

**Д.В.БРЕСЛАВСЬКИЙ**, д-р техн. наук, професор, НТУ «ХПІ»;  
**С.О.ПАЩЕНКО**, студент, НТУ «ХПІ»

## **РОЗРОБКА АЛГОРИТМІЧНОГО ТА ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ТРЬОХВИМІРНИХ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Стаття присвячена розв'язанню трьохвимірних задач нестационарної теплопровідності методом скінченних елементів. Розглянуто метод та алгоритм розв'язку задачі з використання восьми вузлового скінченного елемента. Проведене порівняння чисельних та аналітичних даних показало цілком задовільну ступінь достовірності отриманих розв'язків.

**Ключові слова:** температура, нестационарна теплопровідність, метод скінченних елементів, програмний засіб, чисельне моделювання.

Статья посвящена решению трехмерных нестационарных задач теплопроводности методом конечных элементов. Изложен метод и алгоритм решения задачи с использованием 8-узлового конечного элемента. Проведенное сравнение численных и аналитических данных показало вполне удовлетворительную степень достоверности получаемых результатов.

**Ключевые слова:** температура, нестационарная теплопроводность, метод конечных элементов, программное средство, численное моделирование.

The paper is devoted to the solution of the three-dimensional non-stationary problems of heat conduction by use of Finite Element Method. The method and algorithm of solution with use of 8-nodal finite element is presented. The comparison of numerical and analytical data have shown the satisfactory degree of obtained results' accuracy.

**Keywords:** temperature, non-stationary heat conduction, Finite Element Method, computer program, numerical simulation.

**Вступ.** Останні часи характеризуються широким застосуванням в інженерній практиці чисельних методів, насамперед методу скінченних елементів (МСЕ). Їхнє поширення пов'язано, по-перше, з універсальністю підходів до розв'язання задач з будь-якими силовими та геометричними крайовими умовами, та, по-друге, зі створенням спеціалізованого програмного забезпечення, яке надає відмінні сервісні можливості для моделювання. При цьому продовжують розвиватись проблемно-орієнтовані дослідницькі програми, які завдяки оптимальному використанню ресурсів ЕОМ та швидкій реалізації найбільш сучасних розробок та алгоритмів надають можливості проведення нових чисельних експериментів. Отримані при цьому цілком задовільні результати у подальшому застосовуються у комерційному програмному забезпеченні.

Одним з розділів нелінійної механіки деформівного твердого тіла, які швидко розвиваються в останній час, є високотемпературне деформування та руйнування тіл. Адекватний опис розподілу температур, які змінюються за

часом завдяки особливостям технологічних процесів, потребує ефективного розв'язання нестационарної задачі теплопровідності. У запропонованій статті надано опис основних підходів, методу та алгоритмів розв'язання трьохвимірної задачі теплопровідності методом скінченних елементів. Проаналізовані результати, отримані при дослідженнях достовірності чисельних розв'язків.

**1 Математична постановка задачі.** Розв'язуємо задачу трьохвимірної нестационарної теплопровідності [5] у замкненої області  $\Omega$ , що обмежена поверхнею  $S$ :

$$u_t = k_x u_{xx} + k_y u_{yy} + k_z u_{zz} + f(x, y, z, t), \quad (1)$$

де  $u(x, y, z, t)$  – невідома функція розподілу температури;  $f(x, y, z, t)$  – функція розподілу теплових джерел;  $k_x, k_y, k_z$  – коефіцієнти теплопровідності в напрямках осей  $OX, OY, OZ$  відповідно.

Як відомо, найчастіше зустрічаються крайові умови 1 роду (Дірихле)

$$u|_{S_1} = \mu(t) \quad (2)$$

та крайові умов 2 роду (Неймана):

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_2} = q(t). \quad (3)$$

Як початкові умови приймаємо розподіл температур при  $t = 0$ :

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (4)$$

де  $S_1$  – поверхня, на якій задано тепловий режим у вигляді функції  $\mu(t)$ ;  $S_2$  – поверхня, на якій задано інтенсивність теплового потоку у вигляді функції  $q(t)$ .

**2 Метод розв'язання.** Згідно з підходами, що розроблені в МСЕ для розв'язання нестационарних задач [3], дискретизуємо задачу (1) за часом за допомогою будь-якого чисельного методу. При цьому на кожному кроці за часом отримуємо задачу для стаціонарного розподілу температури за наявності відповідного часу розподілу теплових джерел.

