

Я.В. ПАВЛЮК, канд. техн. наук, інститут механіки ім. С.П. Тимошенка
НАН України, Київ, Україна

ДО РОЗРАХУНКУ РЕЛАКСАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ОДНОВІСНОМУ ДЕФОРМУВАННІ

Розглянуто задачу визначення релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів при різних режимах нестационарного деформування, а саме в умовах стаціонарного, одноступеневого і циклічного деформування. Розрахунок будується на основі нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю за рахунок використання діаграми миттєвого деформування, як ізохрони для нульового моменту часу і згладжуючих кубічних сплайнів в якості апроксимації нелінійних діаграм миттєвого деформування, що задають нелінійність моделі. Програма навантаження реалізується у вигляді послідовності елементарних навантажень, що задаються за допомогою одиничних функцій Хевісайда. Розв'язані і експериментально апробовані задачі розрахунку деформацій повзучості і релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одного ступеневого навантаження, часткового розвантаження, а також циклічного навантаження.

Ключові слова: нелінійна в'язкопружність, нелінійна повзучість, нелінійна релаксація, дробово-експоненційне ядро спадковості, нелінійно-в'язкопружні матеріали, нестационарне навантаження.

Вступ. Основне завдання одновимірної теорії повзучості формується як задача побудови за допомогою деяких операторів часу рівнянь зв'язку між деформаціями і напруженнями як скалярними величинами [1]. При цьому передбачається, що серія експериментальних кривих повзучості при постійних напружених містить всі необхідні дані для ідентифікації параметрів будь-якої феноменологічної теорії повзучості. Для перевірки таких теорій використовуються, як правило, результати зіставлення розрахункових і експериментальних кривих релаксації і кривих повзучості при змінних режимах навантаження. Рішення задач релаксації і нестационарної повзучості представляє і певний практичний інтерес, оскільки відображає реальні умови експлуатації багатьох матеріалів та елементів конструкцій.

Для задання залежності між деформаціями, напруженнями і часом широкого поширення набули теорії повзучості спадкового типу, що дозволяють врахувати історію навантаження [2-5]. Основна складність, яка виникає при використанні спадкової теорії, пов'язана з вибором ядра інтегрального рівняння, знаходженням відповідної резольвенти і визначенням параметрів ядра. На даний час однією із найбільш перспективних теорій вважається нелінійна теорія Работнова [1]. Визначальні рівняння теорії отримані виходячи з умов подібності ізохронних діаграм повзучості [6, 7]. В роботі [8] умова подібності

ізохронних діаграм повзучості розширена за рахунок введення в умову подібності і відповідно у визначальні рівняння теорії експериментальної діаграми миттєвого деформування. Отримані в результаті визначальні рівняння апробовані на задачах розрахунку деформацій повзучості ряду нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов нестационарного навантаження [9]. У даній роботі вирішується задача розрахунку деформацій повзучості за умов стаціонарного навантаження та релаксації напружень за умов стаціонарного, одноступеневого та циклічного деформування.

Постановка задачі дослідження. Об'єкт дослідження

Визначальні рівняння в нелінійній теорії в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю задаються співвідношеннями [1]

$$\begin{cases} \varphi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau; \\ \sigma(t) = \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\varphi_0(\varepsilon(\tau))d\tau, \end{cases} \quad (1.1)$$

де $\varepsilon(t)$, $\varepsilon(\tau)$ – повна деформація, що містить пружну компоненту ε^e і компоненту повзучості ε^c в моменти часу t і τ ; $\varphi_0(\cdot)$ – функція, що задає діаграму миттєвого деформування і визначається експериментально; λ – реологічний параметр ($\lambda > 0$); $K(t-\tau)$, $R(t-\tau)$ – ядра повзучості і релаксації відповідно.

Нелінійність процесів повзучості заданих рівнянням (1.1) визначається видом функції $\varphi_0(\cdot)$, котра в роботі задається за допомогою згладжуючих кубічних сплайнів виду

$$\varphi_0(\varepsilon_e) = a_{0,j} + a_{1,j}\varepsilon_e + a_{2,j}\varepsilon_e^2 + a_{3,j}\varepsilon_e^3, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.2)$$

де $a_{0,j}$; $a_{1,j}$; $a_{2,j}$; $a_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що мають розмірність напруження і залежать від інтервалу розподілу осі деформацій.

Ядра спадковості $K(t-\tau)$ та $R(t-\tau)$ задаються дробово-експоненційними функціями, так що

$$K(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.3)$$

а

$$R(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)^n (t-\tau)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1+\alpha)(1+n)]}, \quad (1.4)$$

де α , β – параметри ядер, що підлягають визначенню із експерименту ($-1 < \alpha < 0$; $\beta > 0$).

Використовуючи подальшу процедуру обернення функцій, визначальні рівняння (1.1) записуються у формі

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \psi_0 \left[\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right]; \\ \sigma(t) = \varphi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau) \varphi_0(\varepsilon(\tau)) d\tau, \end{cases} \quad (1.5)$$

де $\psi_0(\cdot) = \varphi_0^{-1}(\cdot)$ – обернення функції $\varphi_0(\cdot)$, яке задається співвідношенням

$$\varphi_0(\sigma) = b_{0,j} + b_{1,j}\sigma + b_{2,j}\sigma^2 + b_{3,j}\sigma^3; \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

де $b_{0,j}, b_{1,j}, b_{2,j}, b_{3,j}$ – коефіцієнти сплайну, що апроксимують обернену функцію $\varphi_0^{-1}(\cdot)$.

