

А. Н. ШУПИКОВ, д-р техн. наук, профессор, зав. отд. прочности и оптимизации конструкций, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
Л. А. ЛИТВИНОВ, д-р техн. наук, профессор, зав. отд. монокристаллов корунда, Институт монокристаллов НАН Украины, Харьков;
С. В. УГРИМОВ, канд. техн. наук, докторант, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
С. Ю. СОТРИХИН, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков;
В. Г. ЯРЕЩЕНКО, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В САФИРОВЫХ СТРЕЖНЯХ

Проведено теоретическое и экспериментальное исследование процесса распространения волн в сапфировых стержнях с различной ориентацией кристаллографических осей. Получены теоретические значения скорости распространения волн Релея при низкоскоростном продольном ударе. Проведено их сравнение с теоретическими значениями, рассчитанными по классической стержневой модели, а также с экспериментальными данными, полученными методом динамического широкополосного тензометрирования. Установлено хорошее совпадение результатов теоретического расчета с данными экспериментальных исследований.

Ключевые слова: теория упругости, распространение волн, волна Релея, удар, анизотропия, сапфир.

Введение. Исследование процесса распространения волн в анизотропных телах является сложной математической задачей [1]. Законы распространения волн в телах выводятся из общих трехмерных уравнений движения упругой среды. В неограниченной анизотропной среде возмущение распространяется не сферическим фронтом, как в изотропной среде, а некоторой поверхностью. Задачу нахождения скорости волны в анизотропной среде решают, как правило, упрощенно путем рассмотрения движения плоских волн и сведением задачи к решению уравнения Кристоффеля [1, 2].

Анизотропия механических свойств сапфира связана с кристаллической структурой и ее типом симметрии [3, 4]. Известно, что по виду симметрии кристаллы сапфира относятся к кристаллам с гексагональной сингонией [3]. Они обладают одной осью симметрии L_6 [1, 3, 5].

Сапфир обладает комплексом уникальных физико-механических и химических свойств [3]. Он имеет высокую механическую прочность и твердость. Твердость сапфира по шкале Мооса составляет 9 единиц. При этом сапфир является оптически прозрачным материалом, способным работать в

условиях воздействия высоких температур и радиации. Наличие таких свойств способствовало широкому применению сапфира в технике, в том числе, как элемента прозрачной брони.

Изделия из лейкосапфира обладают анизотропными свойствами. В силу этого упругие свойства, прочность, а также скорость распространения волн в сапфире зависят от направления. Изготавливая изделия из сапфира необходимо учитывать это различие механических свойств и за счет определенного выбора осей можно повысить общую прочность изделия.

Состояние научной проблемы. Несмотря на широкое применение сапфира в технике [3], его механические свойства, особенно для случая ударных нагрузений, все еще недостаточно изучены [3, 4, 6-10]. В силу сложности математического моделирования поведения сапфира при ударном нагружении, основная часть работ в этой области носит экспериментальный характер. Так, в работе [4] представлены результаты экспериментальных исследований поведения сапфира при сжатии в различных кристаллографических направлениях. Экспериментальные значения скорости распространения волн в сапфировых стержнях с тремя различными ориентациями кристаллографических осей приведены в работе [10]. В этой же работе приведены теоретические значения для скорости распространения волн в сапфировом стержне, который рассматривается по классической стержневой модели.

Цель работы. Целью работы было исследование скорости распространения волн в сапфировых стержнях с различной ориентацией кристаллографических осей на основе модели Релея и экспериментальных методов.

Постановка теоретической задачи. Теоретическое исследование процессов деформирования конструкций из сапфира базируется на уравнениях теории упругости анизотропных тел [11] и модели Релея [2]. Модель Релея базируется на гипотезе плоских сечений. Однако, в отличие от классической стержневой модели, она принимает во внимание не только инерцию продольного движения, но и инерцию поперечного движения элементов стержня [2].

Прежде всего, рассмотрим кристаллографическую структуру сапфира поскольку механические свойства стержней из сапфира зависят от ориентирования кристаллов. Кристаллографическая диаграмма сапфира приведена на рис. 1, а положение кристаллографических плоскостей, представляющих для нас интерес, показано на рис. 2 [2].

