

мы. Технология // Д. Каушанов / Рекламная презентация SKF-S2M, 2010. - SKF-S2M. – 66 с.
5. G. Schweitzer, E.H. Maslen Magnetic bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. – Berlin: Springer, 2009. – 535 p. 6. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. 7. Мартыненко Г.Ю. Общий подход к моделированию нелинейной динамики жестких роторов в магнитных подшипниках различных типов / Г.Ю. Мартыненко // Доповіді НАН України. – 2012. – № 3. – С. 78-84.

Bibliography (transliterated): 1. Anurov Yu.M. Razrabotka i ekspluatsiya serijnyh energeticheskikh GTU na magnitnyh podshipnikah. Yu.M. Anurov, E.V. Litvinov. Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. Kharkiv: Tehnologicheskij centr, 2009. № 4/4 (40). Tem. vyp. Sovremennye tehnologii v gazoturbostroenii. Vol. 1. 34-39 Print. 2. Gazoturbinnaya TEC novogo pokoleniya s agregatami GTE-009M. Reklamnyj buklet ENERGOМASH (YuK) Limited, 2003. Moscow: Energomash. 20 Print. 3. Magnitnye podshipniki dlya neftegazovoj promyshlennosti. Tehnologii S2M proverennye resheniya dlya neftyanoj i gazovoj otrasli. Reklamnyj buklet, 2008. SKF-S2M. 18 Print. 4. SKF-S2M. Magnitnye sistemy. Tehnologiya. D. Kashtanov. Reklamnaya prezentaciya SKF-S2M, 2010. SKF-S2M. 66 Print. 5. G. Schweitzer, E.H. Maslen Magnetic bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery. Berlin: Springer, 2009. 535 Print. 6. Zhuravlev Yu.N. Aktivnye magnitnye podshipniki: Teoriya, raschet, primenenie. Sankt Petersburg: Politehnika, 2003. 206 Print. 7. Martynenko G.Yu. Obschij podhod k modelirovaniyu nelinejnoj dinamiki zhestkih rotorov v magnitnyh podshipnikah razlichnyh tipov. G.Yu. Martynenko. Dopovidi NAN Ukrainy. 2012. № 3. 78-84 Print.

Поступила (received) 14.11.2014

УДК 534.1

В.П. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук, профессор, ХНТУСХ, Харьков;

С.В. ОЛЬШАНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, НТУ «ХПИ»

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Модернизированным методом энергетического баланса выведены приближенные формулы для расчета амплитуд малых затухающих колебаний осциллятора переменной массы при действии силы сухого трения. Рассмотрены варианты колебаний при постоянном значении силы трения и переменном, когда сила трения пропорционально массе осциллятора. Проведено сравнение численных результатов, к которым приводят полученные формулы и известные более точные решения. Показано, что выведенные компактные приближенные формулы имеют хорошую точность и удобны для инженерных расчетов.

Ключевые слова: свободные колебания, линейно-переменная масса, сухое трение.

Введение. В технике распространены механизмы, массы которых монотонно меняются с течением времени. Много примеров таких механизмов есть

© В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский, 2014

в монографиях [1,2]. Нередко их колебания проходят при действии сил сухого трения, что стало предметом специального исследования в [1]. В указанной монографии уравнения движения с монотонно переменными коэффициентами на коротких интервалах времени (полуциклах колебаний) приближенно заменяли уравнениями с постоянными коэффициентами. Затем, методом припасовывания сшивали аналитические решения уравнений с постоянными коэффициентами, меняя при этом скачкообразно массу колебательной системы в моменты ее остановок. Этот громоздкий способ расчета можно упростить, используя энергетический метод, который позволил сравнительно просто рассчитывать затухающие колебания осцилляторов постоянных параметров при нелинейном сопротивлении движению [3,4]. Но для повышения точности расчета колебаний осцилляторов переменной массы методом энергетического баланса нужно модернизировать метод, что послужило мотивом к этому исследованию.

Целью данной статьи является адаптация метода энергетического баланса к расчету колебаний осцилляторов переменной массы при действии силы сухого трения и демонстрация результатов, к которым приводит модернизация метода.