Довільний закон зміни напружень σ_t та деформацій ε_t в момент навантаження τ задається у вигляді суми множин різних значень сталих напружень σ_k та деформацій ε_k

$$\begin{cases} \sigma(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \sigma_k; \\ \varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(t-\tau_k) - h(t-\tau_{k+1})) \varepsilon_k, \end{cases} \quad (1.7)$$

де $h(\cdot)$ – одинична функція Хевісайда, що має розрив першого роду за умови $t = \tau$; t – момент спостереження ($t \geq \tau$).

В роботі в рамках рівнянь (1.5) розв'язується задача розрахунку релаксації напружень за умов стаціонарного деформування для склопластику ТС-8/3-250 під кутом 45° до напрямку армування, шаруватого пластику, полівінілхлоридного пластикату, поліетилену високої щільності та нестационарного деформування для плексигласу. Результати розрахунків зіставляються з експериментальними даними запозиченими з [2, 10, 11, 12, 13, 14].

Задача включає експериментальне обґрунтування гіпотези подібності для досліджуваних матеріалів, визначення параметрів входять у визначальне рівняння і експериментальну апробацію моделі на прикладі розрахунку релаксації напружень за умов стаціонарного та нестационарного деформування.

2 Обґрунтування існування єдиної ізохронної діаграми деформування

Визначальні рівняння моделі в'язкопружності побудовані виходячи із умови існування єдиної ізохронної діаграми деформування, що відображає подібність ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування. Нелінійність моделі визначається нелінійністю діаграми миттєвого деформування і не залежить від часу. Існування єдиної ізохронної діаграми обґрунтовується експериментально.

Єдина ізохронна діаграма деформування відображає подібність ізохронних діаграм повзучості $\varphi(\varepsilon)$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon)$. Подіб-

ність діаграм $\varphi_t(\varepsilon)$ і $\varphi_0(\varepsilon)$ встановлюється у площині « $\varphi - \varepsilon$ » для кожного із фіксованих рівнів деформацій ε_i в інтервалі $i = \overline{1, q}$ по параметру t_j в інтервалі $j = \overline{1, \ell}$. В цьому випадку умова подібності j -ої ізохронної діаграми повзучості $\varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ і діаграми миттєвого деформування $\varphi_0(\varepsilon_i, 0)$ записується у вигляді

$$\varphi_0(\varepsilon_i, 0) = (1 + G(t_j)) \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j), \quad (2.1)$$

де $(1 + G(t_j))$ – функція подібності, що визначається для кожної j -ої ізохронної діаграми повзучості. Функції $\varphi_0(\cdot)$ і $\varphi_t(\cdot)$ задають величини напруження σ_i по діаграмі миттєвого деформування і по ізохронних діаграмах повзучості відповідно для кожного із моментів часу t_j .

Величина $\overline{1 + G(t_j)}$ визначається із співвідношення

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \{\varphi_0(\varepsilon_i, 0) \cdot \varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}}{\sum_{i=1}^q \{\varphi_t(\varepsilon_i, t_j)\}^2}, \quad (2.2)$$

яке усереднює функції подібності $(1 + G(t_j))$, знайдені для кожної j -ої ізохронної діаграми повзучості, і дозволяє розрахувати дискретні значення функції подібності і відповідно дискретні значення приведених ізохронних діаграм повзучості.

Замінюючи в умові подібності (2.2) функцію подібності $(1 + G(t_j))$ на її осереднене значення $\overline{1 + G(t_j)}$, для визначення приведених дискретних значень $\overline{\varphi_t(\varepsilon_i, 0)}$ ізохронних діаграм повзучості отримуємо співвідношення

$$\overline{\varphi_t(\varepsilon_i, 0)} = \overline{(1 + G(t_j))} \varphi_t(\varepsilon_i(t), t_j). \quad (2.3)$$

Вважається, що єдина ізохронна діаграма обґрунтована із похибкою δ , якщо приведені ізохронні діаграми повзучості не виходять за межі інтервалу, обмеженого величиною δ по відношенню до діаграми миттєвого деформування. З достатньою для практичних розрахунків точністю величина δ може бути прийнята рівною $\pm 5\%$.

Результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування для розглянутих в'язкопружних матеріалів виконано на рис. 1.

Видно, що зведені ізохронні діаграми повзучості (точки) не виходять за межі інтервалу у $\pm 5\%$ (штрихові лінії) від діаграми миттєвого деформування (суцільні лінії). Це свідчить, що гіпотеза єдиної ізохронної діаграми деформування обґрунтована із похибкою $\delta = 10\%$.