Процесс деформирования стержней из сапфира при ударном нагружении будем рассматривать в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. При этом с кристаллографическими осями сапфира свяжем жестко систему координат $Ox'_1x'_2x'_3$, ось Ox'_3 которой направим вдоль оси L_6 (рис. 3).

Деформации сапфира предполагаются малыми и описываются линейными соотношениями

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,k} + u_{k,i}), \quad i, k = \overline{1, 3}. \quad (1)$$

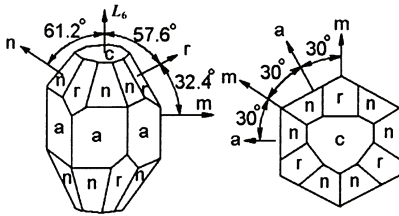


Рисунок 1 – Кристаллографическая диаграмма

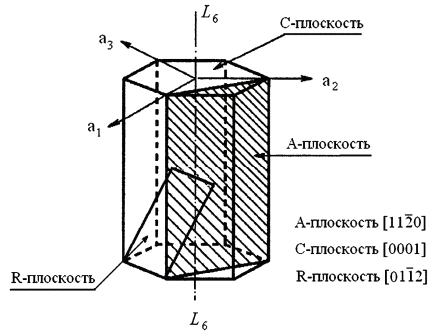


Рисунок 2 – Кристаллографические плоскости

Здесь u_i – перемещения точки сапфира в направлении оси x_i .

Связь между напряжениями p_{ik} и деформациями ε_{im} (2) для тела общего вида анизотропии [11, 12] имеет вид

$$p_{ik} = C_{iklm} \varepsilon_{lm}, \quad (2)$$

где C_{iklm} – тензор модулей упругости 4 ранга.

Выражение (2) можно представить в более компактном виде [11, 12]:

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ p_{33} \\ p_{23} \\ p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где A_{ij} – сокращенное обозначение тензора упругости, введенное Фохтом [12].

Для гексагональной сингонии, характерной для сапфира, число независимых упругих постоянных в выражении (3) равно 5 [1, 11].

Для случая С-ориентации, когда оси системы координат $Ox'_1x'_2x'_3$ параллельны осям $Ox_1x_2x_3$ (рис. 3, а), зависимость между напряжениями и деформациями (3) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ p_{33} \\ p_{23} \\ p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A_{11} - A_{12}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

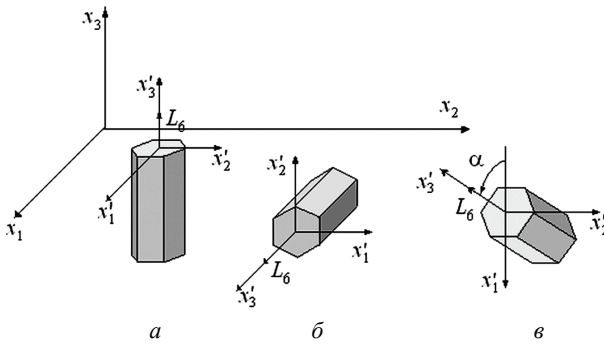


Рисунок 3 – Системы координат и расположение кристаллографических осей сапфира: *а* – сапфировый стержень С-ориентации, *б* – сапфировый стержень А-ориентации, *в* – сапфировый стержень, наклоненный под углом α к оси Ox_3 (вращение вокруг оси Ox_2)

Значения упругих констант сапфира: $A_{11} = 496$ ГПа, $A_{12} = 164$ ГПа, $A_{13} = 115$ ГПа, $A_{33} = 498$ ГПа, $A_{44} = 148$ ГПа [3].

В системе $Ox'_1 x'_2 x'_3$, жестко связанной с кристаллографическими осями сапфира, тензор модулей упругости всегда имеет вид, приведенный в формуле (4). Для системы координат $Ox_1 x_2 x_3$ компоненты тензора модулей упругости необходимо пересчитывать, учитывая направления кристаллографических осей сапфира относительно системы $Ox_1 x_2 x_3$, по формуле преобразования тензора при повороте системы координат [12]

$$C_{iklm} = \alpha_{ip'} \alpha_{kq'} \alpha_{lr'} \alpha_{ms'} C_{p'q'r's'} \quad (5)$$

где $\alpha_{ip'} = \cos(x_i \cdot x'_p)$ – направляющие косинусы.

