

В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ;
С. В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доцент, НТУ «ХПИ»

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПОДВИЖНОЙ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЕ

Для розрахунку траєкторії руху матеріальної точки і визначення дальності її польоту в повітрі, з урахуванням дії вітру, запропоновано використовувати спеціальну функцію Ламберта та її таблицю.

Ключові слова: динаміка точки, дальність польоту, функція Ламберта.

Для расчета траектории движения материальной точки и определения дальности ее полета в воздухе, с учетом действия ветра, предложено использовать специальную функцию Ламберта и ее таблицу.

Ключевые слова: динамика точки, дальность полета, функция Ламберта.

For the calculation of the trajectory of a material point and distance of its flight in the air, with the action of the wind, it is suggested to use a special feature of Lambert and her table.

Keywords: dynamics point, range, Lambert function.

Введение. В отдельных случаях при постановке и решении задач баллистики материальной точки в воздухе, в отличие от общеизвестных моделей движения, приходится учитывать дополнительное действие ветра [1,2]. При этом наиболее просто выглядят решения, когда аэродинамическая сила пропорциональна относительной скорости движения частицы в подвижной газобразной среде. Если эта сила пропорциональна квадрату относительной скорости, то определение проекций перемещения частицы сводится к квадратурам, которые не выражаются в элементарных функциях [1,3]. Их приходится вычислять на компьютере при заданных значениях параметров. Однако и в рамках простейшей линейной модели аэродинамического действия силы, для определения времени и дальности полета частицы приходится численно решать трансцендентное уравнение вида $z^* = z(t^*)$, в котором t^* – время полета; z^* – аппликата конечной точки на траектории движения. С целью упрощения расчетов здесь ставится задача аналитического преобразования зависимости $z = z(t)$ в зависимость $t = t(z)$ и получения явных выражений $x = x(z)$; $y = y(z)$, для чего привлекается специальная функция Ламберта [4,5]. В итоге расчет времени и дальности полета частицы сводится к вычислению значения указанной специальной функции по таблице или на компьютере в среде «Maple»[6].

Итак, целью данной работы является разработка в рамках линейной модели движения нового способа расчета времени и дальности полета материальной точки в воздухе, с учетом действия ветра.

Постановка задачи и ее аналитическое решение. Как и в работах [1,2], вектор скорости ветра \vec{V} считаем постоянным. Вектор \vec{V} и вектор начальной скорости точки \vec{v}_0 берем не лежащими в одной вертикальной плоскости. В таких случаях траектория движения точки является пространственной линией. Поэтому задачу баллистики рассматриваем в пространственной декартовой системе координат $oxyz$, показанной на рис. 1

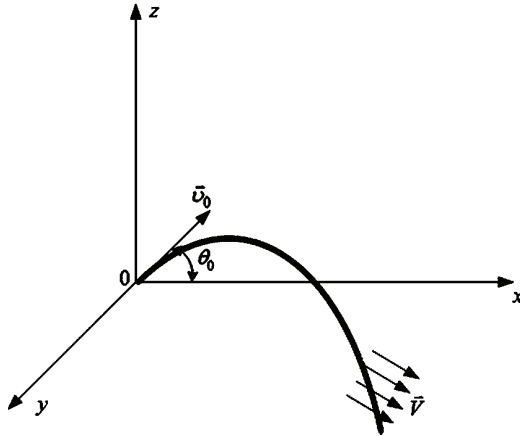


Рисунок 1 – Расчетная схема

Движение точки описываем дифференциальными уравнениями:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = \alpha V_x; \quad \ddot{y} + \alpha \dot{y} = \alpha V_y; \quad \ddot{z} + \alpha \dot{z} = -g + \alpha V_z, \quad (1)$$

в которых x, y, z – координаты материальной точки, как функции времени t ; α – коэффициент аэродинамического взаимодействия частицы с движущимся воздухом; V_x, V_y, V_z – проекция вектора \vec{V} на оси координат; g – ускорение свободного падения; точка над символом означает производную по t .

Начальным условием к (1) принимаем:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_1; \quad \dot{y}(0) = v_2; \quad \dot{z}(0) = v_3, \quad (2)$$

обозначив через v_1, v_2, v_3 – проекции вектора начальной скорости \vec{v}_0 на оси координат.

