

Д. А. БЕСЧЕТНИКОВ, студент, НТУ «ХПИ»;
Г. И. ЛЬВОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С БАНДАЖОМ ИЗ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

Розглянута контактна взаємодія циліндрової оболонки з бандажем із композитного матеріалу у рамках класичної теорії тонких оболонок. Вивчена реалізація схем контактної взаємодії залежно від геометричних параметрів оболонки та бандажа.

Ключові слова: циліндрова оболонка, бандаж, композитний матеріал, контакт.

Рассмотрено контактное взаимодействие цилиндрической оболочки с бандажом из композитного материала в рамках классической теории тонких оболочек. Изучена реализация схем контактного взаимодействия в зависимости от геометрических параметров оболочки и бандажа.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, бандаж, композитный материал, контакт.

Contact interaction between a cylinder shell and a band from composite material was considered within the classical theory of thin shells. Implementation of contact interaction schemes depending from geometric parameters of band and shell was studied.

Keywords: cylinder shell, band, composite, contact.

Введение. Анализ работы многих тонкостенных элементов конструкций приводит к необходимости решения контактных задач теории оболочек. Таким задачам посвящено множество работ [1-6], в которых рассматриваются различные теории моделирования тонкостенных элементов: классическая теория, теории типа Тимошенко, теории с учетом поперечного обжатия. Гипотезы деформирования, заложенные в основу той или иной теории, существенно влияют на схемы контактного взаимодействия и на качественный характер решений [4].

Важным является исследование зависимости конфигурации контакта от параметров конструкции и типа используемой теории, поскольку с их изменением, при решении задачи возникает необходимость рассмотрения различных конфигураций контакта, что существенно усложняет процесс решения. Так, в работе [3] такое исследование было выполнено для цилиндрической оболочки с жестким бандажом.

Данная работа посвящена изучению схем контактного взаимодействия для цилиндрической оболочки с деформируемым бандажом из композитного материала в рамках классической теории тонких оболочек.

Такое исследование имеет важное практическое значение, поскольку бандажирование композитными материалами является одним из современных способов ремонта магистральных газопроводов. Конфигурация контакта

в таких ремонтных соединениях влияет на их эффективность вследствие различного распределения напряжений, поэтому изучение схем контактного взаимодействия для этих соединений представляется необходимым.

1 Постановка задачи. Объектом исследования является бесконечно длинная цилиндрическая оболочка, на которую без натяга и зазора установлен бандаж из стеклопластика (рис. 1). Длина бандажа $2L$ является варьируемой величиной, влияющей на конфигурацию контакта. l – длина области возможного контакта. Оболочка нагружается внутренним давлением P . Осевые усилия в оболочке и бандаже отсутствуют. Трение в области контакта не учитывается. Бандаж рассматривается как сплошная ортотропная цилиндрическая оболочка. Предполагается, что поверхности симметрии механических свойств бандажа совпадают с координатными поверхностями цилиндрической системы.

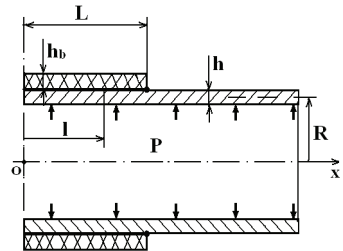


Рисунок 1 – Расчетная схема:
 R – радиус срединной поверхности оболочки; h – толщина оболочки;
 h_b – толщина бандажа

В бандаже из изотропного материала возможны следующие три схемы контактного взаимодействия [5].

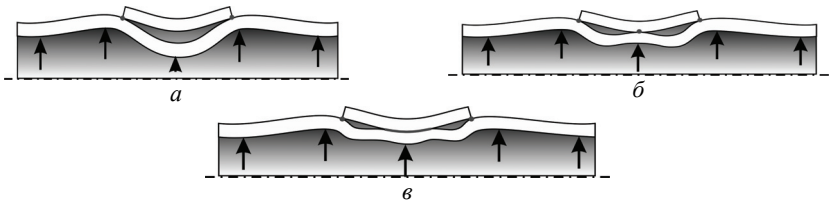


Рисунок 2 – Схемы контактного взаимодействия оболочки с бандажом: a – контакт в двух точках; $б$ – контакт в трех точках; $в$ – контакт по линии и двум точкам

Целью настоящей работы является анализ условий реализуемости для различных схем контакта оболочки с бандажом из ортотропного материала. Для рассматриваемой конструкции необходимо определить критические длины бандажа, при которых осуществляется переход от одной схемы контактного взаимодействия к другой.

2 Уравнения осесимметричной задачи для цилиндрической оболочки из изотропного и ортотропного материалов. Разрешающее уравнение относительно нормального перемещения W для изотропной цилиндрической оболочки представлено в следующем виде [1,2]:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + 4\beta^4 W = \frac{P_3}{D}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}; \quad 4\beta^4 = \frac{Eh}{R^2 D}, \quad (1)$$

где D – цилиндрическая жесткость, p_3 – нормальное давление.

