

А. В. ВОРОПАЙ, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ, Харьков

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С УПРУГОЙ ПОДПОРКОЙ

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-обпертої по контуру та зосередженої пружної підпірки. На пластину діє нестационарне навантаження, що збуджує коливання. Розрахунки зводяться до аналізу інтегральних рівнянь Вольтерра I роду, які розв'язуються чисельно з використанням метода регуляризації А. М. Тихонова.

Ключові слова: нестационарні коливання, механічна система, інтегральні рівняння, метод регуляризації.

Механическая система состоит из прямоугольной пластины средней толщины шарнирно-опертой по контуру и сосредоточенной упругой подпорки. На пластину воздействует нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Расчеты сводятся к анализу интегральных уравнений Вольтерра I рода, которые решаются численно с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова.

Ключевые слова: нестационарные колебания, механическая система, интегральные уравнения, метода регуляризации.

Mechanical system consists of hingedly supported medium-thickness rectangular plate with concentrated elastic support. The non-stationary concentrated load, which initiates vibration, is acting on the plate. The problem is reduced to the first-kind Volterra integral equations, which are solved numerically with using of Tikhonov's regularization method.

Keywords: non-stationary vibration, mechanical system, integral equations, regularization method.

Введение. Одним из способов «смягчения» импульсных и ударных нагрузок на пластинчатые элементы конструкций является использование различных упругих или вязкоупругих устройств (дополнительный подпорок). Самым простым и дешевым видом дополнительных упругих подпорок являются пружины. Схема установки подпорок в виде винтовых пружин легко реализуется на практике и при известном месте нагружения можно устанавливать дополнительную опору непосредственно под местом нагружения, тем самым значительно снижая перемещения в защищаемом элементе конструкции.

Как правило, моделирование наличия дополнительных опор осуществляется в одно- или многомассовых системах с конечным числом степеней свободы. Пластинчатые элементы конструкций, контактирующие с пружинами, зачастую рассматриваются как недеформируемые тела. Чрезвычайно актуальна разработка простой и удобной математической модели для пластинчатых элементов конструкции в рамках механики деформируемого твердого тела.

Отметим, что к настоящему времени хорошо исследованы колебания

многопролетных балок с одной или несколькими дополнительными упругими опорами. Упомянем некоторые работы, связанные с подпорками для упруго деформируемых элементов конструкций в виде балок. Например, в работе [1] рассмотрены многопролетные балки на упругих опорах при подвижной нагрузке, задачи решаются с использованием метода Ньютона и итерационных схем для определения прогиба балки с учетом жесткости дополнительных опор.

В работе [2] представлены решения прямой и обратной задачи для балок с дополнительными опорами, причем влияние опор моделируется при помощи неизвестных сосредоточенных сил.

В настоящей работе рассматриваются нестационарные колебания прямоугольной пластины с упругой подпоркой. Для решения задачи удобно использовать подход, аналогичный изложенному в [2], который заключается в следующем: воздействие дополнительной опоры на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы, приложенной к пластине в месте установки подпорки. Тогда задача сводится к идентификации этой неизвестной нагрузки, которая определяется на базе теории интегральных уравнений Вольтерра, что позволяет получить аналитико-численное решение без использования итерационных схем.

Постановка задачи. Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и сосредоточенной упругой подпорки, контактирующего с пластиной в некоторой точке (рис. 1). Считается, что пружина установлена ортогонально срединной плоскости пластины и шарнирно соединена с ее нижней лицевой поверхностью, жесткость пружины постоянна, а сила сопротивления прямо пропорциональна перемещению:

$$R(t) = c \cdot w_C(x_C, y_C, t),$$

где c – коэффициент жесткости, Н/м.