Решение задачи Коши, представленной выражениями (1), (2), имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= x(t) = V_x t + \frac{1}{\alpha} (v_1 - V_x) (1 - e^{-\alpha t}); \\ y &= y(t) = V_y t + \frac{1}{\alpha} (v_2 - V_y) (1 - e^{-\alpha t}); \\ z &= z(t) = \frac{1}{\alpha} (v_3 + g_1) (1 - e^{-\alpha t}) - g_1 t, \end{aligned} \quad (3)$$

где $g_1 = \frac{g}{\alpha} - V_z$.

Далее рассматриваем такие скорости ветра, при которых $g_1 > 0$, что соответствует нормальным погодным условиям.

Подчеркнем, что в отличие от классических решений, для неподвижной воздушной среды [1,7], при $V_x \neq 0$ и $V_y \neq 0$ в (3) нельзя исключить t с помощью элементарных функций. Кроме того, при $V_x \neq 0$ выражение $x(t)$ не имеет вертикальной асимптоты. Это касается и $y(t)$, когда $V_y \neq 0$. Таким образом, учет действия ветра вносит принципиальное изменение в модель движения материальной точки.

С целью получения аналитических выражений $x = x(z)$ и $y = y(z)$ вводим логарифмическое преобразование

$$t = -\frac{1}{\alpha} \ln \xi, \quad (4)$$

в котором $\xi \in (0; 1]$.

Подставив (4) в третье уравнение в (3), получаем:

$$\ln(B\xi) - B\xi = -\eta, \quad (5)$$

где $B = 1 + \frac{v_3}{g_1}$; $\eta = \eta(z) = -\frac{\alpha z}{g_1} + B - \ln B$.

Уравнение (5) имеет два решения:

$$\xi = \xi_j(z) = -\frac{1}{B} W_j(-\exp(-\eta)), \quad j = \overline{1; 2}. \quad (6)$$

Первое ($j = 1$) выражается через основную вещественную ветвь функции Ламберта $W_1(-\zeta)$, а второе ($j = 2$) – через дополнительную вещественную ветвь $W_2(-\zeta)$ [4].

Как следует из (4), (6), зависимость $t = t(z)$ является двузначной. При $t = t_2$ рассматриваемое z достигается на восходящем участке траектории, а при $t = t_1$ – на нисходящем. Поэтому $t_2 \leq t_1$. Равенство $t_1 = t_2$ выполняется, когда $\eta = 1$. В этом случае:

$$W_1(-\exp(-1)) = W_2(-\exp(-1)) = -1; \quad \xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{B}; \quad t_1 = t_2 = \frac{1}{\alpha} \ln B.$$

Для него на траектории полета имеем точку максимума с координатами:

$$\begin{aligned} x_e &= \frac{V_x}{\alpha} \ln B + \frac{1}{\alpha} (v_1 - V_x) \left(1 - \frac{1}{B} \right); \\ y_e &= \frac{V_y}{\alpha} \ln B + \frac{1}{\alpha} (v_2 - V_y) \left(1 - \frac{1}{B} \right); \\ z_e &= \frac{g_1}{\alpha} (B - 1 - \ln B). \end{aligned}$$

Подставив зависимости (4) и (6) в (3), находим явные выражения $x = x(z)$; $y = y(z)$. Они также являются двузначными и связаны с функцией

Ламберта:

$$\begin{aligned}x(z) &= \frac{v_1 - V_x}{\alpha} (1 - \xi_j) - \frac{V_x}{\alpha} \ln \xi_j; \\y(z) &= \frac{v_2 - V_y}{\alpha} (1 - \xi_j) - \frac{V_y}{\alpha} \ln \xi_j;\end{aligned}\quad (7)$$

$j = \overline{1; 2}$.

В (7) на восходящем участке траектории ($x < x_e$) $\xi_j = \xi_2(z)$, а на нисходящем ($x > x_e$) – $\xi_j = \xi_1(z)$.