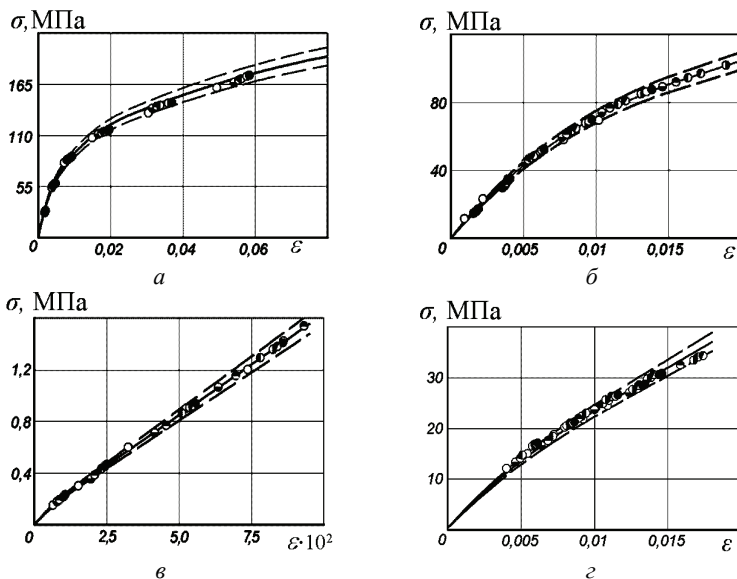


Рисунок 1 – Результати експериментального обґрунтування концепції єдиної ізохронної діаграми деформування на прикладі склопластику TC-8/3-250, $\varphi = 45^\circ$ (а) для $t_j = 20$ (○), 30 (◐), 72 (◑), 132 (●) годин, шаруватого пластику Grade C (б) для $t_j = 20114$ (○), 5506 (◐), 10899 (◑), 16966 (●), 21011 (◐), 82035 (●) годин, полівінілхлоридного пластику (в) $t_j = 0,32$ (○), 1,23 (◐), 2,74 (◑), 6,07 (●), 8,47 (◐), 19,6 (●) годин, плексигласу (г) $t_j = 25$ (○), 183 (◐), 553 (◑), 800 (●), 1607 (◐), 9320 (●) годин

3 Визначення параметрів моделі

Параметри α , β , λ , що відповідають за нелінійно-в'язкопружне деформування у визначальних рівняннях нелінійної повзучості та релаксації, визначаються із умови існування єдиної ізохронної діаграми миттєвого деформування по усередненій функції подібності $\overline{1+G(t_j)}$ з використанням експериментальних даних на повзучість при постійних напруженнях.

В якості критерію найкращого узгодження функції подібності (2.2) із експериментальними значеннями усередненої функції подібності $(\overline{1+G(t_j)})_{\text{exp}}$ прийнято мінімум квадратичного відхилення між розрахунковими і експериментальними значеннями усередненої функції подібності $(\overline{1+G(t_j)})_{\text{exp}}$. Задача зводиться до знаходження мінімуму функціоналу

$$F(\alpha, \beta, \lambda) = \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \overline{1+G(t_j)}_{\text{exp}} - \left[1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t_j^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha)]} \right] \right\}^2. \quad (3.1)$$

Мінімізація функціоналу (3.1) здійснюється із використанням ітерацій-

ного методу Лівенберга-Маркардта [15]. Значення параметрів α , β , λ , що розраховано згідно (3.1), наведені у табл. 1. На рис. 2 показано співставлення експериментальних даних усередненої функції подібності $1 + \overline{G}(t_j)$ із розрахунковими.

Як видно із співставлення розрахункових даних із експериментальними отримано задовільне узгодження результатів.

Таблиця 1 – Визначальні параметри моделі

В'язкопружні матеріали	Параметри ядра		
	α	β , год ^{-(1+α)}	λ , год ^{-(1+α)}
Шаруватий пластик Grade C	-0,864	0,052	0,416
Склопластик ТС 8/3-250 $\varphi = 45^\circ$	-0,651	0,195	0,124
Поліетилен високої щільності	-0,209	1,233	0,784
Полівінілхлоридний пластикат	-0,504	0,339	0,435
Плексиглас 1А	-0,591	0,014	0,02

На рис. 2 показано співставлення експериментальних даних усередненої функції подібності $1 + \overline{G}(t_j)$ (точки) із розрахунковими (штрихові лінії) для склопластику ТС-8/3-250 $\varphi = 45^\circ$ (а), шаруватого пластику Grade C (б). Як видно із співставлення розрахункових даних із експериментальними отримано задовільне узгодження результатів.

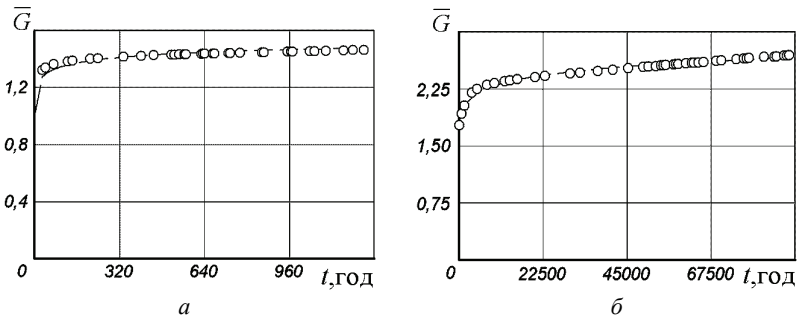


Рисунок 2 – Співставлення експериментальних даних усередненої функції подібності $1 + \overline{G}(t_j)$ (точки) із розрахунковими (штрихові лінії): а – для склопластику ТС-8/3-250 $\varphi = 45^\circ$, б – для шаруватого пластику Grade C (б)

Значення коефіцієнтів сплайн апроксимації, котрі здають зворотну діаграму миттєвого деформування у рівнянні (1.2).

Значення коефіцієнтів сплайн апроксимації, котрі задають зворотну діаграму миттєвого деформування у рівнянні (1.2) $\varphi_0(\cdot)$ приведені в табл. 2