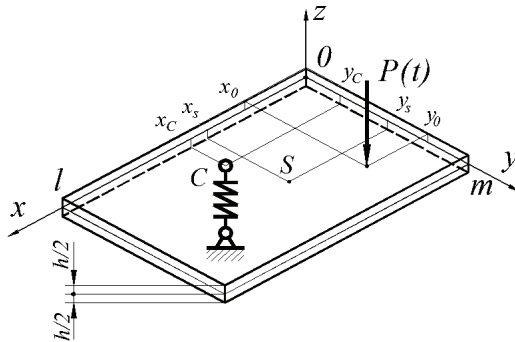


Рисунок 1 – Схема нагружения

На пластину в некоторой точке действует поперечная импульсная нагрузка $P(t)$, вызывающая нестационарные колебания пластины с подпоркой. Требуется определить компоненты перемещения во времени точек пластины (прогибы и углы поворота нормали).

При решении задачи предполагалось, что координаты точек приложения нагрузки и координаты установки дополнительной опоры произвольны (любые точки, принадлежащие пластине и не лежащие на ее границе). Также считалась известной величина коэффициента жесткости подпорки.

Решение задачи. В рамках теории пластин С. П. Тимошенко система дифференциальных уравнений [3], которая с учетом соответствующих начальных и граничных условий определяет решение, описывающее нестационарные деформационные процессы в пластине с подпоркой, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} G'h(\nabla^2 w + \psi_{xy}) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(x, y, t) + R(t)\delta(x - x_C)\delta(y - y_C); \\ D\nabla^2 \psi_{xy} - G'h(\psi_{xy} + \nabla^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \psi_{xy}}{\partial t^2}; \\ \frac{D}{2}[(1 - \nu)\nabla^2 \varphi_{xy} + (1 + \nu)\nabla_1^2 \psi_{xy}] - G'h(\varphi_{xy} + \nabla_1^2 w) = \rho \cdot I \frac{\partial^2 \varphi_{xy}}{\partial t^2}; \\ w(x_C, y_C, t) = R(t)/c, \end{array} \right. \quad (1)$$

где h – толщина пластины; $G' = k'G$; k' – коэффициент сдвига; $I = h^3/12$; w – прогиб срединной плоскости пластины; ψ_x, ψ_y – углы поворота; ρ, E, ν – упругие постоянные материала пластины; t – время, $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$;

$$\psi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \varphi_{xy} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Укажем, что $P(x, y, t)$ и $R(t)$ – возмущающая нагрузка (сосредоточенная или распределенная) и реакция взаимодействия между пластиной и упругой подпоркой соответственно.

Методика решения задач для прямоугольных пластин, на которые действует система нескольких независимых нестационарных нагрузок, описана, например, в [4]. В результате решения системы дифференциальных уравнений (1) для прогиба пластины получается следующее аналитическое выражение:

$$w(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

где $K_i(x, y, t)$ – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток):

$$K_i^W(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t.$$

Аналитические выражения для определения собственных частот имеют вид:

$$\omega_{1kn} = \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(a+d)+b) + \Delta_{kn}]}; \quad \omega_{2kn} = \sqrt{0.5[(\lambda_{kn}^2(a+d)+b) - \Delta_{kn}]}. \quad (1)$$

В приведенных соотношениях использованы следующие обозначения:

$$a = \frac{G'}{\rho}; \quad b = \frac{G' h}{\rho \cdot J}; \quad d = \frac{D}{\rho \cdot J}; \quad \lambda_k^* = \pi \frac{k}{l}; \quad \mu_n^* = \pi \frac{n}{m}; \quad \lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right);$$

$$C_{ikn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \frac{1}{\rho \cdot h} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_i}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_i}{m}; \quad \Delta_{kn} = \sqrt{(\lambda_{kn}^2(a+d)+b)^2 - 4 \cdot a \cdot d \cdot \lambda_{kn}^4};$$

$$\Omega_{1kn} = \omega_{1kn} - \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{1kn}}; \quad \Omega_{2kn} = -\omega_{2kn} + \frac{d \cdot \lambda_{kn}^2 + b}{\omega_{2kn}}.$$

Проблема заключается в идентификации закона изменения во времени неизвестной реакции $R(t)$, для определения которой выражение (2) для точки крепления подпорки к пластине (x_C, y_C) может быть сведено к интегральному уравнению Вольтерра II рода относительно неизвестной $R(\tau)$:

$$c \int_0^t P(\tau) K_P(t-\tau) d\tau = c \int_0^t R(\tau) K_R(t-\tau) d\tau + R(t). \quad (3)$$

Решение уравнения (3) осуществляется с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова [5]. В результате решения находится сила взаимодействия между подпоркой и пластиной $R(t)$, что позволяет определять компоненты перемещения во времени во всех точках пластины.

