

С. ДАРЯЗАДЕ, аспирант, НТУ «ХПИ»;
Г. И. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»

МИКРО- И МАКРО-КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ОТВЕРСТИЙ В КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИНАХ

Ця стаття присвячена обчисленню мікро- і макронапружень та повного напруження в ортотропних пластинках із отвором при концентрації напружень навколо межі отвору. Макронапруга обчислена за допомогою змішаних функцій змінних і ПК ANSYS. Результати мікронапруг отримані за допомогою ПК ANSYS із застосуванням чисельних граничних умов. Повні значення напруження на арматурі в пластинках із композитних матеріалів були обчислені для тетрагональних і гексагональних структур, заснованих на різних величинах займаного об'єму.

Ключові слова: пружність, концентрація напруження, ортотропна пластинка, отвір.

Данная статья посвящена вычислению микро- и макронапряжений и полного напряжения в ортотропных пластинках с отверстием при концентрации напряжения вокруг границы отверстия. Макронапряжение вычислено с помощью смешанных функций переменных и ПК ANSYS. Результаты микронапряжений получены при помощи ПК ANSYS с применением численных граничных условий. Полные значения напряжений на арматуре в пластинках из композитных материалов были вычислены для тетрагональных и гексагональных структур, основанных на различных величинах занимаемого объема.

Ключевые слова: упругость, концентрация напряжения, ортотропная пластинка, отверстие.

The current paper deals with the calculation of micro and macro stress and total stress in orthotropic planes with circular hole at stress concentration of hole border. Macro stress is calculated by mixed variables functions and ANSYS. By the required results, micro stress is calculated by applying boundary conditions by numerical computations by the aid of ANSYS. Finally, the total stress values on reinforcement in composite planes were calculated for square and hexagonal structures based on various values of volume occupancy.

Keywords: elasticity, stress concentration, orthotropic plane, hole.

Введение

В технике и строительстве во многих случаях применяются детали в виде пластинки с отверстием. Рассматривая развитие механики и металловедения, а также наши потребности в промышленности, можно отметить, что композитные материалы имеют большое значение. Анализ пластинок с отверстием под действием сил необходимо проводить с учетом концентрации напряжений. Пластинки с отверстием рассматривались различными методами, но смешанные функции Каласои – Мухелишвили Н. И. для двумерного случая [9] важны в теории упругости пластинки [6, 11]. Особенностью этого метода является точный математический анализ с согласованными различными решениями. Впервые Лехницкий С.Г. [8] при помощи смешанных функций исследовал проблему ортотропии пластинки с отверстием и провел

ее теоретический анализ, представив некоторые формулы как результаты работы. Савин Г.Н. [12] выполнил некоторые исследования в этом отношении. Гресчук, исследовав изотропный материал и несколько однонаправленных соединений, показал распределение напряжений вокруг отверстия.

В этой статье вычислены полные напряжения вокруг отверстия в ортотропных пластинках, значения концентрации макронапряжений для различных тетрагональных и гексагональных микроструктур для различных значений пропорций объемного компонента. Также исследованы различные внутренние структуры пластинок между матрицей и волокнами и «отношения объемного компонента». В этой статье был применен смешанный метод функций, предложенный Ваниным.

При помощи макронапряжения, оценивающего концентрацию напряжений, мы численно исследовали местоположение концентрации вокруг круглого отверстия, введя граничные условия, изучили геометрию внутренней структуры местоположения концентрации напряжения в пластинке на границе отверстия и получили напряжение на арматуре для различных состояний, а также вычислили полное напряжение.

Определение упругих эффективных постоянных для ортотропных пластинок

Чтобы найти характеристики упругого плоского напряженного состояния ортотропного материала, мы определяем четыре основные константы. Для этого используем упругий эффективный метод констант для смешанных функций. Эти константы определяют, исследуя продольно-поперечное растяжение, продольно-поперечное сжатие, напряжения и вводя некоторые уравнения для элементов констант упругости. Эти уравнения зависят от особенностей материала матрицы-арматуры и внутренней структуры этих двух пластинок [4, 5].