1. Колебания осциллятора при постоянном значении силы сухого трения. Без учета действия реактивной силы, их описываем дифференциальным уравнением

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + cx = -F_T \text{sign}\dot{x}. \quad (1)$$

В нем m_0 – начальное значение массы; δ – скорость изменения массы во времени t ; c – коэффициент жесткости пружины; F_T – значение силы трения; $x = x(t)$ – перемещение осциллятора, отсчет которого ведем по оси Ox от торца недеформированной пружины; точкой над x обозначена производная по t .

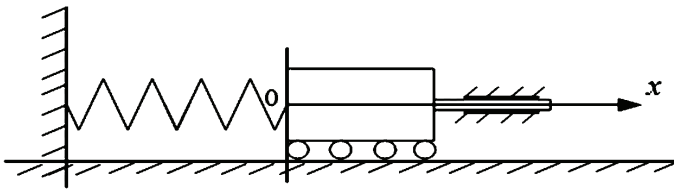


Рисунок 1 – Расчетная схема

Как видно из расчетной схемы на рис. 1, которая заимствована из монографии [1], в рассматриваемой задаче узел трения удален от массы и находится правее ее.

Рассматривая колебания, вызванные исходным отклонением x_0 , таким что $|x_0| > F_T / c$, уравнение (1) будем решать при начальных условиях:

$$x(0) = x_0 < 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

Согласно (2), на начальном этапе движения осциллятора до первой его остановки, производная $\dot{x} > 0$ и вместо (1) можно решать более простое уравнение

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + cx = -F_T. \quad (3)$$

Введя обозначение $\Phi(t, \ddot{x}) = \delta t \ddot{x}$, уравнение (3) преобразуем к форме

$$m_0 \dot{x} + cx = -F_T - \Phi(t, \ddot{x}), \quad (4)$$

где левая часть имеет постоянные коэффициенты.

Следуя работе [3], далее приближенно задаем закон движения осциллятора в виде

$$x = -a \cos(\omega t),$$

где $\omega = \sqrt{c/m_0}$; $a = a(t)$ – функция медленного изменения, для которой допустимо приближенно принять

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t); \quad \ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t). \quad (5)$$

Учитывая (5), вычисление $\Phi(t, \ddot{x})$ сводим к формуле

$$\Phi(t, \ddot{x}) = \delta t a \omega^2 \cos(\omega t). \quad (6)$$

Согласно методу энергетического баланса [3], за один полуцикл колебаний, изменение потенциальной энергии системы Δu равно работе A сил в правой части уравнения (4). При относительно медленном затухании колебаний изменение потенциальной энергии приближенно равно [3]

$$\Delta u = \frac{\pi}{\omega} ca \frac{da}{dt}.$$

Для вычисления работы имеем интеграл

$$A = - \int_0^{\pi/\omega} [F_T + \Phi(t, \ddot{x})] \dot{x} dt.$$

Подставив в него выражения (5) и (6), получаем

$$A = -2F_T a + \frac{\pi}{4} \delta \omega a^2.$$

Таким образом, равенство $\Delta u = A$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{da}{dt} = \frac{\delta}{4m_0} (a - b), \quad (7)$$

в котором $b = \frac{8F_T \sqrt{m_0}}{\pi \delta \sqrt{c}}$.

Проинтегрировав уравнение (7), при начальном условии

$$a(0) = a_0 = |x_0|,$$

находим выражение верхней огибающей графика колебаний на начальном этапе движения

$$a(t) = b + (a_0 - b) \exp\left(\frac{\delta t}{4m_0}\right). \quad (8)$$

При $\delta \rightarrow 0$ выражение (8) переходит в уравнение прямой

$$a(t) = a_0 - \frac{2F_T}{\pi\sqrt{cm_0}} t,$$

что согласуется с известными результатами [3, 4], где решали уравнение (7), полагая $\delta = 0$.

Согласно (5), первый останов осциллятора произойдет, когда $t = t_1 = \frac{\pi}{\omega}$.