Таблиця 2 – Коефіцієнти сплайн апроксимації

Матеріал	j	σ_j , МПа	b_3 , МПа ⁻³	b_2 , МПа ⁻²	b_1 , МПа ⁻¹	b_0
Шаруватий пластик Grade C			$1,1394 \cdot 10^{-8}$	$-4,6547 \cdot 10^{-7}$	$11,50 \cdot 10^{-5}$	$-2,4658 \cdot 10^{-5}$
Склопластик ТС-8/3-250 при $\varphi = 45^\circ$	0	0	$6,4951 \cdot 10^{-10}$	$3,5238 \cdot 10^{-7}$	$5,2862 \cdot 10^{-5}$	0
	1	46	$1,84845 \cdot 10^{-8}$	$-2,1232 \cdot 10^{-6}$	$16,7406 \cdot 10^{-5}$	$-17,70 \cdot 10^{-4}$
	2	84	$1,59732 \cdot 10^{-8}$	$-1,4848 \cdot 10^{-6}$	$11,3308 \cdot 10^{-5}$	$-24,0 \cdot 10^{-5}$
	3	117	$6,2612 \cdot 10^{-9}$	$1,9318 \cdot 10^{-6}$	$28,7333 \cdot 10^{-5}$	$15,422 \cdot 10^{-3}$
	4	160	$2,47375 \cdot 10^{-8}$	$-6,958 \cdot 10^{-6}$	$11,38407 \cdot 10^{-4}$	$-60,800 \cdot 10^{-3}$
	5	195				
Поліетилен високої щільності			$1,85 \cdot 10^{-5}$	$-17,0 \cdot 10^{-5}$	$24,67 \cdot 10^{-4}$	$-75,0 \cdot 10^{-5}$
Полівінілхлоридний пластикат	0	0	$75,61956 \cdot 10^{-3}$	$10,72626 \cdot 10^{-3}$	$40,963237 \cdot 10^{-3}$	0
	1	0,17	$-69,2558 \cdot 10^{-3}$	$85,79805 \cdot 10^{-3}$	$27,996293 \cdot 10^{-3}$	$74,7 \cdot 10^{-5}$
	2	0,40	$-51,91 \cdot 10^{-5}$	$16,4146 \cdot 10^{-4}$	$62,341469 \cdot 10^{-3}$	$-39,3 \cdot 10^{-4}$
	3	1,5				
Плексиглас 1А			$8,653 \cdot 10^{-9}$	$3,88276 \cdot 10^{-6}$	$33,08803 \cdot 10^{-5}$	$-11,0 \cdot 10^{-5}$

4 Повзучість за умов стаціонарного навантаження

Умова навантаження постійним у часі напруженнями при варіюванні величини напруження σ_k задається співвідношенням

$$\sigma(t) = h(t)\sigma_k; \quad (k = \overline{1, m}), \quad (4.1)$$

що отримується із (1.5) при умові $t_{k+1} > t$.

Визначальне рівняння повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов постійних напружень, виходячи із (1.5) із урахуванням (4.1), записується у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & b_{0,j} + b_{1,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) + \\ & + b_{2,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^2 + \\ & + b_{3,j} \cdot h(t)\sigma_k \cdot \left(1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right)^3; \quad (j = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

де коефіцієнти $b_{0,j}$, $b_{1,j}$, $b_{2,j}$, $b_{3,j}$ визначаються за результатами апроксимації функції $\psi_0(\cdot)$ згладжуючим кубічним сплайном (1.6).

В режимі стаціонарного навантаження (4.1) на підставі рівняння (4.2), розраховано та експериментально апробовано деформації повзучості нелінійно-в'язкопружних композитів та їх компонентів для декількох рівнів постійних напружень σ_k . Результати розрахунків наведені на рис. 3 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками для склопластику ТС-8/3-

250 (а) при напруженнях $\sigma_k = 19,9$ (○), 39,8 (◐), 59,7 (◑), 79,6 (◒), 99,5 (◓), 119,4 (◔) МПа, для шаруватого пластику (б) при напруженнях $\sigma_k = 6,4$ (○), 13,1 (◐), 19,65 (◑), 26,2 (◒), 32,75 (◓), 39,3 (◔) МПа, для полівінілхлоридного пластикату (в) при напруженнях $\sigma_k = 0,125$ (○), 0,25 (◐), 0,5 (◑), 0,75 (◒), 1,0 (◓) МПа та плексигласу (г) при напруженнях $\sigma_k = 11$ (○), 13,78 (◐), 17,23 (◑), 18,58 (◒), 20 (◓), 22,44 (◔), 25,51 (◕) МПа.

Результати розрахунків деформацій стаціонарної повзучості, що виконані за рівнянням (4.2), достатньо задовільно, як це видно із рис. 3, узгоджується із експериментальними даними. Найбільша похибка складає 10 % і отримана для плексигласу рис. 3, г при $\sigma = 25,5$ МПа. В цілому, у межах рівняння (4.2) враховуються особливості повзучості нелінійно-в'язкопружно-пластичних матеріалів як в області сингулярності, коли при $t \rightarrow 0$ швидкість повзучості $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow \infty$, так і при $t \rightarrow \infty$, коли швидкість повзучості $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$, що відповідає врахуванню ефекту затухаючої пам'яті.

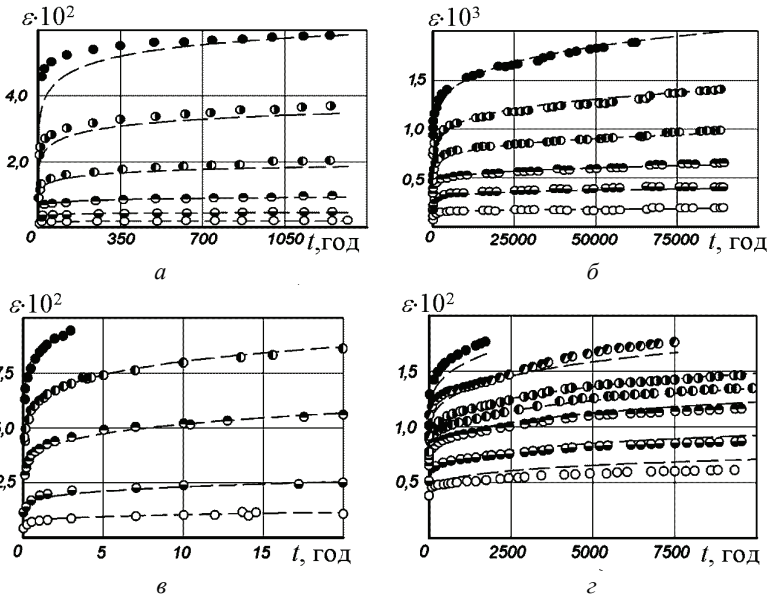


Рисунок 3 – Результати розрахунків (штрихові лінії), експериментальні дані нанесені точками: а – для склопластику ТС-8/3-250, б – для шаруватого пластику; в – для полівінілхлоридного пластикату; г – для плексигласу

