821-832 Print. **12.** Samarin Yu.P., Sorokin O.V. O polzuchesti polivinilhloridnogo plastikata pri peremennyh zagruzkah. DAN SSSR. 1970. Vol. 195, **2**. 333-336 Print. **13.** Kregers A.F., Vilks U.K., Lejtane M.Ya. Pryamaya i obratnaya polzuchest' nelinejnogo polimernogo materiala. Mehanika polimerov. 1973. 5. 786-795 Print. **14.** Bugakov I.I. Polzuchest' polimernyh materialov. Moscow: Nauka, 1973. 287 Print. **15.** More J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E. Users guide to minipack. Argone National Laboratory Publication ANL–80–74. 1980. 640-650 Print.

Поступила (received) 06.10.2014

УДК 517.928 : 536.24

А.М. ПОГРЕБИЦКАЯ, доцент, Национальная академия природоохранного и курортного строительства, Симферополь

НАХОЖДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ТЕПЛА В ПЛАСТИНЕ ТЕПЛОВОГО РАДИАТОРА С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЕРКИН ПОДХОДА

В работе представлено решение задачи о нахождении плотности теплового потока в пластине радиатора. Цель работы – применение асимптотического гибридного подхода к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые описывают процессы теплообмена в различных конструкциях. Для нахождения недостающего значения производной функции найдено замкнутое аналитическое решение.

Ключевые слова: асимптотические методы, двойной гибридный ВКБ-Галеркин метод, плотность теплового потока, пластина теплового радиатора

1 Введение. Большинство математических моделей реальных процессов имеют ряд существенных особенностей, которые не позволяют исследователям получать точные аналитические решения. Такими особенностями являются, например, нелинейности в уравнениях, переменные коэффициенты, границы сложной формы и другие. Для решения подобных задач исследователи вынуждены применять прямые численные или приближенные аналитические методы. Среди приближенных аналитических методов важное место занимают асимптотические методы возмущений с малым параметром, который естественно возникает в уравнениях или вводится искусственно [1, 2].

Как указано в ряде работ [3, 4], одним из эффективных асимптотических подходов являются гибридные методы, идея которых заключается в соединении любого асимптотического разложения (метод возмущений, ВКБ и другие) и метода Галеркина. Использование гибридного асимптотико-численного метода на базе двойного асимптотического разложения в нелинейных уравнениях является одним из новых направлений исследования задач теплоизлучения.

Целью исследования является применение двойного гибридного подхода к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые описывают процессы теплообмена в различных конструкциях.

2 Постановка задачи. Стало общепризнанным, что отток тепла от горячего тела к холодной жидкости можно ускорить за счет расширения поверхности тела путем добавления выступающих пластин. Анализируя этот вопрос для пластины в виде кольца постоянной толщины, Чамберс и Сомерс [5] установили, что функция распределения температуры в такой пластине является решением следующей граничной задачи

$$U''(r)+\frac{\rho-1}{(\rho-1)r+1}U'(r)-\beta U^4(r)=0\,;\quad U(0)=1\,;\quad U'(1)=0\,,\qquad (1)$$

где $U=T/T_i$; $r=(r-r_i)/(r_0-r_i)$; $\rho=r_0/r_i$; $\beta=(r_0-r_i)^2 e\sigma T_i/(k\delta)$ – безразмерный параметр; T – функция распределения температуры в пластине; T_i – температура основания пластины; r_i, r_0 – внутренний и внешний радиусы пластины соответственно; e – коэффициент эмиссии; σ – постоянная Планка; k – коэффициент теплопроводности; δ – толщина пластины.

С математической точки зрения задача сводится к отысканию функции $U(r)$, а за тем, недостающих значений $U'(0)$ для различных пар значений ρ и β, для того, что бы вычислить плотность потока тепла по формуле

$$q_W=-k\,dT/dr\big|_{r=r_i}=-[kT_i/(r_0-r_i)]dU(0)/dr\,.\qquad (2)$$

Задача (1) аналогична задаче рассмотренной в работах [4, 6] за исключением того, что теперь толщина пластины постоянна. Поэтому для (1) может быть применим подход двойного гибридного разложения, который подробно изложен в упомянутых работах и показал достаточно высокую точность результатов в задаче о теплоизлучении ребра трапецеидального сечения.

3 Методика двойного гибридного ВКБ-Галеркин разложения

Так как гибридный метод был эффективно применен к ряду нелинейных задач для различных значений параметра при старшей производной (как при $\varepsilon^2 < 1$, так и при $\varepsilon^2 \geq 1$), тогда рассмотрим (1) при $\varepsilon^2 = 1$.