Подставив это значение t в (8), получаем

$$a_1 = a_0 \exp\left(\frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_0}} - \frac{8F_T\sqrt{m_0}}{\pi\delta\sqrt{c}} \left(\exp\left(\frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_0}}\right) - 1\right)\right). \quad (9)$$

Масса осциллятора в этот момент времени равна

$$m_1 = m_0 + \pi\delta\sqrt{\frac{m_0}{c}}.$$

Обобщая эти формулы, вычисление амплитуды и массы осциллятора в конце k -го размаха сводим к рекуррентным соотношениям:

$$a_k = a_{k-1} \exp\left(\frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_{k-1}}} - \frac{8F_T\sqrt{m_{k-1}}}{\pi\delta\sqrt{c}} \left(\exp\left(\frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_{k-1}}}\right) - 1\right)\right); \quad (10)$$

$$m_k = m_{k-1} + \pi\delta\sqrt{\frac{m_{k-1}}{c}}. \quad (11)$$

В пределе, при $\delta \rightarrow 0$, из (10) следует известное выражение изменения амплитуд колебаний в осцилляторе постоянной массы [3]

$$a_k = a_{k-1} - \frac{2F_T}{c}.$$

Движение осциллятора завершится, когда

$$a_k \leq \frac{F_T}{c}.$$

Оценим, сколько размахов сделает осциллятор за время его движения $t \in (0; t_*)$. Время полного останова $t = t_*$ определим приближенно, положив в (8) $a(t) = 0$.

Корень этого уравнения равен

$$t_* = \frac{4m_0}{\delta} \ln \frac{b}{b-a_0}. \quad (12)$$

Заметим, что в случае убывания массы ($\delta < 0$), решение (8) имеет физический смысл лишь на интервале $t \in (0; -m_0 / \delta)$, когда положительна масса осциллятора. Поэтому вычисленное по (12) значение t_* применимо для дальнейших расчетов только при $m_0 + \delta t_* > 0$.

Используя t_* , легко найти натуральные числа:

$$k_* = \begin{matrix} \text{округленное} \\ \text{до целого} \end{matrix} \left(\frac{\sqrt{ct_*}}{\pi\sqrt{m_0}} \right); \quad k^* = \begin{matrix} \text{округленное} \\ \text{до целого} \end{matrix} \left(\frac{\sqrt{ct_*}}{\pi\sqrt{m_0 + \delta t_*}} \right). \quad (13)$$

Учитывая изменения длительностей полуциклов во времени, приходим к выводу, что за время движения осциллятора, с положительным значением его массы, количество размахов k удовлетворяет неравенствам:

$$k^* \leq k \leq k_* \quad (14)$$

при возрастании массы ($\delta > 0$) и

$$k_* \leq k \leq k^* \quad (15)$$

при убывании массы ($\delta < 0$).

Подчеркнем, что двойные неравенства (14) и (15) годятся лишь для ориентировочной, приближенной оценки числа размахов, поскольку они получены в результате экстраполирования на весь интервал движения выражения (8), которое построено для расчета убывания амплитуд колебаний осциллятора только на начальном этапе движения, то есть во время первого размаха.

Точные, но односторонние оценки числа размахов, можно предложить, сравнивая колебания осцилляторов переменной и постоянной масс. Так, если число размахов n_* за время движения осциллятора постоянной массы $\delta = 0$ равно

$$n_* = \begin{matrix} \text{целая часть} \\ \text{числа} \end{matrix} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ca_0}{F_T} + 0,99999 \right) \right], \quad (16)$$

то при возрастании массы ($\delta > 0$) число размахов k будет удовлетворять неравенству $k \geq n_*$. При убывании массы выполняется противоположное неравенство $k \leq n_*$.

2. Колебания осциллятора с переменной силой трения. Силу трения определяем по формуле

$$F_T(t) = fg(m_0 + \delta t), \quad (17)$$

в которой f – коэффициент трения; g – ускорение свободного падения. Такую зависимость имеем при движении массы по шероховатой горизонтальной плоскости, согласно схеме, показанной на рис. 2.