При расчете дальности полета материальной точки обычно задают аппликату $z = z_*$ и приходится вычислять значения: $x_* = x(z_*)$ и $y_* = y(z_*)$. Согласно выражениям (7), при $x_* > x_e$, вычисление координат конечной точки траектории сводится к формулам:

$$\begin{aligned}x_* &= \frac{v_1 - V_x}{\alpha} (1 - \xi_*) - \frac{V_x}{\alpha} \ln \xi_*; \\y_* &= \frac{v_2 - V_y}{\alpha} (1 - \xi_*) - \frac{V_y}{\alpha} \ln \xi_*,\end{aligned}$$

в которых $\xi_* = -\frac{1}{B} W_1(-\exp(-\eta_*))$; $\eta_* = -\frac{\alpha z_*}{g_1} + B - \ln B$.

При этом время полета частицы к конечной точке траектории равно

$$t_* = -\frac{1}{\alpha} \ln \xi_*.$$

Для упрощения вычислений x_* , y_* и t_* удобно использовать таблицу значений функции Ламберта на главной ветви в промежутке $\left[-\frac{1}{e}; 0\right]$, которая опубликована в [8, стр. 192].

С помощью изложенной теории выполнены расчеты полета частицы по различным траекториям. В случае пологих траекторий: $v_1 = 15$ м/с; $v_2 = 0$; $v_3 = 5$ м/с; $z_* = -1$ м; $V_z = -1$ м/с; $V_x = \pm 6$ м/с; $V_y = \pm 3$ м/с. Результаты вычислений x_* , y_* , t_* , для этих данных и трех значений α записаны в табл. 1.

При положительных V_x ветер ослабляет сопротивление воздушной среды, а при отрицательных V_x усиливает его. Знак V_y влияет на направление бокового отклонения движущейся точки от вертикальной плоскости, в которой находится вектор начальной скорости \vec{v}_0 . Влияние действия ветра усиливается с увеличением коэффициента α .

Расчет движения точки по непологой траектории выполнен при $v_1 = 12$ м/с; $v_2 = 0$; $v_3 = 10$ м/с и прежних остальных параметрах. Результаты расчета занесены в табл. 2.

С увеличением угла наклона \vec{v}_0 к горизонту увеличились время и даль-

ность полета частицы. Ветер начал оказывать более существенное влияние на параметры движения.

Таблица 1 – Расчетные t_* , x_* , y_* для пологих траекторий

$\alpha, \text{с}^{-1}$	$V_{x_2}, \text{м/с}$	$V_{y_2}, \text{м/с}$	$t_*, \text{с}$	$x_*, \text{м}$	$y_*, \text{м}$
0,2	6	3	1,14	16,01	0,36
0,2	-6	-3	1,14	14,56	-0,36
0,4	6	3	1,11	14,78	0,65
0,4	-6	-3	1,11	12,20	-0,65
0,6	6	3	1,09	13,70	0,86
0,6	-6	-3	1,09	10,24	-0,86

Таблица 2 – Расчетные t_* , x_* , y_* для непологих траекторий

$\alpha, \text{с}^{-1}$	$V_{x_2}, \text{м/с}$	$V_{y_2}, \text{м/с}$	$t_*, \text{с}$	$x_*, \text{м}$	$y_*, \text{м}$
0,2	6	3	1,99	21,77	1,04
0,2	-6	-3	1,99	17,60	-1,04
0,4	6	3	1,87	19,16	1,67
0,4	-6	-3	1,87	12,49	-1,67
0,6	6	3	1,78	17,28	2,07
0,6	-6	-3	1,78	9,01	-2,07

Если не учитывать сопротивления воздуха, то есть положить $\alpha = 0$, то дальность полета частицы в вакууме будет равна

$$l_0 = v_1 \left(\frac{v_3}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_3}{g} \right)^2 - \frac{2z_*}{g}} \right).$$

Она не зависит от действия ветра. Для параметров, соответствующих движению точки по пологой траектории, $l_0 = 17,89$ м, а для непологой – $l_0 = 25,61$ м. Эти значения l_0 больше, чем

$$l = \sqrt{x_*^2 + y_*^2}$$

в табл. 1 и 2.