Введем замену $a(r)=\dfrac{\rho-1}{(\rho-1)r+1}$, $b(r)=1$, и (1) запишется в общем виде

$$\varepsilon^2U''(r)+a(r)U'(r)-\beta\,b(r)U^4(r)=0\,,\ U'(1)=0\,,\ U(0)=1\,,\qquad (3)$$

где ε, β – параметры, $a(r)$, $b(r)$ – некоторые функции.

Для нахождения решения уравнения (3) функция U записывается в виде ряда по степеням параметра β

$$U(r,\beta)=U_0(r)+\beta U_1(r)+\beta^2U_2(r)+\ldots\qquad (4)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра β, в результате внешнего разложения получена система линейных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $U_0(r)$, $U_1(r)$, $U_2(r)$, …

$$\beta^0: \ \varepsilon^2 U_0'' + a(r)U_0' = 0; \qquad U_0(0) = 1;\ U_0'(1) = 0; \qquad (5)$$

$$\beta^1: \ \varepsilon^2 U_1'' + a(r)U_1' = b(r)U_0^4; \qquad U_1(0) = 0;\ U_1'(1) = 0; \qquad (6)$$

$$\beta^2: \ \varepsilon^2 U_2'' + a(r)U_2' = 4b(r)(U_0 U_1^3 + U_0^3 U_1);\ U_2(0) = 0;\ U_2'(1) = 0.$$

Ограничиваясь двумя слагаемыми в (4) и используя гибридный метод, ВКБ-Галеркин решение уравнения (5) находится в виде

$$U_0^H(r) = c_1 \frac{G_1(r)}{E(r)} + c_2 \frac{G_2(r)}{E(r)}, \qquad (7)$$

где

$$G_{1,2}(r) = \exp\left(\int_0^r \delta^*_{0_{1,2}} \sqrt{g(\tau)}\,d\tau\right); \qquad E(r) = \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^r a(\tau)\,d\tau\right);$$

$$\delta^*_{0_{1,2}} = G \pm \sqrt{\varepsilon^{-2} + G^2}; \qquad G = \frac{g(0) - g(1)}{4\int_0^1 \sqrt{g^3(x)}\,dx}; \qquad g(r) = \frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2} + \frac{a'(r)}{2} - b(r).$$

Аналогично находится решение уравнения (6), то есть функция U_1^H.

$$U_1^H(r) = -\frac{G_1(r)}{\varepsilon^2(\delta^*_{0_2} - \delta^*_{0_1})\,E(r)}\left(\int_0^r \frac{E(x)b(x)(U_0^H(x))^4}{\sqrt{g(x)}\,G_1(x)}dx + s_1\right) +$$

$$+\frac{G_2(r)}{\varepsilon^2(\delta^*_{0_2} - \delta^*_{0_1})\,E(r)}\left(\int_0^r \frac{E(x)b(x)(U_0^H(x))^4}{\sqrt{g(x)}\,G_2(x)}dx + s_2\right). \qquad (8)$$

Найденные функции (7) и (8) подставляются в разложение (4) и в результате имеем

$$U^H(r) = c_1\frac{G_1(r)}{E(r)} + c_2\frac{G_2(r)}{E(r)} + \beta\left(-\frac{G_1(r)}{\varepsilon^2(\delta^*_{0_2} - \delta^*_{0_1})\,E(r)}\Big(c_1^4 I_1(r) + 4c_1^3 c_2 I_2(r) + \right.$$

$$6c_1^2 c_2^2 I_3(r) + 4c_1 c_2^3 I_4(r) + c_2^4 I_5(r) + s_1\Big) +$$

$$\left. + \frac{G_2(r)}{\varepsilon^2\left(\delta^*_{0_2} - \delta^*_{0_1}\right)E(r)}\Big(c_1^4 I_6(r) + 4c_1^3 c_2 I_1(r) + 6c_1^2 c_2^2 I_2(r) + 4c_1 c_2^3 I_3(r) + c_2^4 I_4(r) + s_2\Big)\right), (9)$$

где

$$I_1(r) = \int_0^r f(x)\exp\left(3\delta^*_{0_1} h(x)\right)dx; \qquad I_4(r) = \int_0^r f(x)\exp\left(3\delta^*_{0_2} h(x)\right)dx;$$

$$I_2(r)=\int_0^r f(x)\exp\left(\left(2\delta_{0_1}^*+\delta_{0_2}^*\right)h(x)\right)dx;\quad I_5(r)=\int_0^r f(x)\exp\left(\left(4\delta_{0_2}^*-\delta_{0_1}^*\right)h(x)\right)dx;$$

$$I_3(r)=\int_0^r f(x)\exp\left(\left(\delta_{0_1}^*+2\delta_{0_2}^*\right)h(x)\right)dx;\quad I_6(r)=\int_0^r f(x)\exp\left(\left(4\delta_{0_1}^*-\delta_{0_2}^*\right)h(x)\right)dx;$$

$$f(x)=\frac{b(x)}{E^3(x)\sqrt{g(x)}};\qquad h(x)=\int_0^x\sqrt{g(\tau)}\,d\tau .$$