Теперь, при вычислении работы силы трения, нужно использовать инте-

грал

$$I = -fga\omega \int_0^{\pi/\omega} (m_0 + \delta t) \cdot \sin(\omega t) dt = -fga\omega \left(\frac{2m_0}{\omega} + \frac{\delta\pi}{\omega^2} \right) =$$

$$= -2fg \left(m_0 + \frac{\delta\pi}{2} \sqrt{\frac{m_0}{c}} \right) \cdot a.$$

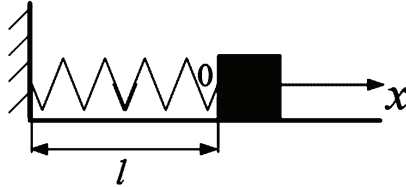


Рисунок 2 – Расчетная схема

Раньше, при постоянной силе трения, имели $I = -2F_T a$.

Из равенства интегралов находим эквивалентное постоянное значение силы трения на первом полуцикле

$$F_T = fg \left(m_0 + \frac{\delta\pi}{2} \sqrt{\frac{m_0}{c}} \right), \quad (18)$$

которое нужно подставить в (9). Указанная подстановка дает

$$a_1 = a_0 \exp \frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_0}} - \frac{8fgm_0(\sqrt{cm_0} + 0,5\pi\delta)}{\pi\delta c} \left(\exp \frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_0}} - 1 \right).$$

Обобщив это выражение, получаем рекуррентное соотношение для вычисления амплитуды колебаний в конце k -го размаха

$$a_k = a_{k-1} \exp \frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_{k-1}}} - \frac{8fgm_{k-1}(\sqrt{cm_{k-1}} + 0,5\pi\delta)}{\pi\delta c} \left(\exp \frac{\pi\delta}{4\sqrt{cm_{k-1}}} - 1 \right). \quad (19)$$

Вычисление переменных значений массы, как прежде, проводим по (11).

В пределе, при $\delta \rightarrow 0$, из (19) следует известная формула убывания амплитуд вибратора с постоянной массой, равной m_0 :

$$a_k = a_{k-1} - \frac{2fgm_0}{c}.$$

Процесс движения осциллятора полностью завершится, когда

$$|a_k| \leq fgm_k c^{-1}.$$

Учитывая (12), приближенную оценку времени завершения движения осциллятора проводим по формуле:

$$t^* = \frac{4m_0}{\delta} \ln \frac{d}{d-a_0}, \quad (20)$$

в которой $d = \frac{8fgm_0}{\pi\delta c} (\sqrt{cm_0} + 0,5\pi\delta)$.

Вычисленное значение t^* , при $\delta < 0$, можно подставлять в (13), (15), для оценки числа размахов, только в том случае, когда $m_0 + \delta t^* > 0$.

Точную но одностороннюю, оценку количества размахов k удобно проводить с помощью неравенства: $k \leq n^*$ – при возрастании массы и $k \geq n^*$ – при убывании массы, где

$$n^* = \begin{matrix} \text{целая часть} \\ \text{числа} \end{matrix} \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{ca_0}{fgm_0} + 0,99999 \right) \right]. \quad (21)$$

Анализ численных результатов. Для проведения расчетов принимаем: $m_0 = 3$ кг; $c = 1962$ Н/м; $F_T = 5,886$ Н; $a_0 = 0,0615$ м; $\delta = \pm 1,5$ кг/с и $\delta = \pm 2$ кг/с. Вычисленные по формуле (10) значения амплитуд размахов записаны в числителе табл. 1.

Таблица 1 – Значения амплитуд размахов при $F_T = \text{const}$; $m_0 = 3$ кг

K	100 a_K , м при $\delta > 0$		100 a_K , м при $\delta < 0$	
	$\delta = 1,5$ кг/с	$\delta = 2$ кг/с	$\delta = -1,5$ кг/с	$\delta = -2$ кг/с
1	5,641	5,671	5,461	5,431
	5,639	5,669	5,459	5,429
2	5,121	5,178	4,780	4,723
	5,118	5,173	4,777	4,718
3	4,591	4,671	4,107	4,025
	4,587	4,665	4,103	4,019
4	4,052	4,152	3,443	3,339
	4,047	4,143	3,438	3,331
5	3,504	3,620	2,788	2,665
	3,498	3,610	2,783	2,656
6	2,947	3,077	2,144	2,005
	2,940	3,066	2,137	1,994
7	2,381	2,524	1,509	1,359
	2,374	2,511	1,503	1,348
8	1,808	1,959	0,886	0,729
	1,800	1,946	0,879	0,717
9	1,227	1,385	0,274	0,116
	1,219	1,371	0,267	0,104
10	0,638	0,802	–	–
	0,630	0,787	–	–
11	0,042	0,209	–	–
	0,034	0,194	–	–

Знаменатели в табл. 1 заимствованы из [6, табл. 2.4]. Там они были получены для указанных выше исходных данных ВБК-методом. Расхождения результатов в числителях и знаменателях табл. 1 незначительны, за исключением малых амплитуд размахов в конце процесса движения.