Физические зависимости осесимметричной задачи ортотропной цилиндрической оболочки имеют вид [7,8]:

$$N_1 = (c_{11}\varepsilon_1 + c_{12}\varepsilon_2)h_b; \quad N_2 = (c_{21}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2)h_b; \quad M_1 = \frac{h_b^3}{12}c_{11}\chi_1; \quad M_2 = \frac{h_b^3}{12}c_{12}\chi_1. \quad (2)$$

где N_1, N_2, M_1, M_2 – погонные усилия и моменты на координатных площадках цилиндрической системы (остальные силовые характеристики в осесимметричной постановке равны нулю); c_{11}, c_{12}, c_{22} – компоненты матрицы жесткости для ортотропного материала.

Геометрические уравнения цилиндрической оболочки приведены ниже [2].

$$\varepsilon_1 = \frac{dU}{dx}; \quad \varepsilon_2 = \frac{W}{R}; \quad \chi_1 = -\frac{dW^2}{dx^2}. \quad (3)$$

Коэффициенты жесткости c_{11}, c_{12}, c_{22} могут быть представлены через технические упругие постоянные [8]:

$$c_{11} = \frac{E_1^2}{E_1 - \mu_{12}^2 E_2}; \quad c_{12} = \frac{E_1 E_2 \mu_{12}}{E_1 - \mu_{12}^2 E_2}; \quad c_{22} = \frac{E_1 E_2}{E_1 - \mu_{12}^2 E_2}.$$

Во многих случаях осевое усилие N_1 является известным, что дает возможность исключить из рассмотрения перемещение U :

$$N_2 = \frac{c_{12}}{c_{11}}N_1 + \frac{Wh_b}{R} \left(c_{22} + \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right). \quad (4)$$

Уравнение равновесия цилиндрической оболочки имеет следующий вид [2]:

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} - \frac{N_2}{R} = -p_3. \quad (5)$$

Разрешающее уравнение осесимметричной задачи ортотропной цилиндрической оболочки получается после преобразования уравнения равновесия (5) с учетом выражений для силовых характеристик N_2, M_1 (4,2) и последних двух равенств системы (3). Ниже записано разрешающее уравнение осесимметричной задачи ортотропной цилиндрической оболочки для случая отсутствия осевых усилий N_1 .

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + 4\beta_b^4 W = \frac{p_3}{D_b}; \quad 4\beta_b^4 = \frac{12(c_{22} - c_{12}^2/c_{11})}{c_{11}h_b^2 R^2}; \quad D_b = \frac{c_{11}h_b^3}{12}. \quad (6)$$

3 Выполнение решения и анализ результатов. Для определения критических длин бандажа, выполнялось варьирование параметра L с последовательным переходом от одной конфигурации контакта к другой. Вычисления проводились при следующих фиксированных параметрах расчетной схемы: $R = 1015$ мм; $h = 10$ мм; $h_b = 20$ мм; $P = 6$ МПа. Принятые свойства материалов оболочки и бандажа представлены в таблице.

Свойства материалов

Оболочка (Сталь 09Г2С)		Бандаж (стеклопластик)					
E , ГПа	200	E_1 , ГПа	18,6	μ_{12}	0,15	G_{12} , ГПа	4
μ	0,3	E_2 , ГПа	24,6	μ_{13}	0,42	G_{13} , ГПа	3
σ_T , МПа	350	E_3 , ГПа	6	μ_{23}	0,18	G_{23} , ГПа	3

3.1 Схема контакта в двух точках. Расчетная схема оболочки разделялась на два участка: I ($0 < x < L$) и II ($x \geq L$). На каждом участке для оболочки и бандажа записывались уравнения относительно прогибов (1), (6), решения которых имеют вид [2]:

$$W^I = e^{-\beta x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)) + e^{\beta x} (c_3 \cos(\beta x) + c_4 \sin(\beta x)) + P/4\beta^4 D;$$

$$W^{II} = e^{-\beta x} (c_5 \cos(\beta x) + c_6 \sin(\beta x)) + P/4\beta^4 D;$$

$$W_b = e^{-\beta_b x} (c_7 \cos(\beta_b x) + c_8 \sin(\beta_b x)) + e^{\beta_b x} (c_9 \cos(\beta_b x) + c_{10} \sin(\beta_b x)),$$

где W_b , W^I , W^{II} – прогибы бандажа и оболочки на первом и втором участках.