В решение (9) входят интегралы $I_j(r)$, $j=\overline{1{,}6}$, которые точно не берутся. Поэтому для их оценки используется приближенный метод, основанный на методе интегрирования по частям и описанный следующей формулой

$$\int_0^r f(x)\exp(kh(x))dx=+\frac{1}{k}\left[\frac{f(r)}{h'(r)}\exp(kh(x))-\frac{f(0)}{h'(0)}\exp(kh(0))\right]+$$

$$+\frac{1}{k^2}\left[\left(\frac{f(0)}{h'(0)}\right)'\frac{\exp(kh(0))}{h'(0)}-\left(\frac{f(r)}{h'(r)}\right)'\frac{\exp(kh(r))}{h'(r)}\right]+$$

$$+\frac{1}{k^3}\left[\left(\left(\frac{f(r)}{h'(r)}\right)'\frac{1}{h'(r)}\right)'\frac{\exp(kh(r))}{h'(r)}-\left(\left(\frac{f(0)}{h'(0)}\right)'\frac{1}{h'(0)}\right)'\frac{\exp(kh(0))}{h'(0)}\right]+O\left(\frac{1}{k^4}\right),$$

где

$$k=3\delta_{0_1}^*;\quad 2\delta_{0_1}^*+\delta_{0_2}^*;\quad \delta_{0_1}^*+2\delta_{0_2}^*;\quad 3\delta_{0_2}^*;\quad 4\delta_{0_2}^*-\delta_{0_1}^*;\quad 4\delta_{0_1}^*-\delta_{0_2}^* .$$

В работе [7] доказывается ε-асимптотичность решения (9) уравнения (3).

4 Сравнение результатов. Для доказательства эффективности предложенного двойного асимптотического разложения на базе объединения метода Пуанкаре и ВКБ-Галеркин подхода уравнения (1) проведено сравнение результатов с уже существующими методами. Например, построено двойное разложение на базе объединения метода Пуанкаре и ВКБ-подхода, то есть к каждому уравнению системы (5)-(6) для задачи (1) был применен метод фазовых интегралов. Однако результаты, полученные с помощью гибридного ВКБ-Галеркин подхода, точнее результатов, полученных другими методами (табл. 1).

Для нахождения плотности потока тепла (2) найдено недостающее значение производной $U'(0)$ для различных пар параметров ρ и β.

В работах [5, 8] задача решена численно (например, в [8] методом инвариантного погружения, обозначенным T в табл. 2). Результаты, полученные двойным гибридным ВКБ-Галеркин подходом, хорошо сочетаются с результатами из [8] и представлены в табл. 2.

Таблица 1 – Относительные ошибки гибридного (ΔU^H) и ВКБ (ΔU^{WKB}) методов для различных значений параметров внешнего разложения, %.

r	$\rho = 1,5$				$\rho = 3,0$	
	$\beta = 0,4$		$\beta = 1,6$		$\beta = 0,4$	$\beta = 1,6$
	ΔU^H	ΔU^{WKB}	ΔU^H	ΔU^{WKB}	ΔU^H	ΔU^H
0,1	0,951	2,513	0,158	8,613	0,839	1,585
0,2	1,561	4,664	0,509	15,617	2,088	3,313
0,4	2,238	7,860	1,333	25,942	3,486	4,123
0,6	2,889	9,731	2,216	32,426	4,861	7,023
0,8	3,329	10,524	2,799	35,809	3,126	5,603
1,0	3,545	10,635	3,023	36,726	1,146	1,617

Таблица 2 – Недостающее значение производной.

β	$dU(0)/dr$ для $\rho = 1,5$			$dU(0)/dr$ для $\rho = 3,0$		
	T	U^H	U^{WKB}	T	U^H	U^{WKB}
0,4	-0,3487	-0,3485	-0,3462	-0,5085	-0,5083	-0,5063
0,8	-0,5587	-0,5585	-0,5497	-0,7782	-0,7781	-0,7758
1,2	-0,7158	-0,7157	-0,5911	-0,9694	-0,9692	-0,8171
1,6	-0,8445	-0,8443	-0,7134	-1,1212	-1,1211	-1,0097

5 Выводы. В результате сравнительного анализа при увеличении параметра β было установлено, что наибольшую погрешность результатов по сравнению с численным методом дает разложение на базе объединения метода Пуанкаре и ВКБ-подхода. Результаты двойного гибридного ВКБ-Галеркин решения были существенно близки к численным (табл. 1). Также найдено недостающее значение производной функции для дальнейших вычислений плотности потока тепла.