Проверим, как теоретические оценки согласуются с тем количеством размахов, что имеем в табл. 1. Подставив указанные выше числовые данные в (16), находим, что $n_* = 10$. Тогда, при $\delta > 0$ количество размахов $k \geq 10$, а при $\delta < 0 - k \leq 10$. Указанные в табл. 1 количества размахов удовлетворяют этим неравенствам.

В числители табл. 2 записаны значения амплитуд размахов, к которым приводит формула (10), при $m_0 = 4$ кг; $c = 1600$ Н/м; $a_0 = 0,05$ м; $F_T = 8$ Н; $\delta = \pm 1$ кг/с и $\delta = \pm 2$ кг/с.

В знаменатели табл. 2 помещены результаты, взятые из [6, табл. 2.11 и 2.12], где расчет колебаний проведен ВБК-методом. Имеем хорошее совпадение значений амплитуд размахов, вычисленных разными способами.

Таблица 2 – Значения амплитуд размахов при $F_T = \text{const}$; $m_0 = 4$ кг

K	100 a_K , м при $\delta > 0$		100 a_K , м при $\delta < 0$	
	$\delta = 1$ кг/с	$\delta = 2$ кг/с	$\delta = -1$ кг/с	$\delta = -2$ кг/с
1	4,044	4,089	3,956	3,913
	4,044	4,088	3,956	3,911
2	3,079	3,158	2,922	2,843
	3,078	3,155	2,921	2,840
3	2,103	2,207	1,897	1,794
	2,102	2,203	1,896	1,790
4	1,118	1,237	0,882	0,765
	1,117	1,232	0,881	0,761
5	0,124	0,250	0,122*	0,241*
	0,123	0,244	0,123*	0,245*

Символом * помечены те размахи, при которых осциллятор, попав в зону застоя, не проходит положения $x = 0$.

Проверим согласование количеств размахов, указанных в табл. 2 с неравенствами (14) и (15). При $\delta = 1$ кг/с имеем: $b \approx 1,0186$ м; $t_* \approx 0,805$ с; k_* равно округленному до целого (5,125) 5; k^* равно округленному до целого (4,676) 5. Согласно (14): $5 \leq k \leq 5 \Rightarrow k = 5$. При $\delta = -1$ кг/с находим: $b \approx -1,0186$ м; $t_* \approx 0,767$ с; k_* равно округленному до целого (4,883) 5; k^* равно округленному до целого (5,431) 5. Согласно (15): $5 \leq k \leq 5 \Rightarrow k = 5$. В обоих случаях указанные количества размахов в табл. 2 согласуются с неравенствами (14) и (15).

Используя формулу (19), рассмотрим убывание амплитуд колебаний осциллятора при действии переменной силы трения. Следуя работе [5], для

проведения расчетов принимаем: $m_0 = 3$ кг; $c = 1962$ Н/м; $a_0 = 0,0615$ м; $f = 0,3$; $\delta = 2,5$ кг/с. Полученные двумя методами значения амплитуд размахов и масс в моменты остановок указаны в табл. 3.

Таблица 3 – Значения амплитуд и масс в моменты остановок

k	по формулам (19) и (11)		из статьи [5]	
	a_k , м	m_k , кг	a_k , м	m_k , кг
1	0,0535	3,307	0,053	3,315
2	0,0443	3,630	0,044	3,645
3	0,0338	3,967	0,034	3,991
4	0,0220	4,321	0,022	4,354
5	0,0088	4,689	0,008	4,733
6	0,0058	5,073	0,006	5,083

Результаты расчетов модернизированным энергетическим методом в табл. 3 близки к результатам численного интегрирования дифференциального уравнения движения в работе [5].

