

*С. Ю. МИСЮРА*, и.о. мл. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

## **ВЛИЯНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ФАКТОРОВ НА ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ КРЫШЕК ГИДРОТУРБИН**

Представлена методика расчета собственных частот колебаний крышки гидротурбины в вакууме и при взаимодействии с водой с учетом предварительно напряженного состояния конструкции. На тестовом примере проверена работоспособность предлагаемого подхода и подтверждена достоверность результатов, полученных на его основе. Результаты, полученные по предлагаемому подходу, отличаются от экспериментальных данных от 0,5 до 11 %.

**Ключевые слова:** колебания, предварительно напряженное состояние, внутреннее давление, крышка гидротурбины.

**Введение.** На частоту крышки гидротурбины влияет большое количество факторов, таких как: давление воды, предварительно напряженное состояние от нагрузок, инерционные силы от присоединенных масс, а также глубина объема воды под крышкой. В работе [1] проведены экспериментальные и расчетные исследования динамических характеристик упругих оболочек, наполненных вязкоупругой жидкостью. Эти исследования показали, что методика, основанная на схеме Лагранжа, дает удовлетворительное совпадение частот свободных колебаний как в случае скольжения, так и прилипания вязкой жидкости к поверхности оболочки. Учет прилипания вязкой жидкости к поверхности дает более близкие к экспериментальным значения коэффициентов демпфирования, по сравнению со схемой проскальзывания, что может служить критерием правильности выбора расчетной схемы. В статье [2] проведено математическое моделирование собственных колебаний тонкостенных сосудов в качестве топливных баков в виде цилиндрических оболочек с конструктивными особенностями и изучено влияние радиального давления на собственные частоты. В публикации [3] проведено исследование влияние статического давления на виброакустические характеристики оболочечных конструкций. Получены зависимости, демонстрирующие, что это влияние эквивалентно появлению мембранной жесткости оболочки и ее подкреплений, которая в ряде случаев может достигать значений изгибной жесткости. Для тонких осесимметричных оболочек выведены аналитические формулы для оценки изменения собственных частот оболочки от величины гидростатического давления. С помощью МКЭ исследовано влияние гидростатики на акустические свойства оболочечных конструкций, имеющих сложную геометрию. Продемонстрировано наличие высокой чувствительности виброакустических характеристик внутреннего насыщения тонкостенных корпусов к внешнему давлению.

© С. Ю. Мисюра, 2014

Теоретико-экспериментальным методом в работе [4] исследуется влияние нормального давления на частоты свободных колебаний гладких и подкрепленных дискретными ребрами жесткости цилиндрических оболочек и панелей, а также приводятся результаты эксперимента по определению оптимальной жесткости подкрепляющих элементов при динамическом деформировании и при потере устойчивости в случае равномерного внешнего давления.

Актуальность данной работы заключается в необходимости комплексного исследования влияния конструкционных параметров и эксплуатационных факторов на частоты колебаний крышек гидротурбин.

Целью работы является создание методики расчета собственных частот колебаний конструкций в вакууме и при взаимодействии с водой и с учетом предварительно напряженного состояния конструкции.

**Колебания в вакууме при отсутствии внешних воздействий.** Из-за сложности формы конструкции задача решается методом конечных элементов (МКЭ) и заключается в отыскании частот и соответствующих им форм колебаний.

Матричное дифференциальное уравнение движения конструкции, имеет вид

$$M\ddot{\bar{v}} + K\bar{v} = 0, \quad (1)$$

где  $M$  – матрица масс;  $K$  – матрица жесткости конструкции;  $\bar{v}$  – вектор перемещений.

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\bar{v} = \bar{w} \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $\omega$  – частота;  $\bar{w}$  – форма колебаний.