Список литературы: 1. *Samoilenko V. H.* Asymptotic solutions of the Couchy problem for the singulary relturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients / *V. H. Samoilenko, Yu. I. Samoilenko* // Ukrainian Mathematical Journal. – 2007. – № 1. – P. 126-139. **2.** *Старун І.І.* Лінійні сингулярно збурені системи / *І.І. Старун, М.І. Шкіль* // Український математичний журнал. – 2002. – № 12. – С. 1688-1693. **3.** *Грищак В. З.* Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування / *В. З. Грищак.* – Запоріжжя : ЗНУ, 2009. – 226 с. **4.** *Gristchak V. Z.* On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems / *V. Z. Gristchak, A. M. Pogrebitskaya* // Technische Mechanik. – 2011. – V. 31, № 2. – С. 112–120. **5.** *Chambrs R.L.* Radiation in efficiency for one-dimensional heat flow in a circular fin / *R.L. Chambrs, E.V. Somers* // Heat Transfer. – 1999. – V. 81, November. – С. 327–329. **6.** *Грищак В. З.* Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер трапецеїдальної форми / *В. З. Грищак, Г. М. Погребицька* // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – Т. 52, № 3. – С. 217–223. **7.** *Погребицкая А. М.* Об оценке точности аналитического гибридного решения задачи теплопереноса / *А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова* // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – Т. 23 (62), № 2. – С. 113–123. **8.** *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач / *Ц. На.* – М. : Мир, 1982. – 294 с.

Bibliography (transliterated): 1. Samoilenko V. H. Asymptotic solutions of the Couchy problem for the singulary relturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. V. H. Samoilenko, Yu. I. Samoilenko. Ukrainian Mathematical Journal. 2007. № 1. 126-139. Print. **2.** Starun I.I. Linijni synhulyarno zbureni systemy. I.I. Starun, M.I. Shkil'. Ukrayins'kyj matematychnyj zhurnal. 2002. № 12. 1688-1693. Print. **3.** Hryshchak V. Z. Hibrydni asymptotychni metody ta tekhnika yikh zastosuvannya. V. Z. Hryshchak. Zaporizhzhya: ZNU, 2009. 226 Print. **4.** Gristchak V. Z. On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems. V. Z. Gristchak, A. M. Pogrebitskaya. Technische Mechanik. 2011. V. 31, № 2. 112-120 Print. **5.** Chambrs R.L. Radiation in efficiency for one-dimensional heat flow in a circular fin. R.L. Chambrs, E.V. Somers. Heat Transfer. 1999. V. 81, November. 327–329 Print. **6.** Hryshchak V. Z. Podvijnyj asymptotychnyj rozklad u problemi promenevoho teploobminu kil'cevykh reber trapeceyidal'noyi фormy. V. Z. Hryshchak, H. M. Pohrebyc'ka. Matematychni metody ta фizyko-mekhanichni polya. 2009. Vol. 52, № 3. 217-223 Print. **7.** Pogrebickaya A. M. Ob ocenke tochnosti analiticheskogo gibridnogo resheniya zadachi teploperenosa. A. M. Pogrebickaya, S. I. Smirnova. Uchenye zapiski Tavricheskogo nacional'nogo universiteta im. V. I. Vernadskogo. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. 2010. Vol. 23 (62), № 2. 113-123 Print. **8.** Na C. Vychislitel'nye metody resheniya prikladnyh granichnyh zadach. C. Na. Moscow: Mir, 1982. 294 Print.

Поступила (received) 05.10.2014

УДК 531.3

Б.В. УСПЕНСКИЙ, аспирант, НТУ «ХПИ»;
К.В. АВРАМОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИЛОВЫХ ПЕРЕДАЧ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ШОУ-ПЬЕРА

В статье предложена модификация метода нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера для исследования механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. Такая модификация позволяет вдвое снизить размерность системы обыкновенных уравнений, используемой для расчета форм, увеличивая таким образом точность и быстродействие метода. Рассмотрены механические системы с двумя степенями свободы, которые описывают колебания элементов силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы, формы Пьера-Шоу, кусочно-линейная система, крутильные колебания, свободные колебания, силовая передача.

Введение. Технические системы часто включают в себя элементы, которые односторонне контактируют между собой. Такие системы моделируют разнообразные технологические процессы [1]. Кусочно-линейные системы описывают динамику механических систем с зазорами, шлицевыми соединениями, упругими муфтами, зубчатыми передачами. Такие системы могут совмещать крутильные, продольные и изгибные колебания [2, 3]. Поэтому мно-