УДК 539.374

В.Г.БАБАДЖАНОВА, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

У статті досліджуються осесиметричні коливання в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою інтегрального перетворення Лапласа для довільних спадкових функцій.

Ключові слова: інтегральне перетворення Лапласа, осесиметричні коливання.

В статье исследуется осесимметричные колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки с помощью интегрального преобразования Лапласа для произвольных наследственных функций.

Ключевые слова: интегральное преобразование Лапласа, осесимметричные колебания.

This article examines variations axisymmetric viscoelastic cylindrical shell using the integral Laplace transform for arbitrary functions of hereditary.

Keywords: integral Laplace transform, axisymmetric vibrations.

Введение. Среди динамический задач вязкоупругости следует выделить задачу о колебании вязкоупругих систем, решения которых сводятся к интегро-дифференциальному уравнению Вольтера II рода. Решение этого уравнения требует задания аналитического вида ядра, либо решается различными приближенными методами.

Основная часть. Известно, что зависимость между перемещением и деформацией в общем виде определяется следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{d\xi}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{w\cos\varphi + u\sin\varphi}{R_0};$$
$$\aleph_1 = -\frac{d^2 w}{d\xi^2}; \qquad \aleph_2 = -\frac{\sin\varphi}{R_0}\frac{dw}{d\xi}, \tag{1}$$

где ε_1 и ε_2 – деформации, $\aleph_1$ и $\aleph_2$ – кривизны срединной поверхности, u и w – продольное нормальное перемещение точек срединной поверхности, φ – угол между касательной к образующей и осью оболочки, $R_0(\xi)$ – радиус срединной поверхности оболочки, ξ – координата, отчитываемая вдоль образующей.

Моменты и усилия определяются в виде:

$$M_1 = \frac{h^3 G}{6(1-\nu)}\left(\aleph_1 + \frac{1}{2}\aleph_2\right); \quad M_2 = \frac{h^3 G}{6(1-\nu)}\left(\frac{1}{2}\aleph_1 + \aleph_2\right);$$
$$N_1 = \frac{2hG}{1-\nu}\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2\right); \qquad N_2 = \frac{2hG}{1-\nu}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 + \varepsilon_2\right), \tag{2}$$

где h – толщина оболочки, $\nu = \text{const}$ – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига.

Ясно что сумма виртуальных работ напряжений δA_σ, моментов δA_M, поверхностных и инерционных сил δA_p и δA_u равна нулю:

$$\delta A_\sigma + \delta A_M + \delta A_P + \delta A_u = 0\,. \tag{3}$$

Здесь

$$\delta A_\sigma = -\int_S \left(N_1 \delta\varepsilon_1 + N_2 \delta\varepsilon_2\right) dS; \qquad \delta A_M = -\int_S \left(M_1 \delta\aleph_1 + M_2 \delta\aleph_2\right) dS;$$

$$\delta A_P = -\Phi(t)\int_S \delta w dS; \qquad \delta A_u = -h\rho\int_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w\right) dS.$$

Здесь интегрирование ведется по недеформированной срединной поверхности оболочки.

Решение в перемещениях ищутся в виде:

$$u(\xi,t) = \sum_{k=1}^{n} T_k(t) u_k(\xi); \qquad w(\xi,t) = \sum_{k=1}^{n} T_k(t) w_k(\xi). \tag{4}$$

Здесь $u_k(\xi)$ и $w_k(\xi)$ – собственные функции колебаний упругой оболочки, и удовлетворяют краевым условиям задачи и считаются известными. $T_k(t)$ – искомые функции, зависящие только от t.

Учитывая (1) и (4) для вариации перемещений и деформации получаем следующие формулы:

Учитывая (4) в (1) и (2), определяем формулы, выражающие кривизны, усилия и моментов через $T_k(t)$, $u_k(\xi)$ и $w_k(\xi)$. Представляя эти выражения в (3) с учетом ортогональности собственных функции и оператора Вольтера, получаем интегро-дифференциального уравнения:

$$T_k''(t) - w_k^2\left(T_k(t) - \varepsilon\int_0^t R(t-\tau) T_k(\tau) d\tau\right) = f_k(t)\,. \tag{5}$$

Здесь

$$\omega_k^2 = \frac{Q_k}{D_k}; \quad f_k(t) = \frac{\Phi_k}{D_k} q(t); \quad \Phi_k = \int_S w_k(\xi) dS; \quad D_k = \rho h\int_S \left(u_k^2(\xi) + w_k^2(\xi)\right) dS\ ;$$

$$Q_k = \frac{2G_0 h}{1-\nu}\int_S \left[\left(\frac{du_k(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \frac{2\nu\, w_k(\xi)}{R_0}\frac{du_k(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{w_k(\xi)}{R_0}\right)^2\right] dS +$$

$$+ \frac{G_0 h^3}{6(1-\nu)}\int_S \left(\frac{d^2 w_k(\xi)}{d\xi}\right)^2 dS; \quad G_0 = \text{const}.$$

Здесь предполагаем, что оператор Вольтера определяется в следующем виде

$$\widetilde{G}(z) = G_0\left(z(t) - \varepsilon\int_0^t R(t-\tau) z(\tau) d\tau\right).$$

Начальные условия принимаем в виде:

$$T(0)=T_0; \qquad T'(0)=T_0'. \tag{6}$$

Значит, поставленная задача математически сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (5) при условии (6).