В итоге, с учетом (1) и (2), задача сводится к решению однородной системы алгебраических уравнений

$$(K - \omega^2 M)\bar{w} = 0. \quad (3)$$

Система (3) имеет нетривиальное решение в том случае, когда ее определитель равен нулю

$$|K - \omega^2 M| = 0. \quad (4)$$

Определитель представляет собой уравнение, корнями которого являются частоты  $\omega_i$ , зная которые на основе (3) определяются собственные формы колебаний конструкции –  $\bar{w}_i, (i = 1, \infty)$  [5].

Учет инерционных сил от масс, оборудования, расположенного на крышке, моделируется приведенной плотностью.

**Гидроупругие колебания.** В этом случае в динамический процесс вовлекается жидкость. Поэтому связанная система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} [M^s] & 0 \\ \rho[L]^T & [M^f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{q}\} \\ \{\ddot{p}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K^s] & -[L] \\ 0 & [K^f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} = 0, \quad (5)$$

где  $[M^s]$  и  $[M^f]$  – матрицы масс оболочечных конечных элементов (КЭ) и КЭ, на которые разбит объем жидкости соответственно;  $[K^s]$ ,  $[K^f]$  – матрицы жесткости оболочечных КЭ и КЭ, на которые разбит объем жидкости соответственно;  $q$  – вектор обобщенных узловых перемещений;  $\rho$  – плотность жидкости;  $p$  – вектор узловых давлений;  $[L]$  – матрица связи между граничными элементами конструкции и КЭ акустической среды, определяемая формулой

$$[L] = \int_A \{\Phi\} \{n\}^T \{\Phi'\}^T dA.$$

Здесь  $\{\Phi\}$  – функции формы давления КЭ, на которые разбит объем жидкости,  $\{\Phi'\}$  – функции формы перемещений КЭ оболочки,  $\{n\}$  – вектор направляющих косинусов нормали к поверхности оболочки, взаимодействующей с водой,  $A$  – площадь поверхности соприкосновения между структурными КЭ и КЭ, на которые разбит объем жидкости [6].

**Предварительно напряженные конструкции.** Модальный анализ предварительно напряженной конструкции выполняется на основе уравнения

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]_c \{u\} = 0, \quad (5)$$

где  $\{u\}$  – вектор узловых перемещений для всего тела;  $\{\ddot{u}\}$  – вектор ускорений точек тела;  $[M]$  – матрица масс;  $[K]_c = [K] + [K]_g$  – суммарная матрица жесткости;  $[K]$  – обычная матрица жесткости;  $[K]_g$  – так называемая геометрическая матрица жесткости, получаемая на основе тензора предварительных напряжений и нелинейной части тензора деформаций [6].

**Численные результаты.** В качестве тестовой задачи была решена задача по определению частот собственных колебаний цилиндрической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления  $q$  (рис 1). Рассчитывалась стальная цилиндрическая оболочка [7, 8], имеющая длину  $L = 0,7$  м, радиус  $r = 0,15$  м, толщина стенки  $h = 0,001$  м.

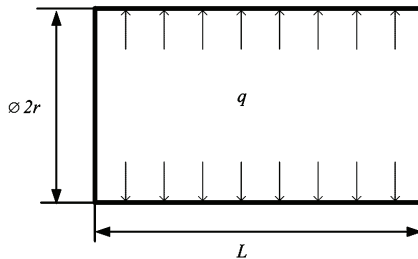


Рисунок 1 – Цилиндрическая оболочка

Для выбора размера КЭ выполнена серия расчетов и проведена оценка сходимости решения.

Приближенная формула для вычисления собственных частот  $\Omega$  цилиндрических оболочек с учетом внутреннего давления  $q$  получена в [7] и имеет вид

$$\Omega = \frac{(1-v^2)\lambda^4 + k(\lambda^2 + m^2)^4 + \Psi_1(\lambda^2 + m^2)^2(m^2 - 1) + \Psi_2(\lambda^6 + \lambda^2 m^4 + 2\lambda^4 m^2)}{m^4 + \lambda^4 + (1 + 2\lambda^2)m^2}, \quad (6)$$

где  $m$  – число волн по окружности поперечного сечения оболочки;  $n$  – число полуволн по длине оболочки;  $\lambda = \frac{n\pi r}{l}$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;

$\Psi_1 = \frac{qr(1-v^2)}{Eh}$ ;  $E$  – модуль упругости;  $q$  – гидростатическое давление;  $N_x$  – единичная продольная сила;  $\Psi_2 = \frac{N_x(1-v^2)}{Eh}$ ;  $k = \frac{h^2}{12r^2}$ .