Неизвестные константы решения c_i определяются из граничных условий и условий сопряжения.

$$x = 0: \quad \frac{dW^I}{dx} = 0; \quad \frac{d^3W^I}{dx^3} = 0; \quad \frac{dW_b}{dx} = 0; \quad \frac{d^3W_b}{dx^3} = 0.$$

$$x = L: \quad W^I = W^{II} = W_b; \quad M_{1b} = 0; \quad \frac{dW^I}{dx} = \frac{dW^{II}}{dx}; \quad M_1^I = M_1^{II}; \quad Q_1^I - Q_1^{II} = -Q_{1b}.$$

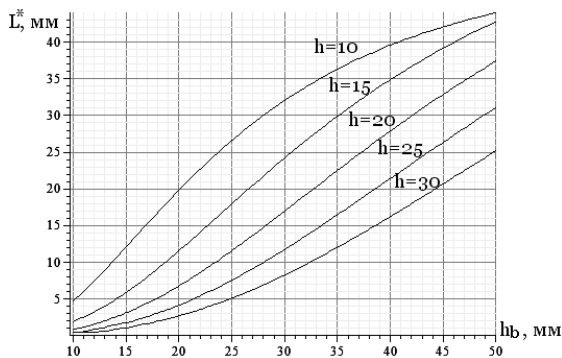


Рисунок 3 – Зависимости L^* от толщины бандажа h_b при различных толщинах оболочки h

Решение поставленной задачи проводилось с помощью программы написанной в математическом пакете Maple [8]. При варьировании L , решение для первой схемы контакта справедливо до тех пор, пока выполняется условие того, что в точке $x = 0$ прогиб бандажа будет больше прогиба оболочки. Расчет показал, что для заданных параметров переход к следующей схеме

контакта осуществляется при $L^* = 20$ мм. Также была выполнена серия расчетов, устанавливающая зависимость L^* от толщины бандажа для разных толщин оболочки. Графики полученных зависимостей показаны на рис. 3.

3.2 Контакт в трех точках. Система уравнений и вид решения для схемы с контактом в трех точках такие же, как и для схемы с контактом в двух точках. Изменились лишь граничные условия в точке $x = 0$, где возникло контактное взаимодействие.

$$x = 0: \quad W^I = W_b; \quad \frac{dW^I}{dx} = 0; \quad \frac{dW_b}{dx} = 0; \quad Q^I = -Q_{lb}.$$

Переход к схеме деформирования с контактом по области, происходит, когда кривизны оболочки и бандажа в точке $x = 0$ становятся равными между собой. В результате расчета, было установлено, что для принятых параметров оболочки и бандажа это происходит при $L^{**} = 26$ мм. Зависимость L^{**} от толщин бандажа и оболочки представлена серией кривых на рис. 4.

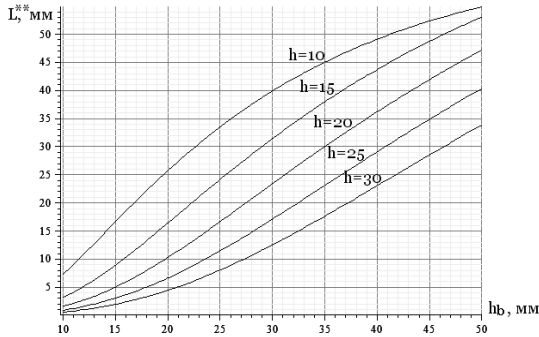


Рисунок 4 – Зависимости L^{**} от толщины бандажа h_b , при различных толщинах оболочки h

3.3 Схема контакта по линии. Для данной конфигурации контакта расчетная схема делится на три участка: I ($0 \leq x \leq l$) – участок контакта оболочки и бандажа; II ($l < x < L$) – участок зазора между оболочкой и бандажом; III ($x \geq L$) – свободный участок, на котором отсутствует бандаж.

Система разрешающих уравнений имеет вид:

$$I(0 \leq x \leq l): \quad \frac{d^4 W^I}{dx^4} + 4\beta^4 W^I = \frac{1}{D}(P - P_K); \quad \frac{d^4 W_b^I}{dx^4} + 4\beta_b^4 W_b^I = \frac{P_K}{D}; \quad W^I = W_b^I;$$

$$II(l < x < L): \quad \frac{d^4 W^{II}}{dx^4} + 4\beta^4 W^{II} = \frac{P}{D}; \quad \frac{d^4 W_b^{II}}{dx^4} + 4\beta_b^4 W_b^{II} = 0;$$

$$III(x \geq L): \quad \frac{d^4 W^{III}}{dx^4} + 4\beta^4 W^{III} = \frac{P}{D}.$$

где P_K – контактное давление, W^I , W^{II} , W^{III} – прогибы оболочки на первом,