Используя формулу (3), для случая А-ориентации сапфира (рис. 3, б) получим следующую зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{22} \\ p_{33} \\ p_{23} \\ p_{13} \\ p_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{33} & A_{13} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A_{11} - A_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}.$$

Плотность сапфира равна 3,97-3,99 г/см³ [3].

Рассмотрим цилиндрический стержень из однородного материала с произвольной формой анизотропии. Один конец стержня жестко закреплен в опоре, а на второй действуют усилия, равнодействующая P которых параллельна оси стержня. Введем начало системы координат в центре тяжести сечения закрепленного конца стержня, ось Ox_3 направим вдоль стержня, а на

правление осей Ox_1, Ox_2 выбираем произвольно (рис. 4).

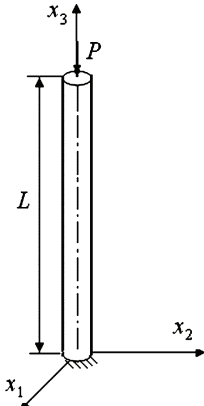


Рисунок 4 – Сапфировый стержень

Если ввести предположение, что усилия на концах стержня распределены равномерно, то граничное условие на незакрепленном конце стержня имеет вид

$$P_{33} = \frac{P}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения стержня.

Если длина стержня значительно больше характерного размера поперечного сечения, а боковые поверхности свободны от нагрузок, то можно считать, что напряжения вдоль стержня удовлетворяют условиям [11]

$$P_{11} = P_{22} = P_{12} = P_{13} = P_{23} = 0, \quad (6)$$

Для рассматриваемого случая продольного нагружения стержня, учитывая в выражении (3) зависимости (6), получим, что деформации стержня должны удовлетворять условиям

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{43} \\ A_{53} \\ A_{63} \end{pmatrix} \varepsilon_{33}; \quad (7)$$

$$P_{33} = A_{31}\varepsilon_{11} + A_{32}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33} + A_{34}\varepsilon_{23} + A_{35}\varepsilon_{13} + A_{36}\varepsilon_{12}. \quad (8)$$

Решение системы (7) может быть представлено в виде

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{pmatrix} \cdot \varepsilon_{33}, \quad (9)$$

где ξ_i – константы.

В классической стержневой модели предполагается, что деформации не зависят от плоскостных координат x_1, x_2 [10]. В модели Релея предполагается, что только деформации ε_{33} не зависят от координат x_1, x_2 [2]. Тогда, учитывая соотношения (1) и (9), получим выражения для плоскостных перемещений

$$u_1 = \int \varepsilon_{11} dx_1 = \int \xi_1 \varepsilon_{33} dx_1 = \xi_1 \varepsilon_{33} x_1 = \xi_1 u_{3,3} x_1;$$

$$u_2 = \int \varepsilon_{22} dx_2 = \int \xi_2 \varepsilon_{33} dx_2 = \xi_2 \varepsilon_{33} x_2 = \xi_2 u_{3,3} x_2, \quad (10)$$

Напряжения p_{33} (8), учитывая (10), можно представить в виде

$$p_{33} = \varepsilon_{33} (A_{31} \xi_1 + A_{32} \xi_2 + A_{33} + A_{34} \xi_4 + A_{35} \xi_5 + A_{36} \xi_6) = \phi \varepsilon_{33}, \quad (11)$$

где $\phi = A_{31} \xi_1 + A_{32} \xi_2 + A_{33} + A_{34} \xi_4 + A_{35} \xi_5 + A_{36} \xi_6$.

Рассмотрим сапфировые стержни А- и С-ориентации [3, 10]. При С-ориентации ось L_6 параллельна оси Ox_3 , при А-ориентации – ось L_6 параллельна оси Ox_1 , а нормаль к плоскости А параллельна оси Ox_3 (рис. 1). Для этих случаев можно получить простые аналитические выражения для параметра ϕ , входящего в формулу (11):

$$\text{при С-ориентации} - \phi = A_{33} - \frac{2A_{13}^2}{A_{11} + A_{12}}; \quad (12)$$

$$\text{при А-ориентации} - \phi = A_{11} + \frac{2A_{12}A_{13}^2 - A_{11}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2}{A_{11}A_{33} + A_{13}^2}. \quad (13)$$

Значение параметра ϕ для более сложных случаев ориентации кристаллографических осей проще всего получить численно, используя формулы преобразования тензора упругости при повороте осей (2).