Применяя преобразование Лапласа по времени t к уравнению (5) с учетом (6) и опуская индексы для простоты записей получаем:

$$\overline{T}(p)=\frac{pT_0+T_0'}{p^2+\omega^2-\varepsilon\omega^2\overline{R}(p)}+\frac{\bar{f}(p)}{p^2+\omega^2-\varepsilon\omega^2\overline{R}(p)}. \tag{7}$$

Здесь первый член правой части характеризует свободные колебания оболочки. При вынужденных колебаниях добавляется второй член как это выполнено в работе [1].

При $\left(\dfrac{\varepsilon\omega^2\overline{R}(p)}{p^2+\omega^2}\right)<1$ формулу (7) представим в следующем виде:

$$\overline{T}(p)=\frac{pT_0+T_0'}{a(p)}\left[1+\varepsilon\omega^2\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)}+\varepsilon^2\omega^4\frac{\bar{b}^2(p)}{\bar{a}^2(p)}+\cdots\right]+\frac{\bar{f}(p)}{p^2+\omega^2-\varepsilon\omega^2\overline{R}(p)}, \tag{8}$$

где

$$\bar{a}(p)=\left(p+\frac{1}{2}\varepsilon R_S\omega\right)^2+\omega^2\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon R_c\right)^2; \quad \bar{b}(p)=\overline{R}(p)+R_S\frac{p}{\omega}+R_C+\frac{\varepsilon}{4}\left(R_S^2+R_C^2\right);$$

$$R_S=\int_0^\infty R(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau; \qquad R_C=\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau.$$

В уравнении (8) оригинал первого члена имеет вид:

$$\begin{gathered}T_1(t)=\exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon R_S\omega t\right)\times \\ \times\left[T_0\cos\omega\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon R_C\right)t+\frac{T_0'-0{,}5\varepsilon R_S t\omega}{\omega(1-0{,}5\varepsilon R_C)}\sin\omega\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon R_C\right)t\right].\end{gathered} \tag{9}$$

Это известное решение, полученное методом усреднения [19] для свободных колебаний вязкоупругих систем.

Для нахождения второго приближения представим его в виде:

$$T_2(t)=\varepsilon\omega^2T_1(t)\cdot L^{-1}\left[\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)}\right].$$

Здесь звездочка обозначает свертку функций

$$f(t)\cdot g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau .$$

L^{-1} – оператор обратного преобразования Лапласа. Для вычисления оригинала отношение $\dfrac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)}$ представим его в виде:

$$\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)}=\frac{\bar{R}(p)}{\bar{a}(p)}+\frac{R_S}{\omega}\frac{p+d}{\bar{a}(p)};\quad d=\frac{R_C}{R_S}\omega+\frac{\varepsilon\omega}{4R_S}\left(R_S^2+R_C^2\right).$$

Отсюда находим:

$$L^{-1}\left(\frac{\bar{b}(p)}{\bar{a}(p)}\right)=R(t)\cdot\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}R_S\omega t\right)\frac{\sin\omega(1-0{,}5\varepsilon R_C)t}{\omega(1-0{,}5\varepsilon R_C)}+\frac{R_S}{\omega}\exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon R_S\omega t\right)\times$$
$$\times\left[\cos\omega\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon R_C\right)t+\frac{d-0{,}5\varepsilon R_S\omega}{\omega(1-0{,}5\varepsilon R_C)}\sin\omega\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon R_C\right)t\right].$$

Отсюда видно, что нахождение оригиналов следующих приближений ряда (8) не представляет труда.

Как мы показали, к решению свободных колебаний вязкоупругих систем при вынужденных колебаниях добавляется еще следующее выражение

$$\frac{\bar{f}(p)}{p^2+\omega^2-\varepsilon\omega^2\bar{R}(p)}.$$

Оригинал этого выражения определяется в виде свертки функций. Сначала найдем оригинал знаменателя. Поэтому представим его в виде:

$$\frac{1}{p^2+\omega^2-\varepsilon\omega^2\bar{R}(p)}=\frac{1}{p^2+\omega^2}+\frac{\varepsilon\omega^2\bar{R}(p)}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}+\cdots+\frac{\varepsilon^m\omega^{2m}\bar{R}^m(p)}{\left(p^2+\omega^2\right)^{m+1}}+$$
$$+\frac{\varepsilon^{m+1}\omega^{2(m+1)}\bar{R}^{m+1}(p)}{\left(p^2+\omega^2\right)^{m+2}}\left[1+\frac{\varepsilon\omega^2\bar{R}(p)}{p^2+\omega^2}+\left(\frac{\varepsilon\omega^2\bar{R}(p)}{p^2+\omega^2}\right)^2+\cdots\right].$$