5 Релаксація напружень

Найбільш обґрунтована експериментальна перевірка застосування дробово-експоненційного ядра (1.3) і параметрів ядра, знайдених із даних на повзучість, здійснюється на задачі із розрахунку релаксації напружень. В режимі релаксації напружень початкова умова навантаження $\tau = 0$ задається спів-

ВІДНОШЕННЯМ

$$\varepsilon(t) = h(t - t_1)k_1; \quad (k = 1, m), \quad (5.1)$$

де $h(t)$ – одинична функція Хевісайда ($h(t - t_1) = 0$ при $t - t_1 < 0$ і $h(t) = 1$ при $t - t_1 > 0$).

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов постійних деформацій, виходячи із (1.5) із урахуванням (5.1), записується у вигляді

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^3 a_{i,j}(\varepsilon_1)^j \left(h(t - t_1) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right). \quad (5.2)$$

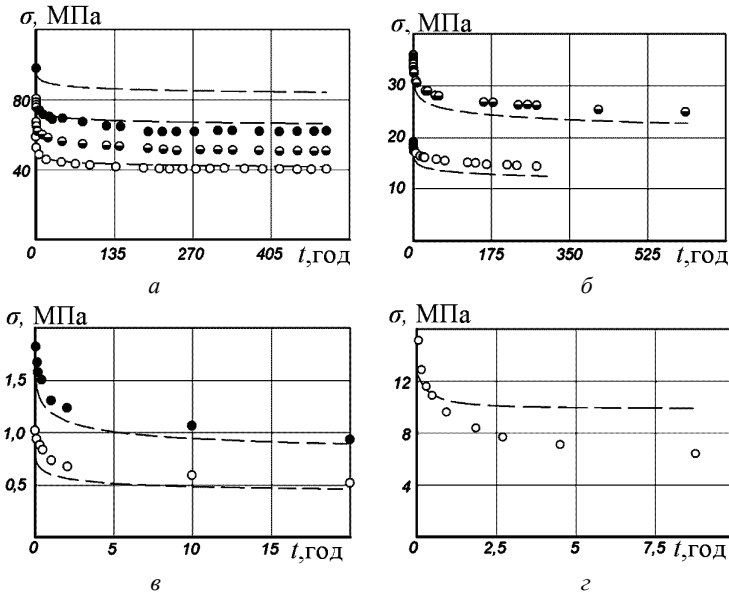


Рисунок 4 – Результати розрахунків (штрихові лінії), експериментальні дані нанесені точками: а – для склопластику ТС-8/3-250 при $\varphi = 45^\circ$; б – для шаруватого пластику; в – для полівінілхлоридного пластикату; з – для поліетилену високої щільності

В режимі релаксації напружень на підставі рівняння (5.2), розраховано та експериментально апробовано релаксацію напружень нелінійно-в'язкопружних композитів та їх компонентів для декількох рівнів постійних деформацій ε_k . Результати розрахунків наведені на рис. 4 штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками для склопластику ТС-8/3-250 при $\varphi = 45^\circ$ (а) початкові напруження складали $\sigma_k = 59,7$ (○), 79,6 (⊖), 99,5 (●) МПа, для шаруватого пластику (б) початкові напруження складали $\sigma_k = 59,85$ (○), 37,85 (⊖) МПа, для полівінілхлоридного пластикату (в) початкові напру-

ження складали $\sigma_k = 0,81$ (○), $1,65$ (●) МПа та для поліетилену високої щільності (z) початкові напруження складали $\sigma_k = 15,8$ (○) МПа.

У цілому, як видно із рис. 4 результати розрахунків за побудованими визначальними рівнянням (5.2) нелінійної релаксації низки в'язкопружних матеріалів достатньо задовільно узгоджуються із експериментальними даними.

6 Розрахунок релаксації напружень за умов одноступеневого деформування

Умова навантаження (1.7) для режиму однократного ступеневого деформування конкретизується у вигляді

$$\varepsilon(t) = h(t - t_1)\varepsilon_1 + h(t - t_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad (6.1)$$

де ε_1 – початкові деформації, прикладені в момент часу $\tau = 0$; ε_2 – деформація прикладена в момент часу $\tau = t_1$.

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одноступеневого деформування, виходячи із (1.5) із урахуванням (6.1), записується у вигляді

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^3 a_{i,j} \left(\varepsilon(t)^i - \lambda \left[(\varepsilon_1)^i \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_1)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right) + (\varepsilon_2)^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda + \beta)(t - t_2)^{(1+\alpha)(1+n)}}{\Gamma[1 + (1+\alpha)(1+n)]} \right] \right). \quad (6.2)$$