Результаты расчетов. При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат. Численные расчеты производились при следующих значениях: $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; $\nu = 0,3$; $E = 2,07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $h = 0,04 \text{ м}$; $l = 0,6 \text{ м}$, $m = 0,4 \text{ м}$. Координаты точки приложения возмущающей нагрузки: $x_0 = 0,3 \text{ м}$, $y_0 = 0,2 \text{ м}$. Координаты точки крепления упругой подпорки к пластине: $x_C = 0,3 \text{ м}$, $y_C = 0,2 \text{ м}$. (Для наглядности рассмотрен случай, когда нестационарная сила действует в центре пластины, а упругая подпорка установлена в том же месте под пластиной).

На рис. 2, а показано изменение во времени возмущающей нагрузки $P(t)$ (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения интегрального уравнения реакция между пластиной и подпоркой $R(t)$. На рис. 2, б показаны графики идентифицированной реакции $R(t)$ при различных значениях параметра регуляризации α . При относительно больших значениях $\alpha = 10^{-17} > \alpha_{opt}$ полученные кривые не совсем точно описывают зависимость $R(t)$ во времени. При уменьшении параметра регуляризации и

приближении его к оптимальным для данного функционала значениям $\alpha \rightarrow \alpha_{opt} = 10^{-21}$ вид кривых практически не изменяется (они полностью совпадают), при уменьшении параметра регуляризации $\alpha = 10^{-25} < \alpha_{opt}$ влияния «сглаживающей» части функционала Тихонова уменьшается, и на графике $R(t)$ начинают появляться осцилляции. При дальнейшем уменьшении параметра регуляризации $\alpha_{opt} \gg \alpha \rightarrow 0$ решение интегрального уравнения перестает быть устойчивым, а график $R(t)$ становится не физичным. Заметим, что оптимальные значения параметра регуляризации определялись методом невязки [5].

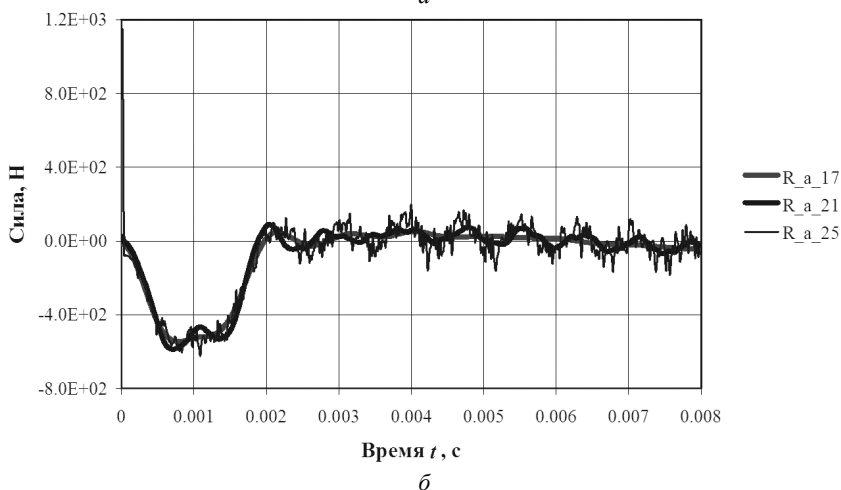
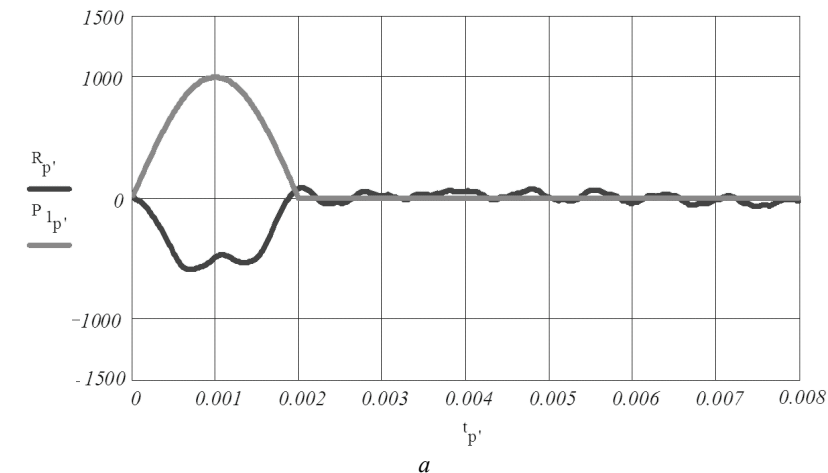