В табл. 1 приводятся частоты колебаний, полученные на основе предлагаемого подхода –  $f$ , аналитического решения –  $f_{\text{теор}}$  (6), а также экспериментальные данные –  $f_{\text{эсп}}$  [7], где  $m$  – количество узловых меридианов.

Таблица 1 – Собственные частоты колебаний

$m$	Аналитическое решение [7], $f_{\text{теор}}$ , Гц	Экспериментальные данные [7], $f_{\text{эсп}}$ , Гц	Предлагаемый подход, $f$ , Гц
$q = 0$ (вакуум)			
4	233	266	268
3	273	280	298
6	405	436	395
$q = 0,196$ МПа			
3	329	374	357
4	346	410	392
6	568	-	543
$q = 0,392$ МПа			
3	378	400	425
4	432	452	428
$q = 0,588$ МПа			
3	420	412	456
4	498	510	489
6	795	798	757
$q = 0,784$ МПа			
4	562	550	543
6	890	850	845
$q = 0,980$ МПа			
3	494	470	511
4	615	600	592
6	975	910	924
$q = 1,176$ МПа			
4	662	640	637

Внутреннее давление приводит к увеличению собственных частот колебаний цилиндрической оболочки.

Отличие между результатами, полученными на основе предлагаемого подхода и экспериментальными данными, составляет от 0,5 до 11 %, а между результатами, полученными на основе предлагаемого подхода и рассчитанными по формуле (6), составляет от 0,9 до 15 %.

При воздействии внешнего давления  $q = 0,196$  МПа первая собственная частота составляет 126 Гц (а ее значение в вакууме – 268 Гц, а при внутреннем давлении – 357 Гц (см. табл. 1)). Видно, что внутреннее давление приводит к увеличению собственных частот, а внешнее их снижает.

Далее исследуются свободные колебания крышки гидротурбины. Общий вид крышки гидротурбины представлен на рис. 2. Она изготавливается из листового проката стали. Габаритные размеры крышки: диаметр – 3,44 м, высота – 1,05 м.

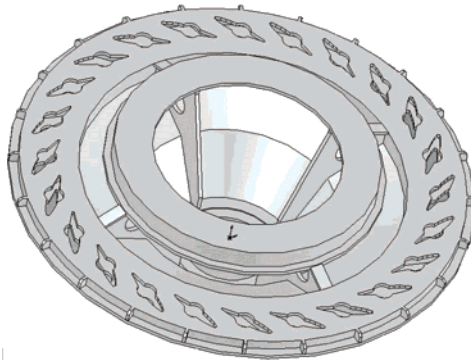


Рисунок 2 – Крышка гидротурбины

Вводятся условия закрепления крышки по опорной поверхности фланца, соединяющего ее со статорным кольцом, которое считается абсолютно жестким, вдоль окружности, на которой расположены шпильки фланцевого соединения.

На крышку действует вес генератора и рабочего колеса  $P = 2,45 \cdot 10^5$  Н, приложенный к поверхности верхнего кольца. К днищу приложено гидравлическое давление  $q_2 = 0,0965$  МПа и  $q_1 = 0,1254$  МПа. Схема нагружения и закрепления конструкции показаны на рис. 3.

Конечноэлементная модель крышки гидротурбины с объемом воды представлена на рис. 4. На рисунке обозначено:  $D$  – диаметр,  $H$  – глубина объема воды.