Коротко опишемо метод розв'язання стаціонарної задачі теплопровідності, зберігаючи всі позначення пункту 1. Розв'язуємо рівняння

$$k_x u_{xx} + k_y u_{yy} + k_z u_{zz} + f(x, y, z, t) = 0. \quad (5)$$

Згідно підходів МСЕ, область  $\Omega$  розбиваємо на скінченні елементи. Кожен такий елемент буде характеризуватися вузловими точками (вершинами). Далі невідому функцію температури представимо рядом за відомими базисними функціями

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{k=1}^n u_k(t) N_k. \quad (6)$$

Для зменшення нев'язки  $R_{\Omega^e} = u - \tilde{u}$  у кожному скінченному елементі, проводимо її мінімізацію, застосовуючи відомий підхід методу зважених нев'язок [3]:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega^e} = 0, \quad (l = 1, \dots, M), \quad (7)$$

де  $M$  – число вагових функцій  $W_l$ , які задаються на елементі.

Після підстановки (6) до (7) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих коефіцієнтів апроксимації на одному елементі.

$$K_{lm}^e a^e = f^e, \quad (8)$$

де  $u^e = \{u_1, u_2, \dots, u_M\}$ ,  $K_{lm}^e = \int_{\Omega^e} W_l N_m d\Omega$ ,  $f^e = \int_{\Omega^e} W_l p d\Omega$ .

$K_{lm}^e$  – локальна матриця,  $u^e$  – вузлові значення температури (коефіцієнти апроксимації),  $f_i^e$  – локальний вектор правих частин,  $e$  – номер елемента.

Застосовуючи даний підхід до кожного такого елемента, отримаємо  $n$  локальних матриць, котрі «вкладаються» (записуються) в глобальну матрицю системи, що представляє собою глобальну лінійну систему алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої визначає вузлові значення температури за всією областю  $\Omega$ .

Для розв'язку поставленої задачі було використано восьмивузловий елемент у вигляді криволінійного паралелепіпеду [1], [2], [6]. Для того, щоб застосувати базисні функції з класу гладкості  $C_1$ , перейдемо до слабкого формулювання задачі. Застосовуємо метод Гальоркіна, згідно з яким вагові функції є такими ж, як і базисні:

Застосовуючи формулу Гріна до рівняння типу (7), отримаємо наступний вираз:

$$\begin{aligned} & k_x \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right] u_i(t) + k_y \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right] u_i(t) + \\ & + k_z \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \right] u_i(t) + \int_{\Omega} f(x, y, z, t) N_j d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $\Omega^e$  – трьохвимірна область SE.

Зв'яжемо з кожною вершиною сітки розбиття деяку базисну функцію, яка приймає значення 1 в даній вершині та 0 – у всіх останніх. У зв'язку з тим, що сітка розбиття представляє собою квазіпаралелепіпеди, які мають вісім вершин, для повного опису кожного елемента потрібно ввести вісім базисних функцій з урахуванням їх належності до класу диференційованості [1], [2], [4]. Будемо трилінійні базисні функції, застосовуючи багаточлен Лагранжа. Одна з типових базисних функцій має вигляд:

$$N_i = \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \left( \frac{y - y_j}{y_i - y_j} \right) \left( \frac{z - z_j}{z_i - z_j} \right).$$

Вираз для локальної матриці теплопровідності отримуємо у наступному виді:

$$K_{ij} = k_x \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right] + k_y \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right] + k_z \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} d\Omega \right]. \quad (10)$$

Узагальнені термодинамічні сили позначимо як:

$$Q_j = \int_{\Omega} f(x, y, z, t) N_j d\Omega. \quad (11)$$

Для того, щоб отримати можливість застосування СЕ не тільки канонічної, а й, наприклад, криволінійної форми, застосуємо ізопараметричне відображення, яке полягає у переході від заданої елементом системи координат до такої, інтегрування на якій було б найпростішим. Для того, щоб це реалізувати, відображення повинне мати наступний вигляд:

$$x = \sum_{i=1}^8 x_i N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad y = \sum_{i=1}^8 y_i N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad z = \sum_{i=1}^8 z_i N_i(\xi, \eta, \zeta), \quad (12)$$

де  $x_i, y_i, z_i$  – поточні вузлові значення сітки на конкретному елементі;  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  – базисні функції в нормованій системі координат.

Після того, як на кожному елементі сформулюються локальні матриці теплопровідності, вони додаються до глобальної матриці з урахуванням нумерації вузлів. Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язується методом Холецького.

Для розв'язання нестационарної задачі застосуємо метод Ейлера. Нехай, наприклад, в момент часу  $t$  задано початковий (стаціонарний) розподіл температури. Тоді необхідно знайти розподіл температури в момент часу  $t + \Delta t$  [3].