Рисунок 2 – Возмущающая нагрузка и реакция упругой подпорки:
 а – изменение во времени $P(t)$ и $R(t)$, б: $P(t)$ при различных значениях α

На рис. 3 приведены кривые изменения прогиба в центре пластины без упругой подпорки – кривая 1; кривая 2 демонстрирует влияние самой подпорки; кривая 3 – суммарная кривая, описывающая прогиб пластины с подпоркой при нагружении возмущающей нагрузкой.

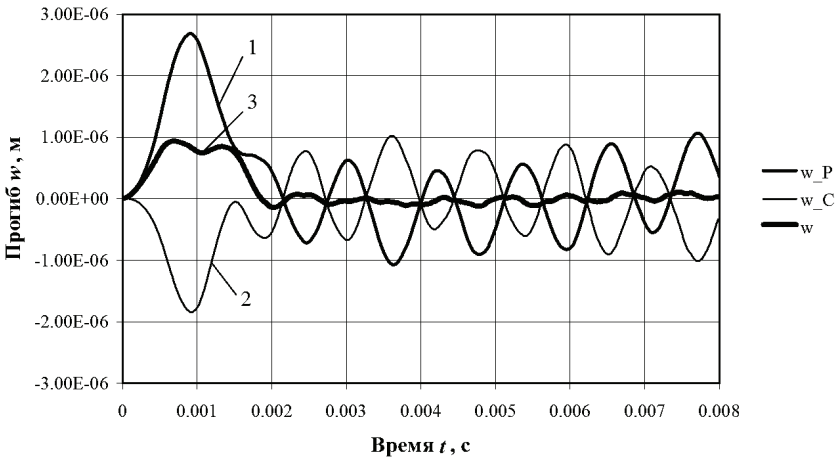


Рисунок 3 – Влияние реакции подпорки на прогиб пластины

На рис. 4, *а* показано влияние жесткости упругой подпорки на прогиб пластины в точке нагружения, а на рис. 4, *б* показано изменение возмущающей нагрузки $P(t)$ – кривая 1 и реакции $R(t)$ между пластиной и пружиной при различных значениях коэффициента жесткости пружины c – кривые 2-6.

На рис. 4, *а* кривая 1 показывает изменение прогиба без подпорки (или $c = 0$); при значении коэффициента жесткости $c \leq 100$ Н/м прогибы практически не отличаются, при $c = 100$ Н/м (кривая 2) видно незначительное снижение амплитуды и отставание по фазе; при $c = 1000$ Н/м (кривая 3) наблюдается заметное снижение амплитуды (около 10 %) и запаздывание; при $c = 10^4$ Н/м (кривая 4) происходит «сильное» влияние подпорки на колебания пластины, (графики, приведенные на рис. 2-3 получены при значении коэффициента жесткости $c = 10^4$). При дальнейшем повышении жесткости подпорки $c = 10^5$ Н/м (кривая 5) ее влияние превышает влияние пластины, а уже при жесткости $c = 10^6$ Н/м (кривая 6) прогиб пластины становится ниже на несколько порядков (подпорка становится «слишком» жесткой), а ее реакция практически равна возмущающей нагрузке (кривая 6 на рис. 4, *б*).

Укажем, что описанные численные значения справедливы только для рассмотренного случая, и в каждом конкретном случае они будут зависеть от конкретных геометрических и механических параметров системы, однако характер влияния коэффициента жесткости упругой подпорки во всех случаях будет аналогичен описанному.

