

Bibliography (transliterated): 1. Shuklinov S. N. Matematicheskoe modelirovanie rabochih protsesov mehanizma pod'ema kabinyi gruzovogo avtomobilya. S.N.Shuklinov, M.Yu.Zalogin, P.R.Bartoshko Pratsi odeskogo natsionalnogo universitetu. 2014. № 2 (44). 39-44. Print. 2. Dhruvil K. Design of hydraulic for cab tilting system / K. Dhruvil, B. Saurabh // International conference on advanced in mechanical engineering (ICARME-2012). 2012. 51-55. Print. 3. Cab tilt hydraulic system. Operation manual and service instructions [Elektronnyi resurs] / Pauer Packer – Rezhim dostupa: www.powerpacker.us.com. 4. Lamb, H. Hydrodynamics / H. Lamb. 2nd ed. Miami: HardPress Publishing, 2012. 622 p. Print. 5. Cho, B.-H. Estimation Technique of Air Content in Automatic Transmission Fluid by Measuring Effective Bulk Modulus. B.-H. Cho, H.-W. Lee, J.-S. Oh. International Journal of Automotive Technology. 2002. Vol. 3, Iss. 2. 57-61. Print. 6. Dyakonov V. P. Simulink 5/6/7. Samouchitel. V. P. Dyakonov. M.: DMK-Press, 2008. 784 p. Print. 7. GOST R 53807-2010. Avtomobilnyie transportnyie sredstva. Gidrotsilindryi i nasosyi gidravlicheskih mehanizmov oprokidyivaniya kabin. Tehnicheskie trebovaniya i metodyi ispyitaniy. Moskva: Natsionalnyiy standart Rossiyskoy Federatsii, 2010. Print.

Надійшла (received) 06.10.2014

УДК 539.3

А. Н. ШУПИКОВ, д-р техн. наук, зав. отделом, ИПМаш НАН Украины;
Е. В. СВЕТ, канд. техн. наук, старш. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СЛОЖНОЙ ФОРМЫ: ТЕОРИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТ

На основе метода погружения, получено решение задачи нестационарной теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных цилиндрических оболочек сложной формы в плане при нагревании пленочным межслойным источником тепла. Проведено сравнение с результатами, полученными в ходе проведения термографического исследования многослойной цилиндрической оболочки, которое подтверждает достоверность результатов, полученных на основе предлагаемого подхода. Сравнение приведено для различных моментов времени.

Ключевые слова: теплопроводность, многослойная оболочка, сложная форма, источник тепла, термографическое исследование.

Введение. Анализ литературных источников показывает, что достаточно полно изучены вопросы теплопроводности многослойных пластин и оболочек, имеющих каноническую форму в плане, на наружных поверхностях которых осуществляется конвективный теплообмен [1, 2]. Для оболочек неканонической формы, в основном, применяются МКЭ и R-функции [3, 4]. Как правило, внутренние источники тепла, в рассматриваемых объектах, от-

© А.Н. Шупиков, Е.В. Свет, 2014

существуют.

Поэтому развитие методов расчета нестационарных полей температуры в многослойных оболочках, имеющих сложную форму в плане, при конвективном теплообмене на наружных поверхностях и наличии распределенных пленочных межслойных источников тепла представляет собой актуальную задачу.

В публикации [5] подобная задача решена на основе двумерной теории, а в [6, 7] – на основе трехмерной теории, для многослойных пластин. В данной работе предлагается подход, основанный на трехмерной теории, для многослойных оболочек.

Постановка задачи. Рассматривается многослойная цилиндрическая оболочка, собранная из I слоев постоянной толщины h_i , отнесенная к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя (рис. 1).

На координатной плоскости оболочка занимает область Ω , ограниченную контуром $L: x_L = x(s), y_L = y(s)$. На внешних S_0, S_I и боковой $\left(S_L = \sum_{i=1}^I S_L^i \right)$ поверхностях оболочки происходит конвективный теплообмен.