Как следует из уравнения [2]:

$$\begin{aligned}
 G_{12} &= G_m \frac{1-\xi+(1-\xi)\cdot G_m/G_b}{1-\xi+(1+\xi)\cdot G_m/G_b}; \\
 \nu_{21} &= \nu_m - \frac{(\chi_m+1)(\nu_m-\nu_b)\xi}{2-\xi+\chi_m\xi+(1-\xi)(\chi_b-1)\cdot G_m/G_b}; \\
 E_1 &= \xi E_b - (1-\xi)E_m + \frac{8G_m\xi(1-\xi)(\nu_b-\nu_m)}{2-\xi+\chi_m\xi+(1-\xi)(\chi_b-1)\cdot G_m/G_b}; \\
 \frac{1}{E_2} &= \frac{(\nu_{21})^2}{E_1} + \frac{1}{8G} \left[\frac{2(1-\xi)(\chi_m-1)+(\chi_b-1)(\chi_m-1+2\xi)\cdot G_m/G_b}{2-\xi+\chi_m\xi+(1-\xi)(\chi_b-1)\cdot G_m/G_b} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\chi_m(1-\xi)+(1+\xi)\chi_m\cdot G_m/G_b}{\chi_m+\xi+(1-\xi)\cdot G_m/G_b} \right]; \tag{1}
 \end{aligned}$$

Равенство $\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_2}{E_1}$ как $\chi_m = 3 - 4\nu_m$ и $\chi_b = 3 - 4\nu_b$.

В вышеупомянутых уравнениях $E_1, E_2, G, \nu_{12}, \nu_{21}$ – средний модуль композитного материала и E_m, G_m, ν_m и E_b, G_b, ν_b – матрица и коэффициенты волокна, соответственно.

Все переменные для арматуры обозначены индексом «*b*», для матрицы – индексом «*m*». Вычисляем упругие постоянные характеристики сложных материалов, представляем соотношения для объемных составляющих материалов в соединении и геометрической формы пластинки.

Схематические диаграммы тетрагональной и гексагональной плоскости показаны на рис. 1 и 2.

Мы исследуем простую форму и геометрическую форму для однонаправленных композитов арматуры.

Учитывая поперечное сечение, контур детали и повторяемость арматуры, обозначенное векторами $w_2 = w_1 \cdot b \cdot e^{\alpha}$, w_1 , мы можем сказать, что отношение объема составляющих материалов в композите показывает следующая формула [2]:

$$\xi = \frac{\pi \cdot a^2}{w_1^2 \cdot b \cdot \sin \alpha},$$

где a – радиус волокон.

На рис. 1, 2 показаны схематические диаграммы структуры тетрагонального и гексагонального волокна.

В табл. 1 и 2 показано отношение объема для различных расстояний между двумя волокнами в тетрагональной и гексагональной структуры.

Мы вычислили результаты для пластинки, сделанной из композитного материала, используя формулы, данные выше и используя ПК MAPLE. Вычисления были повторены с использованием ПК ANSYS для проверки соответствия результатов.

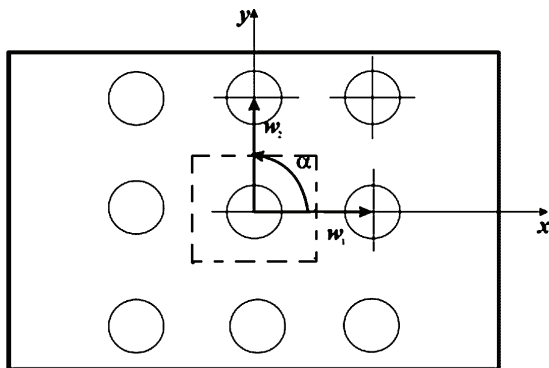


Рисунок 1 – Схематическая диаграмма структуры тетрагонального волокна

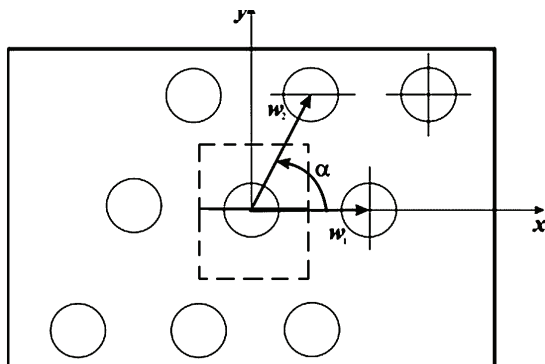


Рисунок 2 – Схематическая диаграмма структуры гексагонального волокна

Таблица 1 – Расстояние между центрами двух волокон и отношения объема в тетрагональной структуре