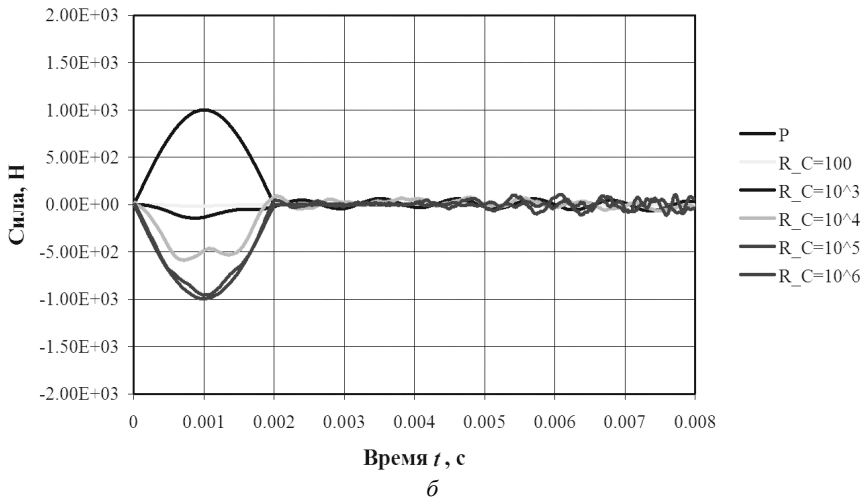
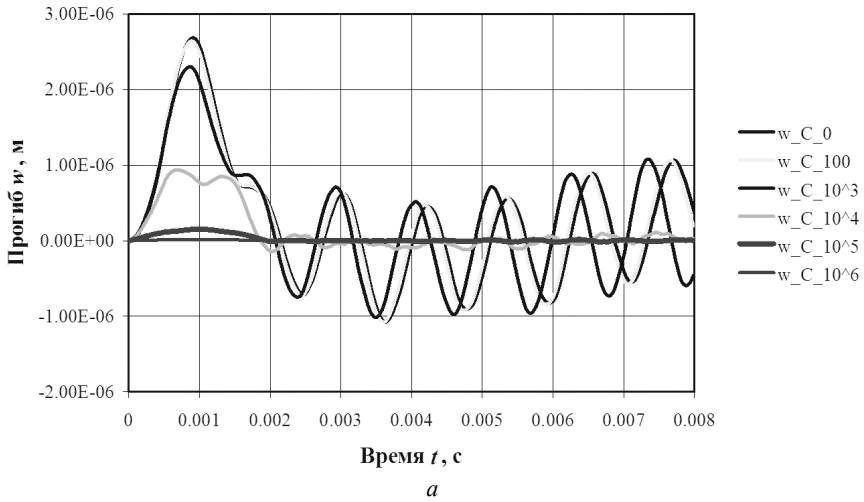


Рисунок 4 – Влияние жесткости упругой подпорки:
a – изменение прогиба w при различных c ; *b* – изменение реакции R при различных c

Выводы. В настоящей работе описан новый подход, при котором воздействие дополнительной опоры на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы, определяемой из решения интегрального уравнения Вольтерра. На основе предложенного подхода при моделировании нестационарного деформирования пластинчатых элементов конструкций с дополнительными подпорками имеется возможность получать устойчивые аналитико-численные решения задач механики деформируемого твердого тела без использования итерационных схем. Возможность идентификации реакции

между пластиной и дополнительной подпоркой позволяет облегчить выбор жесткости этой подпорки для «смягчения» импульсных и ударных нагрузок в конкретных механических системах.

Список литературы: 1. *Кохманюк С. С., Филиппов А. П.* Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке // *Строительная механика и расчет сооружений.* – № 6. – 1965. 2. *Янютин Є. Г., Гнатенко Г. О., Гришакін В. Т.* Розв’язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спиранням // *Львів: Машинознавство.* – 2007. – № 8. – С. 18-23. 3. *Григолоук Э. И., Селезов И. Т.* Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с. 4. *Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В.* Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Х.: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с. 5. *Тихонов А. Н., Гончаровский А. В.* и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука, 1983. – 200 с.

Поступила в редколлегию 20.01.2012