Однако, при действии попутного ветра возможно и обратное неравенство, то есть $l > l_0$. Подтвердим это расчетами, положив: $V_y = V_z = v_2 = 0$; $V_x = 15$ м/с; $v_1 = 10$ м/с; $v_3 = 5$ м/с; $\alpha = 0,6$ с⁻¹; $z_* = -1$ м. Для указанных исходных данных: $l_0 = 11,91$ м; $y_* = 0$; $l = x_* = 12,95$ м. Под действием попутного горизонтального ветра дальность полета частицы оказалась большей, чем в вакууме. Соответствующая этим исходным данным траектория движения показана на рис. 2 (кривая 3).

Там же нанесена траектория, соответствующая $V_x = -15$ м/с (кривая 1). Действие встречного ветра существенно уменьшило длину l , которая оказалась равной 3,55 м. На траектории появился участок реверсирования движения, где частицы перемещаются в горизонтальном направлении не слева на-

право, а наоборот – справа налево. Таким образом, при действии сильного встречного ветра может проявиться эффект реверсирования движения, который невозможен в неподвижной газовой среде. Как видим, учет действия ветра дает не только количественные, а и качественные изменения в модель движения. Отметим, что ранее эффект реверсирования движения, приводящий к петлеобразным траекториям, рассматривался в [1, с.170].

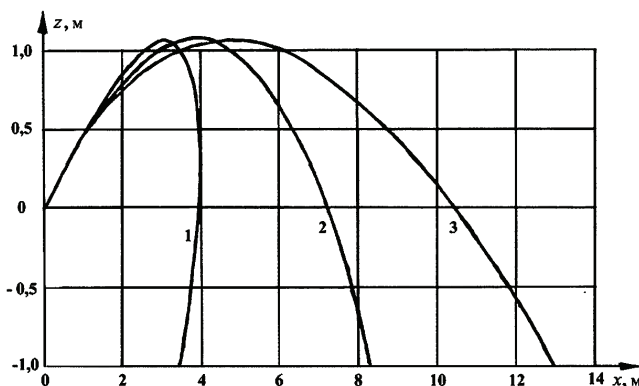


Рисунок 2 – Траектории полета частицы при разных V_x : 1,2,3 – $V_x = -15$; 0; 15 м/с

Выводы. Изложенная линейная теория баллистики материальной точки, с учетом действия ветра, описывает основные закономерности движения. При надлежащем выборе коэффициента аэродинамического взаимодействия, она годится для инженерных расчетов полета материальной точки в газообразной среде с небольшими скоростями движения.

Список литературы: 1. *Ольшанский В.П.* Вопросы внешней баллистики огнетушащих веществ / *В.П. Ольшанский, О.А. Дубовик.* – Х.: Митець, 2005. – 236 с. 2. *Ловейкін В.С.* Визначення швидкості руху частинки твердих мінеральних добрив після сходження з лопатки диска при врахуванні дії вітру / *В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, А.І. Дитюк* // Сучасні проблеми землеробської механіки: Вісник ДДАУ. – Дніпропетровськ: ДДАУ, 2009, – №. 2-09. – С. 186-188. 3. *Зайка П.М.* Свободное движение материальной точки в спокойной изотропной газообразной среде / *П.М. Зайка, В.И. Мельник, А.И. Аникиев* // Вестник Харьковского технического университета «Харьковский политехнический институт»: Динамика и прочность машин, 2001. – Вып. 25. – С. 153-164. 4. *Corless R.M.* On the Lambert W Function / *R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare and other* // *Advances in Computational Math.* v.5. – 1996. – P. 329-359. 5. *Fariel Shafee.* Lambert function and new-extensive form of entropy / *Shafee Fariel* // *IMA Journal of Applied Mathematics.* v.72. – 2007. – P. 785-800. 6. *Дьяконов В.П.* Maple 8 в математике, физике и образовании / *В.П. Дьяконов.* – М.: Солон-Пресс, 2003. – 656 с. 7. *Зайка П.М.* Теорія сільськогосподарських машин. Т.1. Частина 3. Машини для приготування та внесення добрив / *П.М. Зайка.* – Х.: ОКО, 2002. – 342 с. 8. Балістика крапель, які випаровуються при польоті / За ред. *В.П. Ольшанського.* – Х.: ХНТУСГ, 2007. – 304 с.

Поступила в редколлегию 24.12.2012