Представимо похідну вузлової температури через відношення скінченних різниць:

$$\frac{du_i(t)}{dt} \approx \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t}. \quad (13)$$

Підставляючи (13) до основного дискретизованого рівняння типу (8), але за наявності доданку з похідною за часом, отримуємо:

$$P_{ij} \frac{u_i(t + \Delta t) - u_i(t)}{\Delta t} = K_{ij} u_i(t + \Delta t) + Q_j, \quad (14)$$

де  $P_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega$ .

Після перетворень отримуємо:

$$\left( K_{ij} - \frac{P_{ij}}{\Delta t} \right) u_i(t + \Delta t) = -\frac{P_{ij}}{\Delta t} u_i(t) - Q_j. \quad (15)$$

Застосовуючи цей алгоритм послідовно для всіх кроків за часом, розв'язуємо поставлену задачу нестационарної теплопровідності. Наведений метод реалізовано у вигляді програмного засобу на алгоритмічній мові C/C++. Скінченноелементний препроцесор створено на базі процесору двовимірних задач Divider [7]. Вихідні дані у вигляді двовимірної області, яку розбито на трикутні елементи, передаються в новий препроцесор трьохвимірних задач. Трикутники об'єднуються у чотирикутники, а далі застосовуються процедури подовження області на задане число шарів, чим реалізується можливість

розбиття призматичних тіл будь-якої геометрії в плані.

**3 Дослідження з достовірності розв’язків.** В роботі проведено тестування створеного програмного засобу з метою перевірки його працездатності. Розв’язувались задачі стаціонарної та нестационарної теплопровідності для областей, для яких існують аналітичні розв’язки. Чисельний розв’язок отримано чисельно за трьохвимірною схемою МСЕ, а аналітичний – за відповідними схемами стрижнів, пластин, труб та кубів. Як приклад, наведемо результати розв’язання задачі остигання (термодинамічні сили відсутні) тонкої квадратної пластини зі стороною 50 мм. На всіх контурах пластини підтримується температура 10 С. Початковий розподіл температури задано функцією

$$u(x, y, t) = \frac{xy(x - 50)(y - 50)}{1000} + 10. \quad (16)$$

До моделювання було залучено СЕ сітку з 1250 елементів, крок інтегрування за часом 1 с.

Наведемо результати розв’язання задачі в момент часу  $t = 100$  с для перерізу  $y = 26$  мм. Отримані результати наведено в табл. 1 та на рис 2:

Рис. 1 демонструє перерозподіл температурного поля за 100 с. Рис. 2 містить розподіл температури за координатою в перетині площиною  $y = 26$  мм. при  $t = 100$  с, де 1 – розв’язок методом Фур’є, 2 – розв’язок МСЕ.

Далі розглянемо цю ж саму задачу остигання нерівномірно нагрітої пластини, але крайові умови матимуть такий вигляд:

$$u(x, 0, t) = 10^\circ \text{C}; \quad u(x, 50, t) = 100^\circ \text{C}. \quad (17)$$

Початкові умови задано функцією:

$$u(x, y, 0) = -y(y - 50) + 10 + \frac{y}{50}(90). \quad (18)$$

Таблиця 1 – Порівняння аналітичного та чисельного розв’язку

Крок по сітці h, мм	МСЕ, °С	Аналітичний розв’язок, °С	Крок по сітці h	МСЕ, °С	Аналітичний розв’язок, °С
0	10	10.001	26	196.496	197.584
2	33.5654	33.703	28	193.591	194.661
4	56.7456	57.018	30	187.822	188.858
6	79.1634	79.567	32	179.27	180.256
8	100.457	100.984	34	168.057	168.978
10	120.287	120.93	36	154.347	155.189
12	138.344	139.092	38	138.344	139.091
14	154.347	155.189	40	120.288	120.93
16	168.057	168.978	42	100.457	100.984
18	179.27	180.256	44	79.1634	79.566
20	187.822	188.858	46	56.7456	57.018
22	193.591	194.662	48	33.5654	33.703
24	196.496	197.584	50	10	10

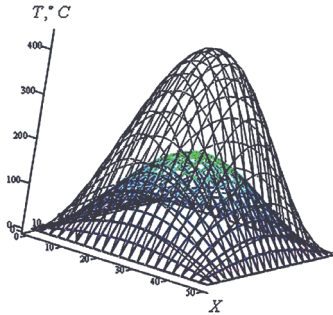


Рисунок 1 – Зміння температури за часом

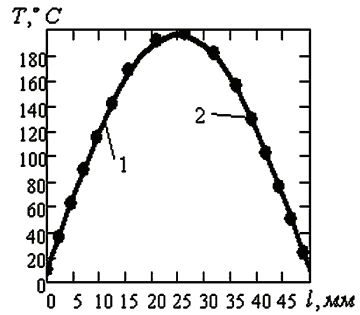


Рисунок 2 – Розподіл температури у перерізі пластини

Розв'язок цієї задачі порівняно як з аналітичним розв'язком, так і з чисельним, отриманим за допомогою програмного комплексу ANSYS.