Применив к последней скобке процедуру вывода формулы (2), получаем:

$$\frac{1}{p^2+\omega^2-\varepsilon\omega^2\bar{R}(p)}\approx\frac{1}{p^2+\omega^2}+\cdots+\frac{\left(\varepsilon\omega^2\bar{R}(p)\right)^m}{\left(p^2+\omega^2\right)^{m+1}}+\cdots+\frac{\left(\varepsilon\omega^2\bar{R}(p)\right)^{m+1}}{\left(p^2+\omega^2\right)^{m+1}}\times$$
$$\times\frac{1}{\left(p^2+\frac{1}{2}\varepsilon R_S\omega\right)^2+\omega^2\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\omega_C\right)^2}. \qquad (10)$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\bar{R}(p)}{p^2+\omega^2}\ \stackrel{\bullet}{=}\ \frac{1}{\omega}\int_0^t\sin\omega(t-\tau)R(\tau)d\tau=g_0(t);$$

$$\frac{\omega^2\bar{R}(p)}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}\ \stackrel{\bullet}{=}\ \omega\int_0^t\sin\omega(t-\tau)g_0(\tau)d\tau=g_1(t);$$

$$\frac{\omega^4\overline{R}^2(p)}{\left(p^2+\omega^2\right)^3} \doteqdot \omega\int_0^t \sin\omega(t-\tau)g_1(\tau)d\tau = g_2(t);$$

. . . .

$$\frac{\omega^{2m}\overline{R}^m(p)}{\left(p^2+\omega^2\right)^{m+1}} \doteqdot \omega\int_0^t \sin\omega(t-\tau)g_{m-1}(\tau)d\tau = g_m(t);$$

$$\frac{\omega^{2m}\overline{R}^m(p)}{\left(p^2+\omega^2\right)^{m+1}}\cdot\frac{1}{\left(p+\frac{1}{2}\varepsilon R_S\omega\right)^2+\omega^2\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon R_C\right)^2} \doteqdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}\varepsilon R_C}\int_0^t g_m(t-\tau)\psi(\tau)d\tau .$$

где

$$\psi(t)=\int_0^t R(t-\tau)\exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon R_S\omega\tau\right)\sin\omega\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon R_C\right)\tau d\tau .$$

Значить, выражению (10) соответствует оригинал

$$\frac{1}{p^2+\omega^2-\varepsilon\omega^2\overline{R}(p)} \doteqdot \frac{1}{\omega}\sin\omega t+\varepsilon g_1(t)+\varepsilon^2 g_2(t)+\cdots+\varepsilon^m g_m(t)+$$

$$+\frac{\varepsilon^{m+1}\omega}{1-0{,}5\varepsilon R_C}\int_0^t g_m(t-\tau)\psi(\tau)d\tau. \qquad (11)$$

Свертывая функцию $f(t)$ с выражением (11), находим оригинал второго слагаемого уравнения (7) в виде:

$$\frac{\bar{f}(p)}{p^2+\omega^2-\varepsilon\omega^2\overline{R}(p)} \doteqdot \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega(t-\tau)f(\tau)d\tau+\varepsilon\int_0^t g_1(t-\tau)f(\tau)d\tau+$$

$$+\cdots+\varepsilon\int_0^t g_m(t-\tau)f(\tau)d\tau+\frac{\varepsilon^{m+1}\omega}{1-0{,}5\varepsilon R_C}\int_0^t f(t-\tau)\left(\int_0^\tau g_m(t-S)\psi(S)dS\right)d\tau.$$

Вывод. Таким образом, решение задачи вынужденных осесимметричных колебаний вязкоупругой оболочки получается суммированием последнего выражения с выражением (9), определяющее свободное колебание оболочки.

Список литературы: **1.** *Ильясов М.Х., Курбанов Н.Т.* К решению интегро-дифференциального уравнения динамических задач линейной вязкоупругости // ДАН. Азерб.ССР. – 1984. – № 5. **2.** *Ильюшин А.А., Ларионов Г.С., Филатов А.Н.* К усреднению в системах интегро-дифференциального уравнения // ДАН. СССР. – 1969. – Т. 188, № 1. **3.** *Ларионов Г.С.* Исследование колебаний вязкоупругих систем методом усреднения // Механика полимеров. – 1969. – № 5. **4.** *Мирсаидов М., Трояновский И.Е.* Вынужденные осесимметричные колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки // Механика полимеров. – 1975. – № 6.

Поступила в редколлегию 20.06.2012