В числителях табл. 4 записаны значения амплитуд размахов, вычисленные по формуле (19) при $m_0 = 4$ кг; $c = 1600$ Н/м; $a_0 = 0,05$ м; $f = 0,2$; $\delta = \pm 0,5$ кг/с и $\delta = \pm 1$ кг/с. В знаменатели записаны результаты расчетов, проведенных методом ВБК в работе [6, табл. 2.13, 2.14].

Таблица 4 – Значения амплитуд размахов при переменной силе трения

k	100 a_k , м при $\delta > 0$		100 a_k , м при $\delta < 0$	
	$\delta = 0,5$ кг/с	$\delta = 1$ кг/с	$\delta = -0,5$ кг/с	$\delta = -1$ кг/с
1	4,032	4,044	4,007	3,994
	4,031	4,044	4,006	3,994
2	3,039	3,039	3,037	3,035
	3,038	3,038	3,037	3,034
3	2,021	1,984	2,091	2,123
	2,021	1,982	2,090	2,121
4	0,979	0,878	1,168	1,256
	0,978	0,875	1,167	1,252
5	0,088*	0,280*	0,269	0,433
	0,089*	0,284*	0,267	0,428
6	–	–	–	0,346*
				0,348*

Имеем хорошее согласование значений амплитуд, вычисленных двумя методами.

Вычислим, к каким значениям k приводят оценочные неравенства при $\delta = \pm 1$ кг/с. Подставив числовые данные в формулу (21) получаем $n^* = 5$. Согласно теоретическим оценкам: при $\delta = 1$ кг/с – $k \leq 5$, а при $\delta = -1$ кг/с – $k \geq 5$.

Количества размахов, указанные в табл. 4 не противоречат этим оценкам.

Определим далее числа k^* и k^* . При $\delta = 1$ кг/с находим: $d \approx 1,0189$ м; $t^* \approx 0,805$ с; k^* равно округленному до целого (5,126) 5; k^* равно округленному до целого (4,676) 5. Согласно (14): $5 \leq k \leq 5 \Rightarrow k = 5$. При $\delta = -1$ кг/с имеем: $d \approx -0,980$ м; $t \approx 0,796$ с; k^* равно округленному до целого (5,071) 5; k^* равно округленному до целого (5,666) 6. Согласно (15): $5 \leq K \leq 6$. Число размахов k в табл. 4 удовлетворяет этому двойному неравенству.

Выводы. Вычисления подтвердили, что полученные модернизированным энергетическим методом формулы вполне пригодны для расчета затухающих амплитуд колебаний осциллятора линейно-переменной массы при действии силы сухого трения.

Список литературы: 1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А.П. Бессонов. – М.: Наука, 1967. – 267 с. 2. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass / L. Cveticanin. – Taylor & Francis Ltd, 1998. – 300 p. 3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с. 4. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с. 5. Ольшанский В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси при наявності сухого тертя / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2013. – № 54 (1027). – С. 172-178. 6. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Миськдрук, 2014. – 264 с.

Bibliography (transliterated): 1. Bessonov A.P. Osnovy dinamiki mehanizmov s peremennoj massoj zven'ev. A.P. Bessonov. Moscow: Nauka, 1967. 267 Print. 2. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, 1998. 300 Print. 3. Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mehanicheskikh kolebanij. Ya.G. Panovko. Moscow: Nauka, 1980. 270 Print. 4. Bogolyubov N.N. Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnyh kolebanij. N.N. Bogolyubov, Yu.A. Mitropol'skij. Moscow: Nauka, 1974. 504 Print. 5. Ol'shans'kyj V.P. Vil'ni kolyvannya oscylyatora zminnoyi masy pry nayavnosti sukhoho tertya. V.P. Ol'shans'kyj, S.V. Ol'shans'kyj. Visnyk NTU «KhPI». Seriya: Matematyчне modelyuvannya v tekhnici ta tekhnolohiyakh. 2013. № 54 (1027). 172-178. Print. 6. Ol'shanskij V.P. Metod VBK v raschetah nestacionarnykh kolebanij oscillyatorov. V.P. Ol'shanskij, S.V. Ol'shanskij. Kharkiv: Mis'kdruk, 2014. 264 Print.

Поступила (received) 16.04.2014