0.049	0.1225	0.196	0.488	0.78	ξ
$4a$	$3.5a$	$3a$	$2.5a$	$2a$	w_1

Таблица 2 – Отношение между центрами двух волокон и отношения объема в гексагональной структуре

0.0574	0.142	0.227	0.573	0.92	ξ
$4a$	$3.5a$	$3a$	$2.5a$	$2a$	w_1

Принимая ортотропную пластинку со стекловолокном и рассматривая следующие механические особенности выполнены численные вычисления. Матричные механические характеристики имеют тип полимера эпоксидная смола как $E_m = 3500$ МПа, $G_m = 1320$ МПа, $\nu_m = 0.32$ и волокно с характеристиками $E_a = 235000$ МПа, $G_a = 90400$ МПа отношений и Пуассона $\nu_a = 0.3$ [7].

В табл. 3 приведены характеристики ортотропной стеклопластинки, полученные по формулам (1), (2) при $\xi = 0.488$ [3].

Таблица 3 – Механические характеристики ортотропной стеклопластинки

ξ	E_1 , МПа	E_2 , МПа	G , МПа	ν_{21}
0.488	38380	11190	1380	0.31

Распределение напряжений в ортотропной пластинке с круглым отверстием

Мы рассматриваем состояние, в котором напряжение вычисляется вдали от круглого отверстия ортотропной пластинки. Очевидно, что при распределении нормального давления равномерно в границе круга, концентрация напряжения имеет место. Чтобы вычислить концентрацию напряжения, мы ис-

пользовали некоторые соотношения, основанные на полярных координатах (рис. 3).

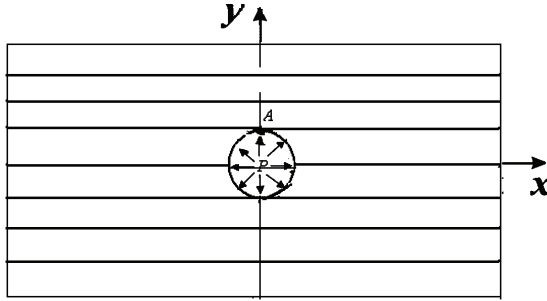


Рисунок 3 – Ортотропная пластинка с отверстием

Координата θ определяется относительно оси x . Для удобства при получении результата мы рассматриваем следующие уравнения:

$$m = \frac{E_1}{G} - 2\nu_1; \quad k = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}; \quad n = \sqrt{2k + m};$$

$$\frac{1}{E_0} = \frac{\sin^4 \theta}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{E_2}, \quad (4)$$

где E_0 – модуль Юнга для тангенциального направления.

На границе отверстия круга при приложении напряжения P на краю пластинки в направлении оси x напряжение на границе отверстия вычислено следующим образом[8]:

$$\sigma_\theta = P \cdot f(\theta), \quad (5)$$

Ψ – угол между осью x на пластинке и главным направлением,

$$f(\theta) = \frac{E_0}{E_1} \left\{ n - k + n(k-1)\cos^2 \theta + [(k+1)^2 - n^2] \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right\},$$

$\sigma(\theta)_{\max}$ – максимальные напряжения на границе отверстия.

В точке A на границе отверстия возникают максимальные напряжения, если напряжение действует вдоль оси x .

Очевидно, что концентрация напряжения в границе на отверстии равна

$$K_{\text{macro}} = \sigma(\theta)_{\max}/P. \quad (6)$$

С тетрагональными и гексагональными формами мы рассматриваем структуру, в которой равномерная напряжение P приложено на краю отверстий ортотропной стекловолоконной пластинки с тетрагональными формами, причем $P = 100$ МПа и $\xi = 0.488$.

В этом случае напряжение, полученное программой MAPLE, показано на рис. 4 в стекловолоконной пластинке с круглым отверстием.