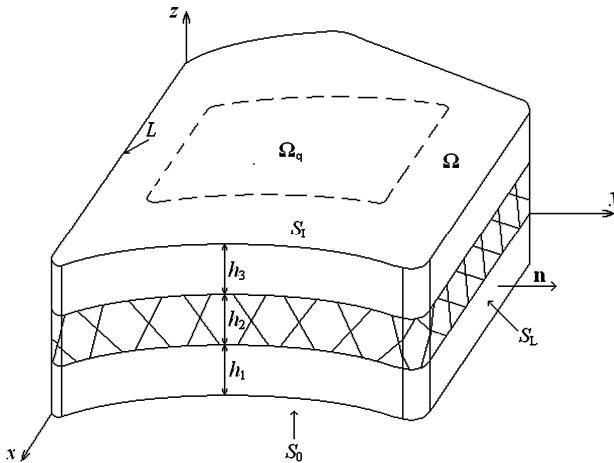


Рисунок 1 – Многослойная оболочка

Распределение температуры в слоях оболочки определяется:
– уравнением

$$-\frac{\rho_i c_i}{k_i} \dot{T}^i + \Delta_R T^i = -\frac{Q^i}{k_i}; \quad \Delta_R = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R_z^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{RR_z} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad R_z = 1 + \frac{z}{R};$$

$$(x, y) \in \Omega; \quad \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i; \quad i = \overline{1, I}, \quad (1)$$

где i – номер слоя, $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$, h_j – толщина j -го слоя, T^i – температура i -го

слоя, Q^i – внутренний источник тепла i -го слоя, ρ_i – плотность материала i -го слоя, c_i – теплоемкость материала i -го слоя, k_i – коэффициент теплопроводности материала i -го слоя, R – радиус кривизны поверхности Ω ;

– граничными условиями на боковой поверхности

$$\frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} + \frac{H_L^i}{k_i}(T^i - T_L^i) = 0, \quad (x, y, z) \in S_L^i, \quad (2)$$

где T_L^i – температура на боковой поверхности i -го слоя, H_L^i – коэффициент конвективного теплообмена на боковой поверхности i -го слоя;

– условиями конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях оболочки

$$-\frac{\partial T^1}{\partial z} + \frac{H_1}{k_1}(T^1 - T_\infty^1) = 0; \quad z = 0; \quad \frac{\partial T^I}{\partial z} + \frac{H_I}{k_I}(T^I - T_\infty^I) = 0, \quad z = \delta_I, \quad (3)$$

где T_∞^1 и T_∞^I – температура среды на границе с первым и I -м слоем, H_1 и H_I – коэффициенты конвективного теплообмена на наружной и внутренней поверхности пакета соответственно.

– начальными условиями

$$T^i = T_0^i; \quad t = 0.$$

Условия равенства потоков тепла и температур на границах контакта соседних слоев, с учетом возможных тепловых воздействий на поверхностях слоев, запишем как

$$k_i \frac{\partial T^i}{\partial z} + k_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} - q_i = 0; \quad T^i = T^{i+1}, \quad z = \delta_i, \quad (4)$$

где

$$q_i = \begin{cases} q_i^0, & x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2, \\ 0, & 0 \leq x < x_1, \quad x_2 < x \leq A, \quad 0 \leq y < y_1, \quad y_2 < y \leq B; \end{cases}$$

q_i^0 – тепловой поток, возникающий от действия пленочного источника тепла, расположенного на границе контакта соседних слоев.

Производные искомой функции по поперечной координате z , входящие в уравнения (1), а также условия (3) и (4), заменим их конечно-разностным представлением. Для этого используются симметричные разности [8]

$$\frac{\partial T_r^i}{\partial z} = \frac{T_{r+1}^i - T_{r-1}^i}{2\Delta_{h_i}}, \quad \frac{\partial^2 T_r^i}{\partial z^2} = \frac{T_{r+1}^i - 2T_r^i + T_{r-1}^i}{\Delta_{h_i}^2},$$

где $\Delta_{h_i} = \frac{h_i}{r_i}$ – шаг сетки, $r_i + 1$ – количество узлов в i -том слое, T_r^i – значение искомой функции в r -м узле i -го слоя.

