирования. При увеличении этого давления происходит рост остаточных напряжений до тех пор, пока эффекты от повреждаемости материала при значительных пластических деформациях не становятся преобладающими. Для определения оптимального давления автофретирования, при котором остаточное напряжение на внутреннем радиусе цилиндра имеет наибольшее значение, проведена серия расчетов с различными величинами давления.

На рис. 2 показана зависимость остаточных окружных напряжений от давления автофретирования. При значении давления  $P = P^D = 477$  МПа появ-



ляются первые повреждения в материале, а при  $P = P_{opt} = 551$  МПа остаточные окружные напряжения достигают максимума по абсолютному значению, при этом значение повреждаемости на внутреннем радиусе –  $D = 0,127$ . Таким образом, давление  $P_{opt}$  является оптимальным для процесса автофреттирования. Как видно из рис. 3 максимальная повреждаемость развивается на внутреннем радиусе в месте максимальных пластических деформаций.

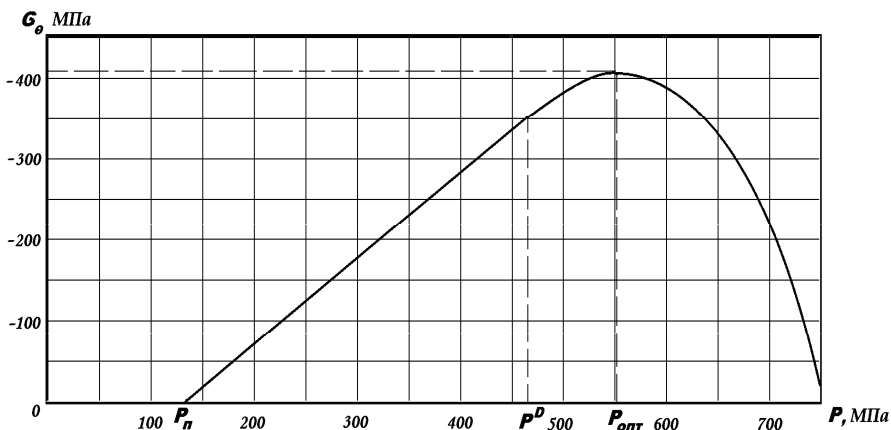


Рисунок 2 – Зависимость остаточных окружных напряжений от давления автофреттирования

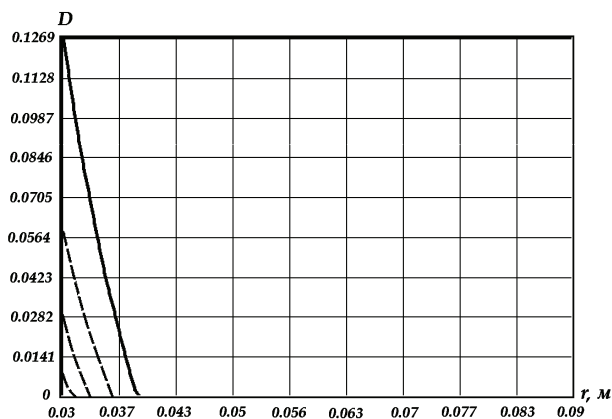


Рисунок 3 – Развитие параметра повреждаемости с увеличением давления автофреттирования

**Выводы.** В статье выполнен анализ влияния повреждаемости материала на эффективность процесса автофреттирования. Установлено, что непрерывное увеличение давления автофреттирования не приводит к росту остаточных напряже-

ний. На конкретном примере найдено оптимальное значение давления, при котором остаточные напряжения достигают максимального значения.

Разработанный алгоритм решения реализован с помощью программной среды Microsoft Visual Studio 2008 и языка программирования Visual C#. Приведен пример решения задачи.

**Список литературы:** 1. *Ильюшин А.А., Огибалов П.М.* Уругопластические деформации полых цилиндров. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 227 с. 2. *Биргер И.А.* Остаточные напряжения. – М.: Машгиз, 1963. – 231 с. 3. *Работнов Ю.Н.* Введение в механику разрушения / *Работнов Ю.А.* – М.: Наука, 1987. – 82 с. 4. *Parker A.P.* Bauschinger Effect Design Procedures for Autofrettaged Tubes Including Material Removal and Sachs' Method // *Journal of Pressure Vessel Technology.* – 1999. – № 121. – P. 430-437. 5. *Parker A.P.* Bauschinger Effect Design Procedures for Compound Tubes Containing an Autofrettaged Layer // *Journal of Pressure Vessel Technology.* – 2001. – № 123. – P. 203-206. 6. *Lamaitre J. A.* Course of Damage Mechanics / *J. Lamaitre, R. Desmorat.* – Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2005. – 380 p. 7. *Малинин Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение. 1975. – 399 с. 8. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

*Поступила в редколлегию 20.09.2012.*