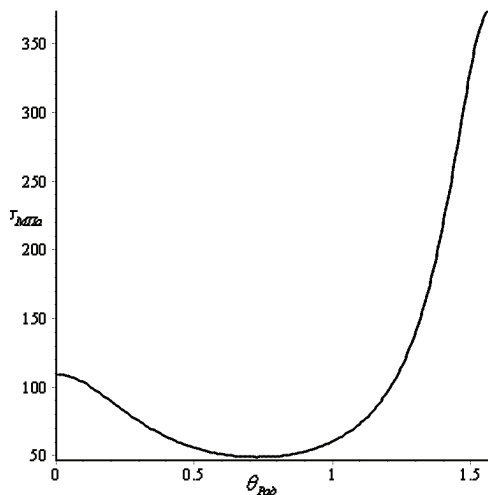


Рисунок 4 – Распределение напряжения вокруг отверстия для стекловолокна тетрагональной структуры с $\xi = 0.488$ при θ от 0 до 90°

Конечное моделирование элемента

В этой части рассмотрим конечноэлементное моделирование и анализ сложной пластины с круглым отверстием для однонаправленных волокон, используя ANSYS. Пластина разбита сеткой с элементами PLANE2 с шестью узлами и двумя степенями свободы в узел в направлениях x и y . Из-за симметрии для задачи рассмотрим только 2 модели, как показано на рис. 5 [1, 10].

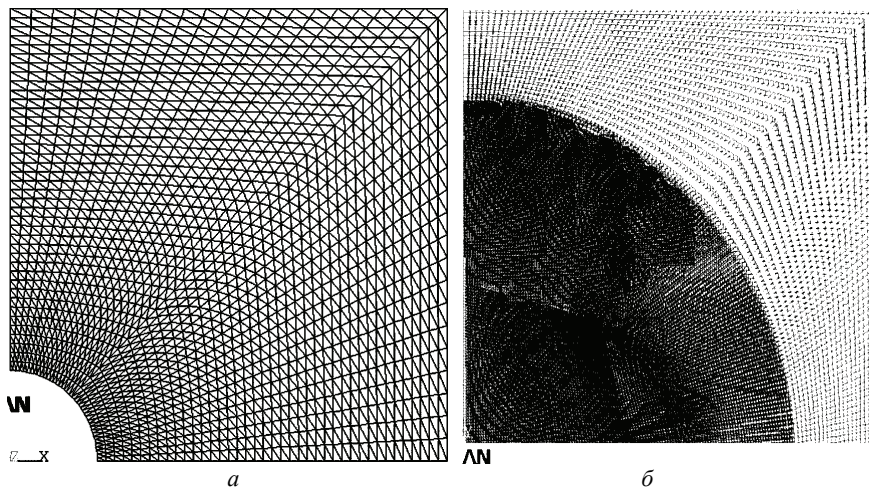


Рисунок 5 – С PLANE2 2 пластины, разбитые на конечные элементы: a – модель 1; b – вложенная модель ячейки

Для этого случая на рис. 6 показана концентрация напряжений в стекловолоконной пластинке и вокруг отверстия, полученная ПК ANSYS, для тетрагональной структуры $\xi = 0.488$.

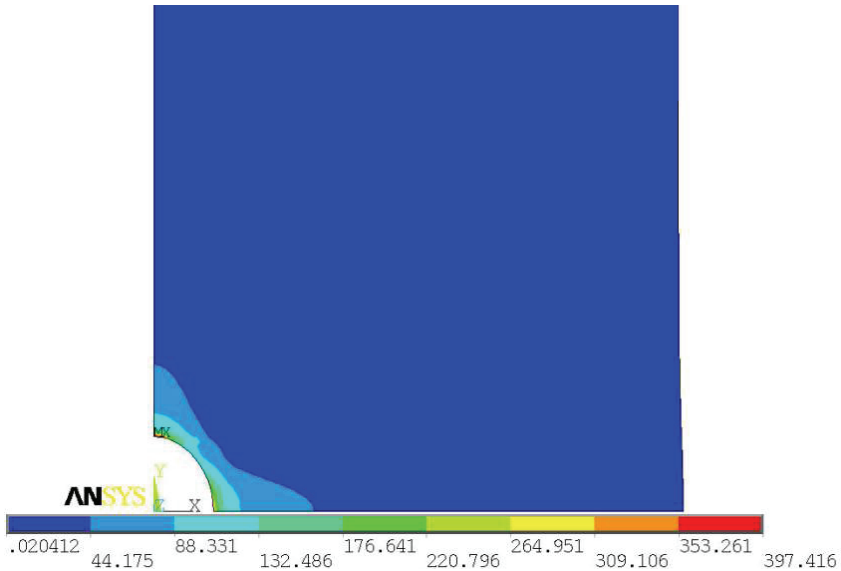


Рисунок 6 – Распределение напряжения для стекловолокна тетрагональной структуры при $\xi = 0.488$

Вычисление микро напряжений

Пластинки с тетрагональными и гексагональными формами состоят из матрицы и арматуры. При вычислении максимальных напряжений необходимо учитывать внутреннюю структуру пластинки. Поскольку это было принято в первой части, к отверстию пластинки приложено напряжение вдоль оси x в точке A (см. рис. 3).