В результате система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -\Delta_{h_i}^2 \frac{\rho_i c_i}{k_i} \dot{T}_r^i + \left(1 - \frac{\Delta_{h_i}}{2RR_r^i}\right) T_{r-1}^i - \left(2 + \Delta_{h_i}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{(R_r^i)^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right) T_r^i + \\
 & + \left(1 + \frac{\Delta_{h_i}}{2RR_r^i}\right) T_{r+1}^i = -\frac{\Delta_{h_i}^2}{k_i} Q_r^i; \quad R_r^i = 1 + \frac{\delta_{i-1} + r\Delta_{h_i}}{R}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Условия конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях оболочки (3) и условия на границе контакта соседних слоев (4) выглядят так:

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{T_1^i - T_{-1}^i}{2\Delta_{h_i}}\right) + \frac{H_1}{k_1} (T_0^i - T_\infty^i) = 0, \quad z = 0; \\
 & \left(\frac{T_{r_I+1}^i - T_{r_I-1}^i}{2\Delta_{h_i}}\right) + \frac{H_I}{k_I} (T_{r_I}^i - T_\infty^i) = 0, \quad z = \delta_i; \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$k_i \left(\frac{T_{r+1}^i - T_{r-1}^i}{2\Delta_{h_i}}\right) + k_{i+1} \left(\frac{T_1^{i+1} - T_{-1}^{i+1}}{2\Delta_{h_{i+1}}}\right) - q_i = 0, \quad T^i = T^{i+1}, \quad z = \delta_i, \quad (7)$$

Условия (6) и (7) позволяют исключить из системы (5) значения искоемых функций в узловых точках с номерами: $r = -1$ и $r = r_i + 1$ в i -м слое ($i = \overline{1, I}$), а также с номерами $r = 0$ (во всех слоях, кроме 1-го).

Получаем систему уравнений вида

$$[G]\dot{\mathbf{T}} = -[A]\mathbf{T} + \mathbf{B} + [C]\mathbf{Q}. \quad (8)$$

Для решения системы (8) применяется подход, аналогичный методу погружения [9]. Исходная многослойная оболочка произвольной формы в плане погружается во вспомогательную охватывающую многослойную оболочку с той же композицией слоев. Форма в плане охватывающей оболочки выбирается таким образом, чтобы возможно было получить простое аналитическое решение. В настоящей работе роль охватывающей оболочки выполняет прямоугольная в плане цилиндрическая оболочка с нулевыми условиями на контуре (рис. 2).

Система (8) интегрируется на отрезке времени $[0, t^*]$. Этот отрезок разбивается на P равных участков длиной Δt , так что $t^* = P\Delta t$. При такой дискретизации по времени, применяя метод разложения решения в ряд Тейлора [9], вид решения системы (8) на каждом шаге по времени можно представить в форме рекуррентных соотношений

$$\mathbf{T}^{p+1} = [\tilde{A}]\mathbf{T}^p + [\tilde{B}](\mathbf{B} + [C]\mathbf{Q}^{p+1}), \quad (9)$$

где p – текущий номер временного участка;

Условия конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях вспомогательной оболочки совпадают с условиями теплообмена на поверхностях исходной оболочки.