Уравнения движения. Уравнения движения сапфирового стержня, а также граничные условия выводятся с помощью вариационного принципа Остроградского-Гамильтона [10, 13]

$$\int_0^t \int_0^L \int_S (\delta \Pi - \delta K + \delta' F) dS dx_3 dt = 0. \quad (14)$$

Здесь Π – потенциальная энергия деформаций, K – кинетическая энергия, $\delta' F$ – элементарная работа внешних сил.

Учитывая введенные предположения (6), потенциальная энергия деформаций стержня может быть представлена следующим образом

$$\Pi = \frac{1}{2} p_{33} \varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \varepsilon_{33}^2 \cdot \phi. \quad (15)$$

Кинетическая энергия деформаций стержня с учетом зависимостей (10) имеет вид

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_1)^2 + (\dot{u}_2)^2 + (\dot{u}_3)^2 = \frac{1}{2} \rho ((\xi_1 \dot{\varepsilon}_{33} x_1)^2 + (\xi_2 \dot{\varepsilon}_{33} x_2)^2 + (\dot{u}_3)^2) = \\ &= \frac{1}{2} \rho ((\xi_1 \dot{u}_{3,3} x_1)^2 + (\xi_2 \dot{u}_{3,3} x_2)^2 + (\dot{u}_3)^2), \end{aligned} \quad (16)$$

где ρ – плотность сапфирового стержня, $u_3 = u_3(x_3, t)$ – перемещения точек стержня вдоль его оси. Здесь точками обозначены производные по времени.

Элементарная работа внешних сил для исследуемого случая имеет вид

$$\delta' F = P \delta u_3. \quad (17)$$

В результате подстановки вариаций потенциальной (15), кинетической энергий (16), а также элементарной работы внешних сил (17) в уравнение (14) было получено уравнение движения стержня

$$\phi \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\rho R^2}{4} (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2) \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} = P(t). \quad (18)$$

Третье слагаемое уравнения (18) описывает влияние инерции поперечного движения стержня. Для изотропного случая это уравнения было получено Релеем.

На концах стержня должны быть заданы значения перемещений u_3 или продольных деформаций $u_{3,3}$.

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : u_3 = u_3(0, t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{\partial u_3(0, t)}{\partial x_3}; \\ x_3 = L : u_3 = u_3(L, t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= \frac{\partial u_3(L, T)}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Кроме того, уравнения движения необходимо дополнить начальными условиями

$$t = 0 : u_3(x_3, 0) = u_{30}(x_3), \quad \dot{u}_3(x_3, 0) = \dot{u}_{30}(x_3).$$

Теоретическое значение скорости волны деформаций. Решение уравнения (18) будем искать в виде суперпозиции гармонических волн, идущих в прямом и обратном направлениях

$$u = \exp(i \frac{2\pi}{L}(Vt - x_3)) + \exp(i \frac{2\pi}{L}(x_3 - Vt)), \quad (19)$$

где V – скорость распространения волн.

Подставляя выражение для прямой волны (19) в уравнение (18), получим значение скорости распространения волны Релея

$$V = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 \cdot (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2)}, \quad (20)$$

где V_0 – скорость распространения волны деформаций по классической стержневой модели (без учета поперечной инерции), которая равна [10]

$$V_0 = \sqrt{\phi/\rho}. \quad (21)$$

Из формулы (20) видно, что волна Релея зависит от линейных размеров стержня и распространяется немного медленнее по сравнению со скоростью, полученной по классической стержневой модели, которая не зависит от линейных размеров.

Скорость волн деформаций по классической стержневой модели для сапфировых стержней А- и С-ориентации может быть определена посредством формул (12), (13) и (21):

$$\text{С-ориентация} \quad - \quad V_0 = \sqrt{\frac{\phi}{\rho}} = \sqrt{\frac{A_{33} - \frac{2A_{13}^2}{A_{11} + A_{12}}}{\rho}} \approx 10726 \text{ м/с};$$

$$\text{А-ориентация} \quad - \quad V = \sqrt{\frac{\phi}{\rho}} = \sqrt{\frac{A_{11} + \frac{2A_{12}A_{13}^2 - A_{11}A_{13}^2 - A_{33}A_{12}^2}{A_{11}A_{33} + A_{13}^2}}{\rho}} \approx 10384 \text{ м/с}.$$