Напряжение было вычислено с учетом поперечного сдвига и рассмотрена геометрия микроструктуры в точке A при различных величинах соотношений объема компонента для тетрагональных и гексагональных форм. Пусть нормальное давление распределено равномерно по краю отверстия и концентрация напряжения создана в точке A .

Пластина разбита на отдельные типичные ячейки. Эти ячейки копируются по толщине пластинки. Секция внутренней структуры ортотропной пластинки, состоящего из матрицы и арматуры с поперечного сдвига в точке A показана для тетрагональных и гексагональных форм в рис. 7.

В этом случае пластинка растянута вдоль осей x , z и сжата вдоль оси y . Поскольку арматура размещена вдоль оси x , это означает, что арматура подвержена продольному растяжению. Мы рассматриваем часть для двух структур в точке A , в этой части действует напряжение $\sigma(\theta)_{\max}$. Очевидно,

что из-за этого напряжения форма арматуры в матрице изменена. Это вычислено ПК ANSYS и применены граничные условия на форме геометрии для тетрагональных и гексагональных структур числовым методом. Рассматривая ответ этой частично внутренней структуре пластинки, линии DE, EC, OC, OD, являются симметрическими. При смещении OC углы увеличивает в оси z, и смещение – ноль вдоль оси y, таким образом, при смещении OD углы уменьшены вдоль оси y, и ее смещение вдоль z установлено и равно нулю (рис. 7).

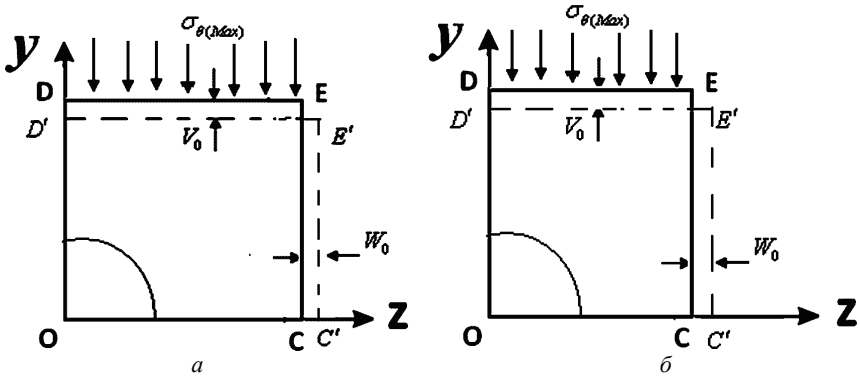


Рисунок 7 – Вложенная модель ячейки, нормальное давление распределено равномерно по краю отверстия: *a* – тетрагональное устройство волокна; *б* – гексагональное

$\sigma_y = -\sigma_{\theta(x)\max}$ и EC углы на оси z со смещением W_0 и является V_0 на оси y как основанным на условии симметрии этой структуры на EC, которое мы имеем $\int \sigma_z dy = 0$ и на DE $\int \sigma_y dz = -\sigma_{\theta(x)\max}$.

Применяя эти условия, максимальное напряжение, приложенное к структуре пластинки из-за $\sigma_{\theta\max}$, достигнуто.

Концентрация напряжения равна

$$K_{\text{micro}} = \sigma_{\max} / \sigma_{\theta\max}. \quad (7)$$

где K_1 – микроконцентрация напряжения

Вычисление суммарного напряжения производим по формуле

$$K = K_{\text{macro}} \cdot K_{\text{micro}} = \frac{\sigma_{\max}}{P}. \quad (8)$$

На рис. 8 показано микронапряжение в стекловолоконной пластинке на арматуре в точке A, где нормальное давление распределено равномерно по краю отверстия.

Табл. 4 и 5 показывают микро-, макроконцентрацию напряжений на границе круга и коэффициенты концентрации на арматуре в местоположении концентрации напряжения вокруг границы тетрагональных и гексагональных форм для нормального давления $P = 100$ МПа, которое действует на границе отверстия.