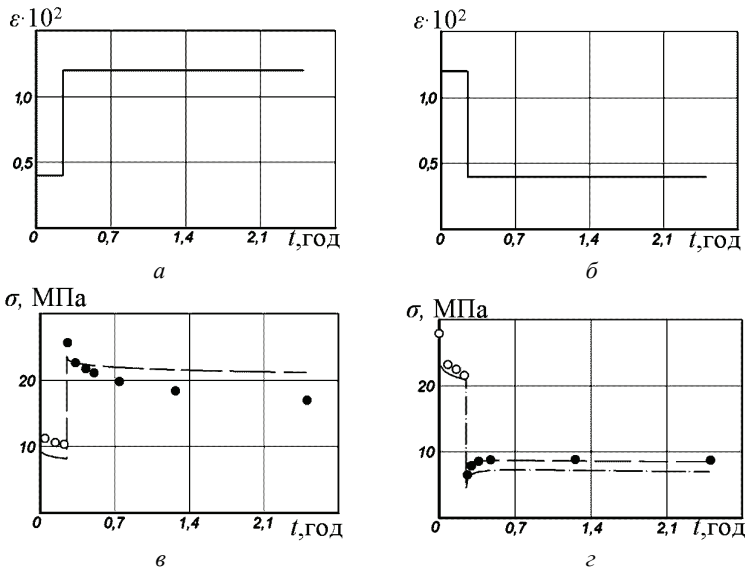


Рисунок 5 – Результати розрахунків програм навантаження

Результати розрахунків програм навантаження наведені на рис. 5, а, б штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками для плексигласу. Режим деформування плексигласу за умов одноступеневого деформування включав початкове деформування складало $\varepsilon_1 = 0,004$ (○) із послідовним збільшенням деформацій в момент часу $t_1 = 0,25$ до величини $\varepsilon_2 = 0,012$ (●) та режим часткового розвантаження від деформацій $\varepsilon_1 = 0,012$ (○) із послідовним частковим розвантаженням до деформацій в момент часу $t_1 = 0,25$ до величини $\varepsilon_2 = 0,004$ (●). Розрахунки здійснено із використанням значень параметрів α, β, λ , що наведені в табл. 1. Експериментальні дані взято відповідно із [14].

7 Розрахунок релаксації напружень за умов циклічного деформування

Умова навантаження (1.7) для режиму циклічного деформування, що задається програмою навантаження, а конкретизується у вигляді рис. 6 а, б, де ε_1 – початкове значення деформації на момент часу t_1 ; $\Delta\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k$ – приріст ($\varepsilon_{k+1} > \varepsilon_k$) або зменшення ($\varepsilon_{k+1} < \varepsilon_k$) деформації в момент часу t_k ; ν – кількість циклів деформування; $\Delta\varepsilon_k$ – амплітуда напруження у циклі; t_0 – тривалість напівциклу навантаження.

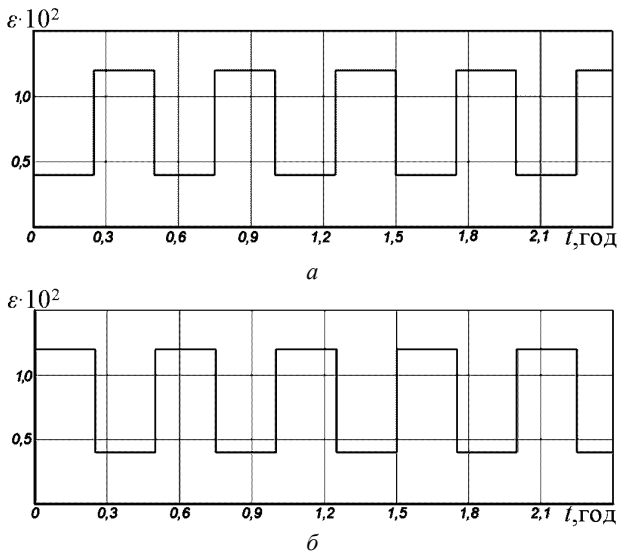


Рисунок 6 – Умова навантаження (1.7) для режиму циклічного деформування

Визначальне рівняння релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів за умов циклічного деформування, виходячи із (1.5) із урахуванням (7.1), записується у вигляді:

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^3 a_{i,j} \left\{ \left(h(t-t_i) \varepsilon_1(0) \pm \sum_{k=1}^{2\nu-1} h(t-t_{k+1}) |\Delta \varepsilon_k| \right)^i - \lambda \left[\sum_{k=1}^{2\nu-1} (\varepsilon_k)^j \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_k)^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} - \right. \right. \right. \quad (7.2)$$

$$\left. \left. \left. - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_{k+1})^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} \right) + (\varepsilon_{2\nu})^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda+\beta)(t-t_{2\nu})^{(1+\alpha)(n+1)}}{\Gamma[1+(1+\alpha)(n+1)]} \right] \right\},$$

Результати розрахунків наведені на рис. 7 для порівняння результатів розрахунків із експериментальними даними виконано для плексигласу штриховими лініями, а експериментальні дані нанесені точками. Розрахунки здійснено із використанням значень параметрів α , β , λ , що наведені в табл. 1. Експериментальні дані взято відповідно із [14]. Величина деформацій в циклі $\varepsilon_0 = 0,008$, тривалість півциклу $t_0 = 0,25$ години, кількість циклів навантаження $\nu = 5$.