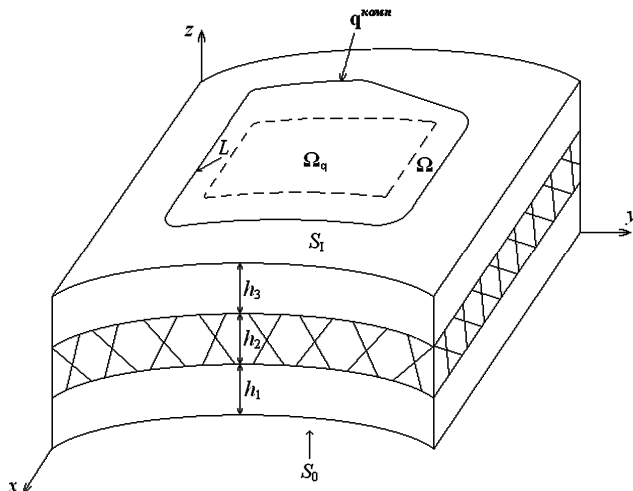


Рисунок 2 – Вспомогательная оболочка

Чтобы обеспечить выполнение реальных граничных условий на контуре, к вспомогательной оболочке в каждой узловой точке по толщине, вдоль следа границы L , прилагаются дополнительные компенсирующие источники $q_{ir}^{komp\ p+1}(x, y)$, $(x, y) \in L$, которые входят в систему уравнений теплопроводности (9) в виде

$$q_r^{i\ p+1}(x, y) = \oint_L q_{ir}^{komp\ p+1}(x_L, y_L) \delta(x - x_L, y - y_L) dL, \quad r = 0, 1, 2,$$

где $\delta(x - x_L, y - y_L)$ – двумерная δ -функция Дирака.

Удовлетворение граничным условиям на следе контура L приводит к системе интегральных уравнений для определения распределений компенсирующих источников

$$\mathbf{B}^L \mathbf{T}[q^{komp\ p+1}(x, y)] = 0, \quad x, y \in L. \quad (10)$$

Далее $T_r^{i\ p+1}(x, y)$ и $q_r^{i\ p+1}(x, y)$ разлагаются в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим граничным условиям на границе охватывающей, прямоугольной в плане, оболочки,

$$T_r^{i\ p+1}(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N T_{mnr}^{i\ p+1} \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B};$$

$$q_r^{i\ p+1}(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{mnr}^{i\ p+1} \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B},$$

где A и B – длины сторон разворота охватывающей оболочки.

Кроме того, функции $T_r^{i\ p+1}$ и $q_r^{i\ p+1}$, входящие в граничные условия исходной оболочки, разлагаются в ряд вдоль следа контура L [10-12]

$$T_r^{i,p+1}(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \sum_{\alpha=1,2} T_{\alpha\mu r}^{i,p+1} d_{\alpha\mu}(s); \quad q_r^{i,p+1}(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu^*} \sum_{\alpha=1,2} q_{\alpha\mu r}^{i,p+1} d_{\alpha\mu}(s),$$

где

$$d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)]; \quad \gamma(s) = \frac{2\pi \int_0^s d\tilde{s}}{\int_0^{s^*} d\tilde{s}}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi.$$

В результате преобразований система интегральных уравнений (10) сводится на каждом шаге по времени к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в ряд функций компенсирующих источников $q_{\alpha\mu r}^{i,p+1}$.

Результаты исследований. Проведено сравнение результатов расчета на основе предлагаемого подхода с результатами, полученными в ходе проведения термографического исследования многослойной цилиндрической оболочки.

Исследование проводилось при помощи тепловизора Fluke Ti-40. Показания тепловизора фиксировались с интервалом в 30 с на протяжении 300 с. Измерения начинались в момент включения источника тепла.

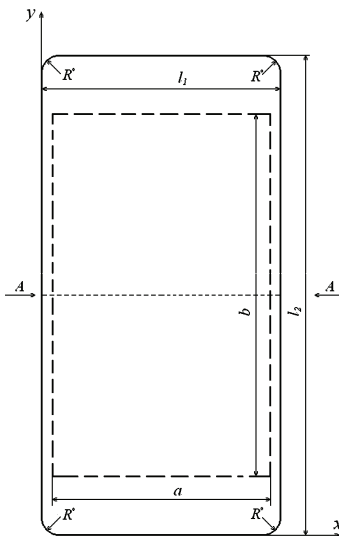


Рисунок 3 – Расчетная схема цилиндрической оболочки

На рис. 3 приведена расчетная схема. Исследуемый объект имел следующие геометрические и теплофизические характеристики: количество слоев $I = 5$; толщины слоев $h_1 = 0,020$ м; $h_2 = 0,002$ м; $h_3 = 0,015$ м; $h_4 = 0,003$ м;