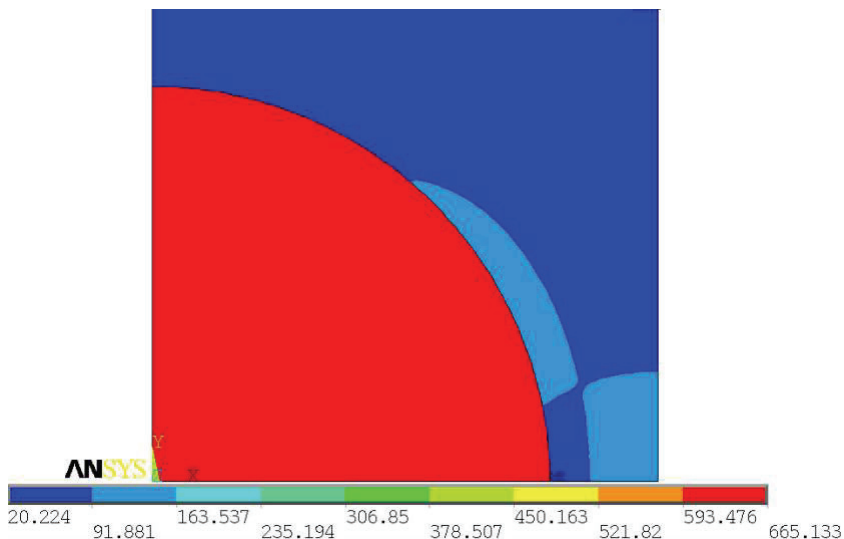


Рисунок 8 – Микронапряжение в стекловолоконной пластинке на арматуре в точке А с $\xi = 0.488$

Таблица 4 – Максимальные напряжения на границе круга для тетрагональной модели

ξ	K_{macro}	K_{micro}	K
0.78	5.9	0.6	4
0.488	3.8	1.75	6.65
0.196	2.3	3.47	8
0.122	1.85	5.18	9.58
0.049	1.4	12.42	17.4

Таблица 5 – Максимальные напряжения на границе круга для гексагональной модели

ξ	K_{macro}	K_{micro}	K
0.92	8.6	0.43	3.7
0.573	4.3	1.24	5.35
0.227	2.4	3.06	7.34
0.142	1.95	4.36	8.5
0.057	1.4	10.46	14.65

Заключение

Основываясь на численных результатах, можно сделать вывод, что с увеличением расстояния между двумя центрами арматурами отношение объема компонента уменьшено и мы можем предположить концентрацию напряжения для другого отношения объема компонента (гексагональный и тетрагональный). Когда подкрепление становится далеким друг от друга, концентрация напряжений уменьшена и ортотропная пластинка приближается по свойствам к изотропной пластинке, и микроконцентрация напряжения

увеличена с сокращением количества арматуры, каждая арматура должна переносить значительное величину напряжения.

Для макронапряжения увеличено напряжение в гексагональной форме, когда к двум арматурам приближенных к тетрагональной, и результаты становятся последовательными постепенно. Однако, в микронапряжении, напряжение в гексагональной структуре меньше чем в тетрагональной структуре.

Полное напряжение, наложенное на арматуру, увеличено с сокращением отношения объема компонента в обеих структурах.

На основании результатов этой статьи, численных результатов и сравнении их, можно предсказать концентрацию напряжения при других величинах отношений объема компонента.

Список литературы: 1. *Басов К. А.* ANSYS. Справочник. – М.: 2005. –635 с. 2. *Ванин Г.А.* Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наукова думка, 1971. – 304 с. 3. *Дариязаде С.* Исследование концентрации напряжений вокруг отверстия в пластинах из однонаправленных композитов // Вестник НТУ «ХПИ». – 2010 – № 37. – С. 68-79. 4. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Соппротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с. 5. *Тарнопольский Ю.М. Розе А.В.* Особенности расчета деталей из армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1969. – 274 с. 6. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с. 7. *Липатов Ю. С., Уманский Э. С.* Композиционные материалы. Справочник. – К.: Наукова думка, 1985. – 592 с. 8. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. –415 с. 9. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с. 10. *Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с. 11. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с. 12. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наукова думка, 1968. – 888 с.

Поступила в редколлегию 20.06.2012