Скорость волн Релея (20) для сапфировых стержней А- и С-ориентации диаметром 19 мм и длиной 550 мм составляет:

$$\text{С-ориентация} \quad - \quad V = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 \cdot (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2)} \approx 10725 \text{ м/с};$$

$$\text{А-ориентация} \quad - \quad V = \frac{V_0}{1 + \left(\frac{\pi R}{L}\right)^2 \cdot (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2)} \approx 10383 \text{ м/с}.$$

Таким образом, для рассмотренных длинных сапфировых стержней наблюдается незначительное отличие значений скоростей, полученных по модели Релея и классической стержневой модели.

Значение скоростей волн деформаций для других случаев ориентации кристаллографических осей имеет более сложный вид. Удобней всего получать эти значения численно, используя преобразование тензора деформаций при повороте осей (2) и зависимости (7), (11) для определения параметра ϕ .

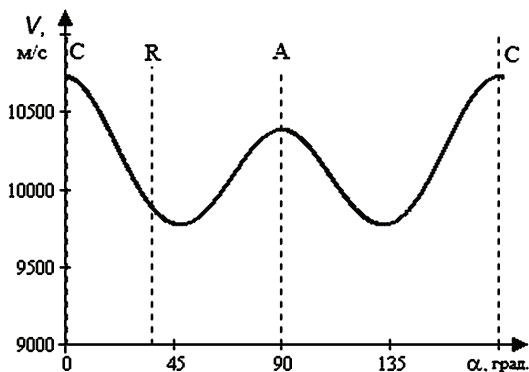


Рисунок 5 – Зависимость скорости волны от угла поворота осей кристалла

На рис. 5 представлен результат расчета скорости волны Релея в зависимости от значений угла поворота α осей кристалла вокруг оси Ox_2 (рис. 3, в) для стержня диаметром 19 мм и длиной 550 мм. Здесь А обозначен угол

поворота для стержня А-ориентации, С – для стержня С-ориентации и R – для стержня R-ориентации. Результаты по классической стержневой теории на рисунке не приводятся, поскольку они практически совпадают с данными, полученными по модели Релея (для рассмотренных геометрических размеров стержня учет влияния инерции поперечного движения стержня несущественен). Из рисунка видно, что значение скорости волны деформаций зависит от ориентирования кристаллографических плоскостей в изделии. Для R-ориентации скорость распространения волны составила 9888 м/с.

Эксперимент. Целью экспериментальных исследований было зафиксировать скорость волны деформаций в сапфировом стержне. Экспериментальные исследования процесса распространения волн в сапфире при ударе проведены на базе метода динамического широкополосного тензометрирования [10]. На стержень вблизи концов стержня наклеивались тензодатчики для фиксации деформаций в продольном направлении (рис. 6). При ударе по концу стержня возникает волна деформаций, которая распространяется вдоль стержня и вызывает его деформацию, которая и фиксируется тензодатчиками. Отличие времени начала деформаций на различных датчиках и известное расстояние между ними позволяет установить скорость волны.

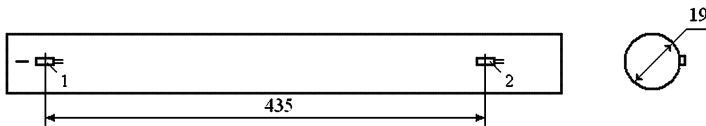


Рисунок 6 – Стержень с тензодатчиками

Измерение деформаций проводится по мостовой схеме. Четверть моста находится в измерительной части, четверть – в калибровочной, а оставшаяся половина – в тензоусилителе. Тензоусилитель работает по принципу амплитудной модуляции с несущей частотой 1000 кГц. Для минимизации тока в измерительной диагонали мост подстраивается по активной и реактивной составляющим сопротивления. Непосредственно перед испытанием, после балансировки канала усиления, проводится его градуировка, то есть устанавливается зависимость $\varepsilon = \varepsilon(U)$, где U – электрическое напряжение сигнала, регистрируемого аналого-цифровым преобразователем (АЦП).

Сигналы с тензодатчиков, наклеенных на образец, поступают на тензометрический усилитель, а затем на АЦП, где проводится регистрация регистрируемого сигнала с заданной частотой, после чего сигнал записывается на компьютер. В качестве АЦП использовались преобразователи Е-2010.

