

Н.Т. КУРБАНОВ, канд. физ.-мат. наук, доцент, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан;

У.С. АЛИЕВА, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

У статті розглядається задача про динамічну стійкість в'язкопружних стрижнів для будь-якого спадкового ядра. Досліджено на малій в'язкості методом комплексного перетворення Лапласа.

Ключові слова: комплексне перетворення Лапласа, динамічна стійкість.

In article is considered the problem about dynamic stability of viscoelastic cores for any hereditary kernels is investigated at small viscosity by a method of integrated transformation of Laplace.

Ключевые слова: комплексное преобразование Лапласа, динамическая стойкость.

In article the problem about dynamic stability of viscoelastic cores for any hereditary kernels is investigated at small viscosity by a method of integrated transformation of Laplace.

Keywords: integral Laplace transform, dynamic stability.

Одной из основных динамических задач вязкоупругости является задача о колебании вязкоупругих систем. При решении задач колебаний вязкоупругих элементов конструкции применяются различные методы (метод усреднения, метод интегральных преобразований и т.д.). В данной статье методом интегрального преобразования Лапласа решается задача о динамической устойчивости вязкоупругих стержней для произвольных наследственных функций при малой вязкости.

Как известно поперечные колебания вязкоупругого стержня длиной l , сжатого под действием внешней нагрузки $f(t,x)$ имеет вид:

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + P(t) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = EI \varepsilon \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial^4 u(x,\tau)}{\partial x^4} d\tau + f(x,t), \quad (1)$$

где m – масса единицы длины стержня, E – модуль упругости, I – момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения перпендикулярной к плоскости колебаний $u(t,x)$ – поперечный прогиб, $P(t)$ – продольная сила, действующая на стержень, $f(t,x)$ – интенсивность внешней распределенной нагрузки, $R(t)$ – функция релаксации, ε – некоторый малый параметр.

Предположим что, концы стержня закреплены шарнирно, тогда граничные условия будут в виде:

$$u(x,t)=0, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0 \quad \text{при } x=0;$$

$$u(x,t)=0, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0 \quad \text{при } x=l.$$
(2)

Начальные условия принимаем в виде:

$$u(x,t)=\mathcal{G}_0, \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\mathcal{G}'_0 \quad \text{при } t=0, .$$
(3)

где \mathcal{G}_0 и \mathcal{G}'_0 постоянные.

Решение уравнения (1) будем искать в виде суммы по собственным функциям

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^n \mathcal{G}_k(t)\varphi_k(x).$$
(4)

Применяя процедуру Бубнова-Галеркина к уравнению (1) и переходя к безразмерным величинам

$$\frac{x}{l}; \frac{u}{l}; \frac{t}{\sqrt{\frac{ml}{EI}}}; R(t)\sqrt{\frac{ml^4}{EI}}.$$

Сохраняя для этих величин прежнее обозначения при $f(t,x)=0$; $P(t)=0$, получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\varphi_k^{IV}(x)-\omega_k^n \varphi_k(x)=0, \quad k=1,2,\dots$$
(5)

$$\ddot{\mathcal{G}}_k(t)+\omega_k^4 \left[\mathcal{G}_k(t)-\varepsilon \int_0^t R(t-\tau)\mathcal{G}_k(\tau)d\tau \right]=0.$$
(6)

Решая первое уравнение с соответствующими граничными условиями, находим собственные функции $\{\varphi_k(x)\}$ и собственные значения $\{\omega_k\}$ рассматриваемой краевой задачи. В частности в данном случае имеем граничные условия (2). При этом для существования ненулевого решения находим:

$$\sin \omega l=0; \quad \omega l=\pi k, \quad k=1,2,3,\dots$$

Это уравнение частот. Отсюда находим собственные частоты

$$p_k=\frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

Тогда собственные функции будут иметь вид:

$$\varphi_k(x)=B_k \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Из выше изложенного выходит, что решение поставленной задачи сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (6) при условии

$$\mathcal{G}_k(t) = \mathcal{G}_0, \quad \frac{\partial \mathcal{G}_k(t)}{\partial t} = \mathcal{G}_0^1 \quad \text{при } t = 0. \quad (7)$$