$h_5 = 0,005$ м; размеры, показанные на рис. 3, $l_1 = 0,33$ м; $l_2 = 0,66$ м; $R^c = 0,025$ м; радиус кривизны оболочки $R = 1,334$ м (дуга в направлении оси y); коэффициенты теплопроводности материала слоев $k_i = 1,60$ Вт/(м·К) ($i = 1, 3, 5$); $k_i = 0,17$ Вт/(м·К) ($i = 2, 4$); коэффициенты конвективного теплообмена $H_1 = 8,7$ Вт/(м²·К); $H_l = 30$ Вт/(м²·К); температуры внешней среды $T_\infty^1 = 302$ К; $T_\infty^l = 302$ К, начальная температура слоев оболочки $T_0^i = 302$ К ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

Мощность пленочного источника тепла, расположенного между четвертым и пятым слоями: $q_1 = 1340$ Вт/м², а его размеры (см. рис. 3) – $a = 0,3$ м, $b = 0,5$ м.

Контур объекта теплоизолирован.

На рис. 4, показаны распределения температур на внешней поверхности последнего слоя оболочки в разные моменты времени в сечении $A - A$, обозначенном на расчетной схеме пунктирной линией.

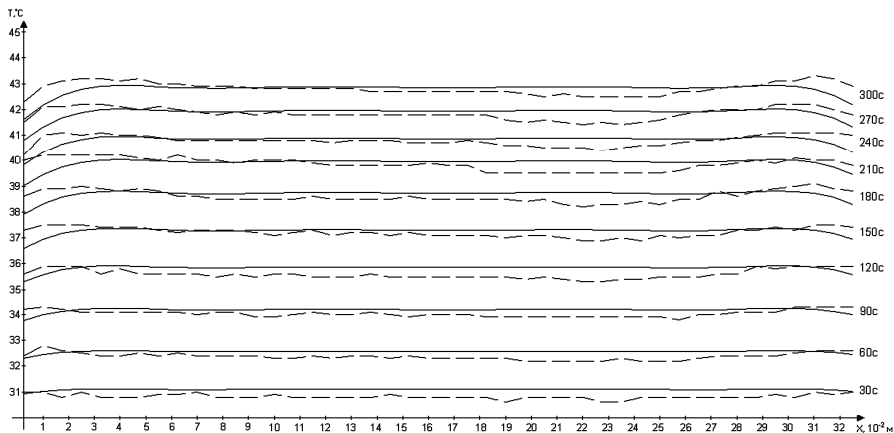


Рисунок 4 – Распределение температуры на внешней поверхности пятого слоя оболочки в разные моменты времени, сечение $A-A$

Выводы. Разработан метод решения задач нестационарной теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных цилиндрических оболочек, позволяющий описать тепловое состояние оболочек неканонической формы в плане.

Сравнение с результатами исследования подтверждает достоверность результатов, полученных на основе предлагаемого подхода.

Предложенный подход может быть применен при проектировании многослойного остекления летательных аппаратов и других транспортных средств.

Список литературы: 1. Kantor B.Ya. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates / B.Ya. Kantor, N.V. Smetankina, A.N. Shupikov // Int. J. Solids and Structures. – 2001.