Стержень устанавливался вертикально на стенде. Один конец стержня жестко закреплялся в специальной сборной пятке из органического стекла. Нагружение осуществлялось путем сбрасывания на образец с высоты 1,5 м стального цилиндрического ударника с закругленным сферическим концом. Параметры ударника: масса – 76,78 г, длина – 47 мм, диаметр 16 мм.

Сапфировые стержни. В экспериментальных исследованиях использовались сапфировые стержни А-, С- и R-ориентации оптического качества диаметром 19 мм. Стержень А-ориентации имел длину 560 мм, а С-ориентации – 550 мм. Стержни были выращены методом Степанова из чистой (99,995 % основного вещества) шихты фирмы RSA (Франция) на ростовых установках «Кристалл-606» в среде особо чистого аргона [10, 14]. После выращивания стержни отжигались в вакууме в изотермических условиях при 1950 °С для разрушения рассеивающих центров в объеме кристалла.

Результаты и анализ экспериментальных исследований. Результаты экспериментальных исследований скорости волны деформаций в стержнях А-, С- и R-ориентации были подробно приведены в работе [10]. Для каждого стержня проводилась серия экспериментов по измерению значений скорости продольной волны, которые затем усреднялись по всей серии экспериментов. В результате средняя скорость волны деформаций в экспериментах составила для стержней

$$\text{А-ориентации} - V_{cp}^e \approx 10419 \text{ м/с};$$

$$\text{С-ориентации} - V_{cp}^e \approx 10752 \text{ м/с};$$

$$\text{R-ориентации} - V_{cp}^e \approx 10134 \text{ м/с}.$$

Таким образом, для А- и С-ориентации экспериментальные и теоретические данные отличаются на 0,3 %, а для R-ориентации на превышает 2,5 %.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Проведено теоретическое исследование процесса распространения волн в стержнях из сапфира с различной ориентацией кристаллографических осей. Поставлена и решена задача о распространении волн Релея в сапфировых стержнях при продольном ударе. Для сапфировых стержней с А- и С-ориентацией кристаллографических осей аналитически определены значения скоростей распространения волн по модели Релея и по классической стержневой теории. Кроме этого, аналитико-численно получена зависимость скорости волны от угла поворота кристаллографических осей в стержне. Установлено, что для рассмотренных длинных сапфировых стержней значения скоростей распространения волн, полученных по модели Релея и по классической стержневой теории, практически совпадают. При этом показано, что скорость волн в стержне существенным образом зависит от ориентирования кристаллографических осей сапфира. Установлено, что скорость распространения волн изменяется в пределах от 9777 м/с до 10725 м/с.

Теоретические результаты сопоставлены с данными экспериментальных исследований процесса распространения волн, проведенными с помощью метода динамического широкополосного тензометрирования. Получено хорошее совпадение результатов теоретических расчетов с данными эксперимента. Так, теоретическая скорость распространения волны в стержне с А-ориентацией составила 10383 м/с, а экспериментально была зафиксирована

скорость 10419 м/с, для стержня С-ориентации соответствующие скорости были 10725 м/с и 10752 м/с, а для стержня R-ориентации – 9888 м/с и 10134 м/с соответственно.

Дальнейшее исследование должно быть направлено на изучение процесса распространения волн и деформирования сапфировых пластин и трехмерных тел, обладающих гексагональной сингонией.