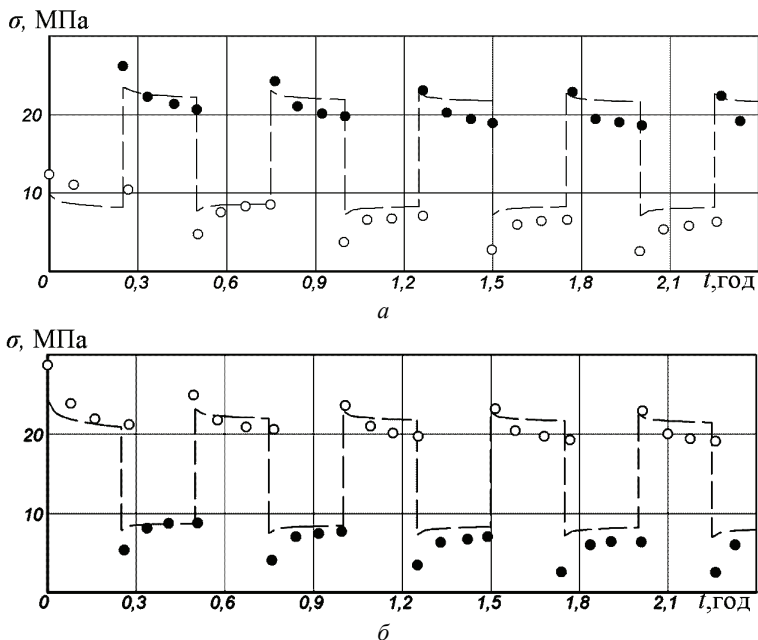


Рисунок 7 – Результати розрахунків для режиму циклічного деформування

8 Обговорення результатів

Як видно із результатів розрахунків, отримано якісне узгодження, експериментальних даних із розрахунковими, варто також відмітити, при розрахунках використано параметри ядер, визначених із експерименту на повзучість при постійних напруженнях, незважаючи на те, що сам експеримент проводився на іншому обладнанні.

В цілому, як видно з даних, представлених на рис. 3-5, 7, отримано якісне узгодження результатів розрахунку деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних матеріалів при різних режимах нестационарного деформування з експериментальними даними. Розрахунки виконані із використанням нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю за рахунок використання згладжуючих кубічних сплайнів у якості апроксимацій нелінійних діаграм миттєвого деформування, що задають нелінійність моделі, та дробово-експоненційного ядра спадковості Работнова і параметрів ядра знайдених із експериментів при постійних напруженнях.

Розраховано деформації повзучості за умов стаціонарного навантаження, релаксацію напружень за умов стаціонарного, одноступеневого та циклічного деформування. Максимальна похибка у задачах розрахунку нестационарної релаксації складала для плексигласу в режимі циклічного деформування і становить 36 %, це пов'язано із тим, що в процесі циклічного деформування, з'являються деформації після дії, що не встигають зникнути за півцикл розвантаження, ці деформації накопичуються із кожним циклом. Варто також відмітити, при розрахунках використано параметри ядер, визначених із експерименту на повзучість при постійних напруженнях, незважаючи на те, що сам експерименти на релаксацію проводились на іншому обладнанні.

Нелінійна-модель в'язкопружності дала можливість врахувати ряд механічних ефектів, які виникають в результаті нестационарного деформування. Так після часткового розвантаження на рис. 5, 2 видно, що величина напружень спочатку зростає хоча деформації залишаються постійними. Цей ефект пояснюється тим, що внаслідок різкого стискання матеріал чинить опір. Також для режиму часткового розвантаження здійснювалось порівняння результатів розрахунку виконаного за допомогою принципу суперпозиції їх на рис. 5, 2 нанесено штрих-пунктирними лініями. Як бачимо метод сумування кривих дав більше розходження між експериментальними і розрахунковими даними, похибка розрахунку складала 21%. Як видно із рис. 7 в процесі циклічного деформування, величина напружень із кожним циклом зменшується, на відміну від режиму циклічної повзучості, де деформації зростали, пояснюється тим, що відбувається зміцнення матеріалів. Даний ефект якісно враховується моделлю.

Висновки. Задача із побудови системи розв'язкових рівнянь для прогнозування деформацій повзучості та релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних конструкційних матеріалів за умов нестационарного одновісного розтягу та стиску залишається одною із найбільш актуальних в механіці твердого деформівного тіла і має велике теоретичне і прикладне значення. Успішний розв'язок цієї задачі пов'язаний із необхідністю створення надійних методів із розрахунку напружено-деформівного стану композитних матеріалів і конструкцій із них в нелінійній області довготривалого в'язкопружного деформування за умов нестационарного навантаження і прогнозування

на цій основі довготривалої міцності елементів конструкцій. Задовільне узгодження результатів розрахунку релаксації напружень нелінійно-в'язкопружних матеріалів із експериментальними даними отримано, перш за все через використання нелінійної моделі в'язкопружності із незалежною від часу нелінійністю із згладжуючими кубічними сплайнами у якості апроксимацій нелінійних діаграм миттєвого деформування, що задають нелінійність моделі, та дробово-експоненційних функцій, що задають ядра спадковості.

Список літератури: 1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 2. Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. – 1971. – 1. – С. 74-87. 3. Брызгалин Г.И. К проверке теории наследственного возврата // Ползучесть и длительная прочность. – Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1963. – С. 145-147. 4. Брызгалин Г.И. О ползучести при переменных напряжениях // Журнал прикл. механики и техн. физики. – 1962. – 3. – С. 73-77. 5. Golub V.P., Romanov A.V., Romanova N.V. Nonlinear creep and ductile creep rupture of perfectly elastoplastic rods under tension // International Applied Mechanics. – 2008. – Т. 44, 9. – Р. 459-470. 6. Суворова Ю.В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // Механика полимеров. – 1977. – 6. – С. 976-980. 7. Суворова Ю.В., Васильев А.Е., Машинская Г.П. Исследование процессов деформирования органотекстолитов // Механика композитных материалов. – 1980. – 3. – С. 538-556. 8. Голуб В.П. Об одном методе построения определяющих уравнений в теории нелинейной ползучести // Теоретическая и прикладная механика. – 2002. – 36. – С. 23-29. 9. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Фернати П.В. Нелинейная ползучесть вязкоупругих органических волокон при растяжении // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, 7. – С. 102-115. 10. Работнов Ю.Н., Паперник А.Х., Степанычев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250 // Механика полимеров. – 1971. – 3. – С. 391-397. 11. Findley W.N., Khosla G. Application of the superposition principle and theories of mechanical equation of state, strain and time hardening to creep of plastics under changing loads // Journ. of Applied Physics. – 1955. – 26, 7. – P. 821-832. 12. Самарин Ю.П., Сорокин О.В. О ползучести поливинилхлоридного пластика при переменных нагрузках // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195, 2. – С. 333 – 336. 13. Крегерс А.Ф., Вилкс У.К., Лейтмане М.Я. Прямая и обратная ползучесть нелинейного полимерного материала // Механика полимеров. – 1973. – 5. – С. 786-795. 14. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. – М.: Наука, 1973. – 287 с. 15. More J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E. Users guide to minipack // Argonne National Laboratory Publication ANL-80-74. – 1980. – P. 640-650.