– Vol. 38. – P. 8673-8684. **2.** Болотин В.В. Механика многослойных конструкций. / Ю.Н. Новичков, В.В. Болотин – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с. **3.** Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1982. – 480 с. **4.** Рвачев В.Л. Расчет температурного поля кусочно-однородных тел сложной формы / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко, М.М. Литвин // Теплофизика и теплотехника. – 1977. – Вып. 32. – С. 18-22. **5.** Smetankina N.V. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates / N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, Ye.V. Svet // Trans. ASME. J. of Heat Transfer. – March, 2007. – Vol. 129. – P. 335-341. **6.** Свет Е.В. Стационарная задача теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных пластин сложной формы / Е.В. Свет // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 3 (75). – X., 2013. – С. 77 – 85. **7.** Свет Е.В. Нестационарная задача теплопроводности в трехмерной постановке для многослойных пластин сложной формы / Е.В. Свет // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Динаміка і міцність машин. – X.: НТУ «ХПІ». – 2013. – № 63 (1036). – С. 122-131. **8.** Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов – М.: Наука, 1975. – 632 с. **9.** Шушиков А.Н. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация. Научное издание / А.Н. Шушиков, Я.П. Бузько, Н.В. Сметанкина, С.В. Угрюмов. – X.: Изд. ХНЭУ, 2004. – 252 с. **10.** Zielinski A.P. On curvilinear distribution expressed by double Fourier series / A.P. Zielinski // J. Appl. Math. and Phys. – 1980. – Vol. 31. – P. 717-729. **11.** Zielinski A.P. Metoda trygonometrycznych szeregów określonych na konturze w zastosowaniu do płyt o brzegu swobodnym i swobodnie podpartym / A.P. Zielinski // Rozpr. inż. – 1982. – Vol. 30, № 2. – P. 151-165. **12.** Zielinski A.P. A contour series method applied to shells / A.P. Zielinski // Thin-Walled Struct. – 1985. – № 3. – P. 217-229.

Bibliography (transliterated): 1. Kantor B.Ya., N.V Smetankina and A.N. Shupikov "Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates." Int. J. Solids and Structures. Vol. 38. 2001. 8673-8684. Print. **2.** Bolotin V.V., Ju.N. Novichkov *Mehanika mnogoslajnykh konstrukcij*. Moscow. Mashinostroenie. 1980. Print. **3.** Saharov A.S., I. Al'tenbah *Metod konechnykh jelementov v mehanike tverdyh tel*. Kiev: Vishha shkola. Golovnoe izd-vo. 1982. Print. **4.** Rvachev V.L. A.P., Slesarenko and M.M. Litvin "Raschet temperaturnogo polja kusoczno-odnorodnyh tel slozhnoj formy." *Teplofizika i teplotehnika*. № 32. 1977. 18–22. Print. **5.** Smetankina N.V., Shupikov A.N., Svet Ye.V. "Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates." *Trans. ASME. J. of Heat Transfer*. Vol. 129. 2007. 335–341. Print. **6.** Svet Ye.V. "Stacionarnaja zadacha teploprovodnosti v trehmernoj postanovke dlja mnogoslajnyh plastin slozhnoj formy." *Voprosy proektirovanija i proizvodstva konstrukcij letatel'nyh apparatov: sb. nauch. tr. Nac. ajerokosm. un-ta im. N.E. Zhukovskogo «HAИ»*. №3.75. Kharkov. 2013. 77 – 85. Print. **7.** Svet Ye.V. "Nestacionarnaja zadacha teploprovodnosti v trehmernoj postanovke dlja mnogoslajnyh plastin slozhnoj formy." *Visnyk Natsional'noho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats'. Ser.: Dynamika i mitsnist' mashyn*. № 63 (1036). 2013. 122-131. Print. **8.** Bahvalov N.S. *Chislennye metody*. Moscow: Nauka. 1975. Print. **9.** Shupikov A.N., Ja.P. Buz'ko, N.V. Smetankina and S.V. Ugrimov *Nestacionarnye kolebanija mnogoslajnyh plastin i oboloczek i ih optimizacija*. Nauchnoe izdanie. Kharkov: Izd. HNJeU. 2004. Print. **10.** Zielinski A.P. "On curvilinear distribution expressed by double Fourier series." *J. Appl. Math. and Phys*. Vol. 31. 1980. 717–729. Print. **11.** Zielinski A.P. "Metoda trygonometrycznych szeregów określonych na konturze w zastosowaniu do płyt o brzegu swobodnym i swobodnie podpartym." *Rozpr. inż*. Vol. 30 № 2. 1982. 151–165. Print. **12.** Zielinski A.P. "A contour series method applied to shells." *Thin-Walled Struct*. № 3. 1985. 217–229. Print.

Поступила (received) 24.09.2014