Применяя интегральное преобразование Лапласа по времени t к интегро-дифференциальному уравнению (6) и учитывая условие (7), получаем:

$$\overline{\mathcal{G}_k}(p) = \frac{p \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0^1}{p^2 + \omega^4 - \varepsilon \omega^4 \overline{R}(p)}. \quad (8)$$

Здесь чертой сверху обозначено преобразование Лапласа одноименных функций с параметром p

$$\overline{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dp; \quad \text{Re } p > 0.$$

Здесь при малых значениях времени параметр p является достаточно большим, и в рассматриваемом материале с мгновенной упругостью, изображение ядра релаксации $\overline{R}(p)$ с увеличением p стремится к нулю. С другой стороны у жестких полимеров и композиционных материалов вязкое сопротивление мало по сравнению с упругими. Значит, на основании свойств интегральное преобразование Лапласа в указанных интервалах величина $|\varepsilon \overline{R}(p)|$ будет мала.

Из этих соображений выходит что, неравенство

$$\left| \frac{\varepsilon \omega^4 \overline{R}(p)}{p^2 + \omega^4} \right| < 1$$

будет верным для любого времени t .

Тогда формулу (8) можем представить в следующем виде:

$$\overline{\mathcal{G}_k}(p) = \frac{p \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0^1}{p^2 + \omega^4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon \omega^4 \overline{R}(p)}{p^2 + \omega^4} \right)^n. \quad (9)$$

Применяя процедуру, выполненных в работе [5] получаем:

$$\overline{\mathcal{G}_k}(p) = \frac{p \mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0^1}{a(p) - \varepsilon \omega^4 \overline{b}(p)}; \quad \overline{a}(p) = \left(p + \frac{1}{2} \varepsilon R_s \omega^2 \right)^2 + \omega^4 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon R_c \right)^2;$$

$$\overline{b}(p) = \overline{R}(p) + R_s \frac{p}{\omega^2} + R_c + \frac{\varepsilon}{4} (R_s^2 + R_c^2);$$

$$R_s = \int_0^t R(\tau) \sin \omega^2 \tau d\tau; \quad R_c = \int_0^t R(\tau) \cos \omega^2 \tau d\tau.$$

Аналогично вышеприведенному, при тех же значениях параметра p и следовательно времени t , можно доказать справедливость неравенства

$$\left| \frac{\varepsilon \omega^4 \overline{b}(p)}{\overline{a}(p)} \right| < 1.$$

Тогда для изображения решение получаем в виде:

$$\bar{\mathcal{G}}_k(p) = \frac{p\mathcal{G}_0 + \mathcal{G}_0^1}{a(p)} \left[1 + \varepsilon\omega^4 \frac{\bar{b}(p)}{a(p)} + \varepsilon^2\omega^8 \frac{\bar{b}^2(p)}{a^2(p)} + \varepsilon^3\omega^{12} \frac{\bar{b}^3(p)}{a^3(p)} + \dots \right] \quad (10)$$

Оригинал первого члена этого ряда имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_{k_1}(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon R_s \omega^2 t\right) \times \\ \times \left[\mathcal{G}_0 \cos \omega^2 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right)t + \frac{\mathcal{G}_0^1 - 0,5\varepsilon\omega^2 R_s}{\omega^2(1 - 0,5\varepsilon R_c)} \sin \omega^2 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right)t \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Это первое приближенное решение поставленной задачи.