втором и третьем участке, W_b^I, W_b^{II} – прогибы бандажа на первом и втором участке. Граничные условия и условия сопряжения приведены ниже:

$$x = 0: \frac{dW^I}{dx} = 0; \quad \frac{d^3W^I}{dx^3} = 0;$$

$$x = l: W^I = W^{II} = W_b^{II}; \quad \frac{dW^I}{dx} = \frac{dW^{II}}{dx} = \frac{dW_b^{II}}{dx};$$

$$M_1^I = M_1^{II}; \quad M_{1b}^I = M_{1b}^{II}; \quad Q_1^I + Q_{1b}^I = Q_{1b}^{II} + Q_1^{II};$$

$$x = L: W^{II} = W^{III} = W_b^{II}; \quad M_{1b}^{II} = 0; \quad \frac{dW^{II}}{dx} = \frac{dW^{III}}{dx}; \quad M_1^{II} = M_1^{III}; \quad Q_1^{II} - Q_1^{III} = -Q_{1b}^{II}.$$

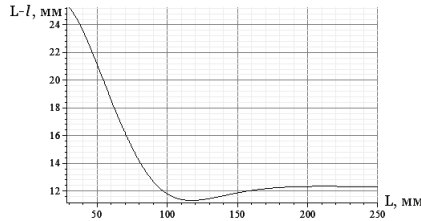


Рисунок 5 – Зависимость длины бесконтактного участка от L

Система из представленных выше уравнений является нелинейной, так как в некоторые уравнения системы нелинейным образом входит неизвестная l . Решение нелинейной системы уравнений проводилось модифицированным методом Ньютона [10]. На рис. 5 изображено изменение длины бесконтактного участка ($l < x < L$) в зависимости от L .

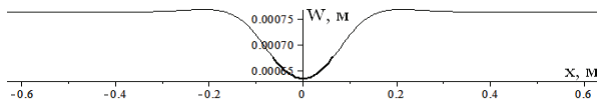


Рисунок 6 – Прогиб оболочки с бандажом

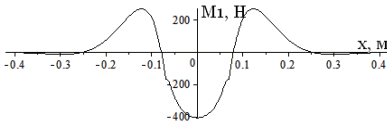


Рисунок 7 – Изгибающий момент в оболочке

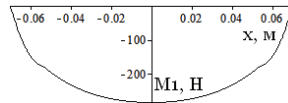


Рисунок 8 – Изгибающий момент в бандаже

Как видно из графика, с увеличением длины бандажа бесконтактный участок уменьшается. При дальнейшем увеличении L , длина бесконтактного участка асимптотически стремится к постоянному значению. На рис. 6-10

представлены результаты расчета для третьей схемы контакта при длине бандажа равной 140 мм.

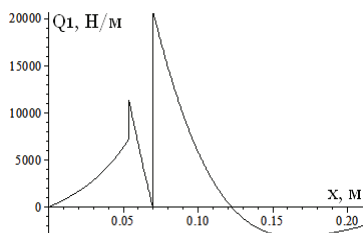


Рисунок 9 – Перерезывающая сила в оболочке

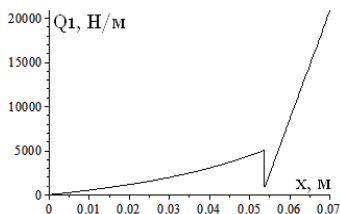


Рисунок 10 – Перерезывающая сила в бандаже

Выводы. Для цилиндрической оболочки с бандажом из ортотропного материала разработана методика определения критической длины бандажа, при которой осуществляется переход от одной схемы контактного взаимодействия к другой. Методика реализована программно в математическом пакете Maple. В результате численных экспериментов для конкретных параметров соединения определены критические длины бандажа и выполнен анализ напряженно-деформированного состояния.

Список литературы: 1. Новожиллов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с. 2. Колзунов Н.В. Основы расчета упругих оболочек. – М.: Высшая школа, 1963. – 278 с. 3. Львов Г.И., Ткачук А.Н. О влиянии кинематических гипотез на характер контактного взаимодействия цилиндрической оболочки с бандажом // Вестник НТУ «ХПИ». – 2006. – Вып. 32 – С. 98-104. 4. Блох М.Б. К выбору модели в задачах о контакте тонкостенных тел // Прикладная механика. – 1977. – Т. XIII. Вып. 5. – С. 34-42. 5. Детинко Ф.М., Фастовский В.М. О посадке бандажа на цилиндрическую оболочку // Прикладная механика. – 1975. – Т. II, вып. 2. – С. 124-126. 6. Пелех Б.Л., Сухорольский Н.А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – К.: Наукова думка, 1980. – 216 с. 7. Композиционные материалы. Справочник. Под ред. Д.М.Карпиноса. – К.: Наукова думка, 1985. – 592 с. 8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с. 9. Матросов А.В. Решение задач высшей математики и механики в Maple6. – СПб.: BHV, 2001. – 528 с. 10. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320 с.

Поступила в редколлегию 19.10.2012