Bibliography (transliterated): 1. Rabotnov Yu.N. Polzuchest' elementov konstrukcij. Moscow: Nauka, 1966. 752 Print. 2. Rabotnov Yu.N., Papernik A.H., Stepanychev E.I. Prilozhenie nelinejnoj teorii nasledstvennosti k opisaniyu vremennyh effektov v polimernyh materialah. Mehanika polimerov. 1971. 1. 74-87 Print. 3. Bryzgalin G.I. K proverke teorii nasledstvennogo vozvrata. Polzuchest' i dlitel'naya prochnost'. Novosibirsk, Izd-vo SO AN SSSR, 1963. 145-147 Print. 4. Bryzgalin G.I. O polzuchesti pri peremennyh napryazheniyah. Zhurnal prikl. mehaniki i tehn. fiziki. 1962. 3. 73-77 Print. 5. Golub V.P., Romanov A.V., Romanova N.V. Nonlinear creep and ductile creep rupture of perfectly elastoplastic rods under tension. International Applied Mechanics. 2008. Т. 44, 9. 459-470 Print. 6. Suvorova Yu.V. Nelinejnyye efekty pri deformirovanii nasledstvennyh sred. Mehanika polimerov. 1977. 6. 976-980 Print. 7. Suvorova Yu.V., Vasil'ev A.E., Mashinskaya G.P. Issledovanie processov deformirovaniya organotekstolitov. Mehanika kompozitnyh materialov. 1980. 3. 538-556 Print. 8. Golub V.P. Ob odnom metode postroeniya opredelyayuschih uravnenij v teorii nelinejnoj polzuchesti. Teoreticheskaya i prikladnaya mehanika. 2002. 36. 23-29 Print. 9. Golub V.P., Kobzar' Yu.M., Fernati P.V. Nelinejnaya polzuchest' vyazkouprugih organicheskikh volokon pri rastyazhenii. Prikl. mehanika. 2005. Vol. 41, 7. 102-115 Print. 10. Rabotnov Yu. N., Papernik A.H., Stepanychev E.I. Nelinejnaya polzuchest' stekloplastika TS8/3-250. Mehanika polimerov. 1971. 3. 391-397 Print. 11. Findley W.N., Khosla G. Application of the superposition principle and theories of mechanical equation of state, strain and time hardening to creep of plastics under changing loads. Journ. of Applied Physics. 1955. 26, 7.

821-832 Print. **12.** Samarin Yu.P., Sorokin O.V. O polzuchesti polivinilhloridnogo plastikata pri pere-mennyh zagruzkah. DAN SSSR. 1970. Vol. 195, **2.** 333-336 Print. **13.** Kregers A.F., Vilks U.K., Le-jtane M.Ya. Pryamaya i obratnaya polzuchest' nelinejnogo polimernogo materiala. Mehanika polimerov. 1973. **5.** 786-795 Print. **14.** Bugakov I.I. Polzuchest' polimernyh materialov. Moscow: Nauka, 1973. 287 Print. **15.** More J.J., Garbow B.S., Hillstrom K.E. Users guide to minipack. Argone National Laboratory Publication ANL-80-74. 1980. 640-650 Print.

Поступила (received) 06.10.2014

УДК 517.928 : 536.24

А.М. ПОГРЕБИЦКАЯ, доцент, Национальная академия природоохранного и курортного строительства, Симферополь

НАХОЖДЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ТЕПЛА В ПЛАСТИНЕ ТЕПЛООВОГО РАДИАТОРА С ПОМОЩЬЮ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЕРКИН ПОДХОДА

В работе представлено решение задачи о нахождении плотности теплового потока в пластине радиатора. Цель работы – применение асимптотического гибридного подхода к нелинейным дифференциальным уравнениям, которые описывают процессы теплообмена в различных конструкциях. Для нахождения недостающего значения производной функции найдено замкнутое аналитическое решение.

Ключевые слова: асимптотические методы, двойной гибридный ВКБ-Галеркин метод, плотность теплового потока, пластина теплового радиатора

1 Введение. Большинство математических моделей реальных процессов имеют ряд существенных особенностей, которые не позволяют исследователям получать точные аналитические решения. Такими особенностями являются, например, нелинейности в уравнениях, переменные коэффициенты, границы сложной формы и другие. Для решения подобных задач исследователи вынуждены применять прямые численные или приближенные аналитические методы. Среди приближенных аналитических методов важное место занимают асимптотические методы возмущений с малым параметром, который естественно возникает в уравнениях или вводится искусственно [1, 2].

Как указано в ряде работ [3, 4], одним из эффективных асимптотических подходов являются гибридные методы, идея которых заключается в соединении любого асимптотического разложения (метод возмущений, ВКБ и другие) и метода Галеркина. Использование гибридного асимптотико-численного метода на базе двойного асимптотического разложения в нелинейных

© А.М. Погребницкая, 2014