Из ряда (11) видно, что второе, третье и т.д. приближения в изображениях Лапласа определяется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_{k_2}(p) &= \varepsilon\omega^4 \bar{\mathcal{G}}_{k_1}(p) \cdot \frac{\bar{b}(p)}{a(p)}; \\ \bar{\mathcal{G}}_{k_3}(p) &= \varepsilon\omega^4 \bar{\mathcal{G}}_{k_2}(p) \cdot \frac{\bar{b}(p)}{a(p)}; \\ &\dots\dots\dots \\ \bar{\mathcal{G}}_{k_n}(p) &= \varepsilon\omega^4 \bar{\mathcal{G}}_{k_{n-1}}(p) \cdot \frac{\bar{b}(p)}{a(p)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Нахождение оригинала отношения $\frac{\bar{b}(p)}{a(p)}$ указано в работе [5] и имеет

вид:

$$\begin{aligned} g(t) = L^{-1} \left[\frac{\bar{b}(p)}{a(p)} \right] = R(t) \cdot \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} R_s \omega^2 t\right) \times \frac{\sin \omega^2(1 - 0,5\varepsilon R_c)t}{\omega^2(1 - 0,5\varepsilon R_c)} + \\ + \frac{R_s}{\omega^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon R_s \omega^2 t\right) \times \\ \times \left[\cos \omega^2 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right)t + \frac{d - 0,5\omega^2 \varepsilon R_s}{\omega^2(1 - 0,5\varepsilon R_c)} \sin \omega^2 \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon R_c\right)t \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

где $d = \frac{R_c}{R_s} \omega^2 + \frac{\varepsilon\omega^2}{4R_s} (R_s^2 + R_c^2)$, тогда из (11) и (13) получаем:

$$\mathcal{G}_{k_2}(t) = \varepsilon\omega^4 \int_0^t \mathcal{G}_{k_1}(t) g(t - \tau) d\tau;$$

$$\mathcal{G}_{k_3}(t) = \varepsilon \omega^4 \int_0^t \mathcal{G}_{k_2}(t) g(t-\tau) d\tau; \quad (14)$$

.....

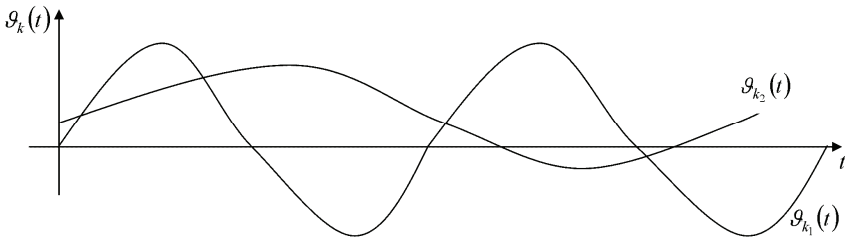
$$\mathcal{G}_{k_n}(t) = \varepsilon \omega^4 \int_0^t \mathcal{G}_{k_{n-1}}(t) g(t-\tau) d\tau.$$

Отсюда решение поставленной задачи определяется в следующем виде:

$$\mathcal{G}_k(t) = \mathcal{G}_{k_1}(t) + \varepsilon \omega^4 \int_0^t [\mathcal{G}_{k_2}(t) + \mathcal{G}_{k_3}(t) + \dots + \mathcal{G}_{k_n}(t)] g(t-\tau) d\tau.$$

Значит, оригиналы следующих приближений определяются в виде свертки функций.

Для вычисления влияния последующих членов ряда на решение рассмотрено ядро Ржаницина и построены графики функций $\mathcal{G}_{k_1}(t)$ и $\mathcal{G}_{k_2}(t)$ для конкретного материала полипропилена при $\omega = 1$; $\mathcal{G}_0 = 0$; $\mathcal{G}_0^1 = 1$ (см. рисунок).



Графики функций $\mathcal{G}_{k_1}(t)$ и $\mathcal{G}_{k_2}(t)$

Список литературы: 1. *Ильсов М.Х.* Нестационарные вязкоупругие волны. – Баку: Изд-во «Азерб. Хава Йоллары», 2011. 2. *Гасанов А.Б.* Реакция механических систем на нестационарные внешние воздействия. – Баку «Элм», 2004. 3. *Ларионов Г.С.* Исследование колебаний релаксирующих систем методом усреднения // *Механика полимеров.* – 1969. – № 5. 4. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М., Наука, 1977. 5. *Ильсов М.Х., Курбанов Н.Т.* К решению интегро-дифференциального уравнения динамических задач линейной вязкоупругости // *ДАН Азерб. ССР.* – 1984. – № 5.

Поступила в редколлегию 27.06.2012