Як приклад, розглянемо еволюцію значення температури у вузлі, що знаходиться на перетині площин ( $x = 26$  мм,  $y = 26$  мм) від початкового моменту до моменту часу  $t = 1000$  с.

Таблиця 2 – Порівняння аналітичного та чисельних розв'язків (МСЕ та ANSYS)

Час $t$ , с	Розв'язок ANSYS, °C	МСЕ, °C	Аналітичний розв'язок, °C
10	660.82	660.814	660.801
20	640.90	640.883	640.801
30	621.12	621.079	620.823
40	601.57	601.491	600.949
50	582.33	582.208	581.305
60	563.48	563.309	562.015
70	545.08	544.858	543.176
80	527.18	526.904	524.853
90	509.79	509.476	507.09
100	492.95	492.596	489.909
110	476.66	476.271	473.319
...	...	...	...
900	76.628	76.4626	75.235
910	75.876	75.7148	74.522
920	75.152	74.9955	73.836
930	74.456	74.3036	73.176
940	73.787	73.6379	72.542
950	73.142	72.9976	71.933
960	72.522	72.3816	71.347
970	71.926	71.789	70.784
980	71.352	71.219	70.243
990	70.800	70.6706	69.722

В табл. 2 наведено частину (початковий та кінцевий проміжки часу) від усього температурного розподілу, знайденого МСЕ, програмним комплексом ANSYS (застосовано однакові сітки та однакові кроки інтегрування за часом) за методом Фур'є. Рис. 3 містить дані порівняння похибки розв'язків МСЕ за створеною програмою та програмним комплексом ANSYS.

На рис. 3 позначено 1 – різниця аналітичного розв'язку та чисельного (ANSYS), 2 – різниця аналітичного розв'язку та чисельного (МСЕ).

Отримані в двох розглянутих прикладах дані свідчать про цілком задовільний ступінь відповідності чисельних та аналітичних результатів. З порівняння результатів табл. 2 заключаємо, що у розглянутому прикладі створена в роботі програма працює дещо точніше, ніж програмний комплекс ANSYS.

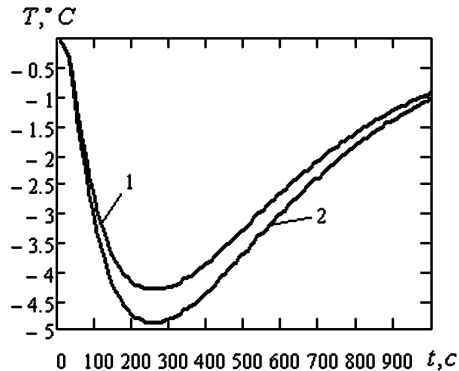


Рисунок 3 – Абсолютна похибка розв'язків МСЕ за створеною програмою та програмним комплексом ANSYS

**Висновки.** Проведене порівняння особистих чисельних результатів та результатів, отриманих іншим СЕ засобом, а також аналітичних, дозволяє зробити висновок про цілком задовільний ступінь достовірності даних, що одержуються з застосуванням розробленого СЕ програмного засобу для розв'язання нестационарних трьохвимірних завдань теплопровідності, а також про можливість його застосування в моделюванні більш складних завдань термосилового навантаження.

**Список літератури:** 1. Галлагер Р. Методы конечных элементов : пер. с англ./ Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с. 2. Деклу Ж. Методы конечных элементов: пер. с франц. Квасова Б. И. / Ж. Деклу. – М.: Мир, 1976. – 93 с. 3. Морган О. Конечные элементы и аппроксимации / О. Морган, К. Зенкевич. – М.: Мир, 1986. – 309 с. 4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов/ Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 389 с. 5. Самарский А.А. Уравнения математической физики : 5-е изд. / А. А. Самарский, А.Н.Тихонов. – М.: Наука, 1977. – 728 с. 6. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными : пер. с англ. В. Е. Кондрашова, В. Ф. Курякина / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М.: Мир, 1981. – 212 с. 7. Д.В. Бреславский Программные средства для конечноэлементного моделирования двумерных задач теории ползучести / Д.В. Бреславский, Ю.Н. Корытко, П.М. Лисак // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Х.: НТУ «ХПІ», 2007. – № 38. – С. 24-29.

Надійшла до редакції 01.12.2012