Список литературы: 1. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1965. – 386 с. 2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с. 3. Dobrovinskaya E. Sapphire in science and engineering / E. Dobrovinskaya, L. Lytvynov, V. Pischik. – Kharkiv: STC «Institute for Single Crystals», 2007. – 480 p. 4. Каннель Г. И. Поведение сапфира при упругом сжатии в различных кристаллографических направлениях / Г. И. Каннель, А. С. Савиных, С. В. Разоренов, В. Е. Фортвов // Успехи механики сплошных сред. – 2009. – С. 257–271. 5. Попов Г. М. Кристаллография / Г. М. Попов, И. И. Шафрановский. – М.: Высшая шк., 1964. – 370 с. 6. Nowak R. Peculiar surface deformation of sapphire: Numerical simulation of nanoindentation / R. Nowak, T. Manninen, K. Heiskanen [et al.] // Appl. Phys. Lett. – 2003. – Vol. 83, № 25. – P. 5214–5216. 7. Voloshyn O. V. Potentialities for sapphire strength enhancement / O. V. Voloshyn, L. A. Lytvynov, E. V. Slyunin // Funct. Mater. – 2007. – Т. 14, № 4. – С. 569–572. 8. Синани А. Б. Сопrotивление упругих тел высокоскоростному внедрению на начальной стадии соударения / А. Б. Синани, А. А. Кожушко, Е. Л. Зильбербранд // Письма в Журнал технической физики. – 2008. – Т. 34, вып. 3. – С. 27–31. 9. Wang Y. Shock deformation of sapphire single crystals / Y. Wang, D. E. Mikkola // Materials Science and Engineering. – 1991. – Vol. 148, № 1 – P. 25–32. 10. Литвинов Л. А. Исследование волновых процессов деформирования сапфировых стержней при низкоскоростном ударе / Л. А. Литвинов, А. Н. Шуников, С. В. Узримов [и др.] // Кристаллические материалы для оптики и электроники / ред. В. М. Пузиков. – Харьков: НТК «Ин-т монокристаллов» НАН Украины, 2012. – С. 305 – 329. 11. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – М.: Гостехиздат, 1950. – 300 с. 12. Аквис М. А. Тензорное исчисление / М. А. Аквис, В. В. Гольдберг. – М.: Физматгиз, 2003. – 304 с. 13. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу – М.: Мир, 1987. – 542 с. 14. Добровинская Е.П. Энциклопедия сапфира / Е.П. Добровинская, Л.А.Литвинов, В.В. Пищик. – Х.: НТК «Ин-т монокристаллов», 2004. – 508 с.

Bibliography (transliterated): 1. Fedorov, F. I. Teorija uprugih voln v kristallah. Moscow: Nauka, 1965. Print. 2. Rabotnov Ju. N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela. Moscow: Nauka, 1979. Print. 3. Dobrovinskaya, E., L. Lytvynov and V. Pischik. Sapphire in science and engineering. Kharkiv: STC «Institute for Single Crystals», 2007. Print. 4. Kannel', G. I., A. S. Savinyh, S. V. Razorenov and V. E. Fortov. Povedenie sappira pri uprugom szhatii v razlichnyh kristallograficheskikh napravlenijah. Uspеhi mehaniki sploshnyh sred. 2009. 257–271. Print. 5. Popov, G. M. and I. I. Shafranovskij. Kristallografija. Moscow: Vysshaja shk., 1964. Print. 6. Nowak, R., et al. Peculiar surface deformation of sapphire: Numerical simulation of nanoindentation. Appl. Phys. Lett. 83, 25 (2003): 5214–5216. Print. 7. Voloshyn, O. V., L. A. Lytvynov and E. V. Slyunin Potentialities for sapphire strength enhancement. Funct. Mater. 14, 4 (2007): 569–572. 8. Sinani, A. B., A. A. Kozhushko and E. L. Zil'berbrand. «Soprotivlenie uprugih tel vysokoskorostnomu vnedreniju na nachal'noj stadii soudarenija.» Pis'ma v Zhurnal tehnicheckoy fiziki. 34, 3 (2008): 27–31. 9. Wang, Y., D. E. Mikkola. «Shock deformation of sapphire single crystals.» Materials Science and Engineering. 148, 1 (1991): P. 25–32. Print. 10. Lytvynov, L. A., et al. «Issledovanie volnovnyh processov deformirovanija sappirovyh stержnej pri nizkoskorostnom udare.» Kristallicheskie materialy dlja optiki i jelektroniki. Ed. V.M. Puzikov. Kharkiv: NTK «In-t monokristallov», 2012. 305 – 329. Print. 11. Lehnickij, S. G. Teorija uprugosti anizotropnogo tela. Moscow-Leningrad: Gostehizdat, 1950. Print. 12. Akivis, M. A. and V. V. Gol'dberg. Tenzornoe ischislenie. Moscow: Fizmatgiz, 2003. Print. 13. Vasilzdu, K. Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. Moscow: Mir, 1987. Print. 14. Dobrovinskaja, E. R., L. A. Lytvynov and V. V. Pischik. Jenciklopedija sappira. Kharkiv: NTK «In-t monokristallov», 2004. Print.

Поступила (received) 10.10.2014