Наибольший интерес представляет первая собственная частота, так как она наиболее близка к частоте возмущения. Значение первой частоты в вакууме составляет 25,45 Гц, а ее форма показана на рис 5.

При исследовании собственных колебаний крышки инерционные силы от массы  $M$  оборудования, установленного сверху на крышке, моделировалась приведенной плотностью кольца.

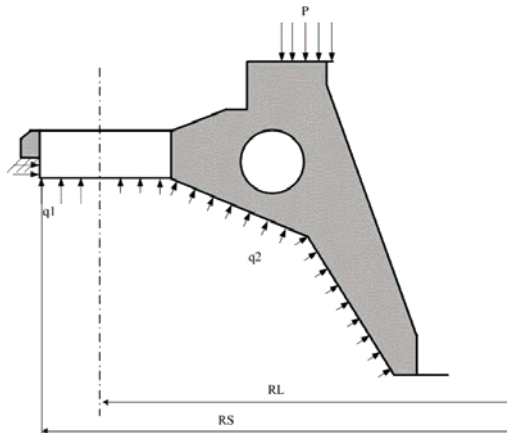


Рисунок 3 – Схема нагружения и закрепления конструкции

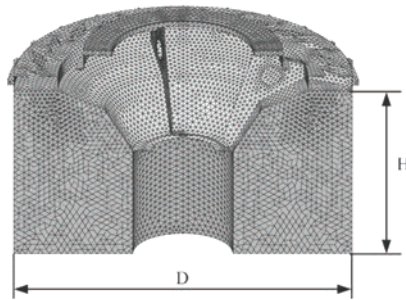


Рисунок 4 – Разрез крышки гидротурбины с объемом воды

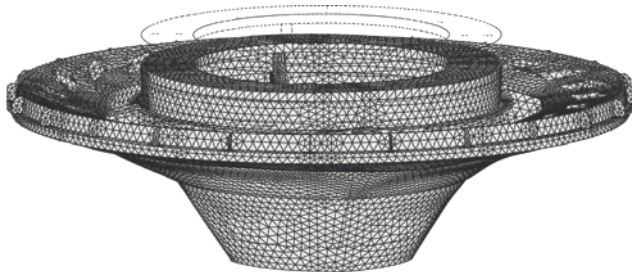


Рисунок 5 – Зонтичная форма собственных колебаний, соответствующая первой частоте

На рис. 6 показана зависимость частоты  $\omega$  от изменения массы,  $M = k \cdot 250$  т, где  $k = 0; 0,5; 1; 1,5; 2$ . Давления воды не учитывалось.

Из графика видно, что изменение массы  $M$  оказывает существенное влияние на собственную частоту.

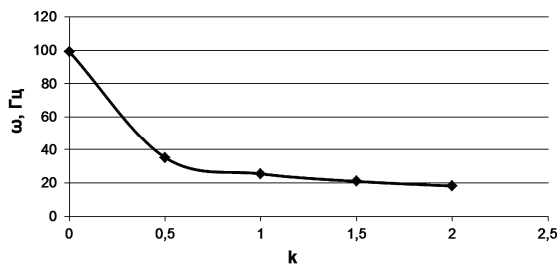


Рисунок 6 – Зависимость частоты от массы

На рис. 7 показано влияние предварительно напряженного состояния от давления воды  $Q$  на частоту  $\omega$ , где  $Q = kq$  МПа,  $q = 0,0965$ , и  $k = 0; 0,5; 1; 1,5; 2$ . Влияние весовой нагрузки  $M$  и гидроупругих эффектов не учитывалось.

Видно, что изменение давления  $Q$  оказывает не существенное влияние на частоту  $\omega$ .

Исследовано влияние глубины  $H$  объема воды, омывающего крышку. Объем воды имеет диаметр  $D = 3,3$  м и высоту  $H$  от 0 до 6,2 м. (см. рис. 4).

На рис. 8 показана зависимость частоты  $\omega$  от глубины объема воды  $H$  при наличии массы  $M = 250$  т и без нее.

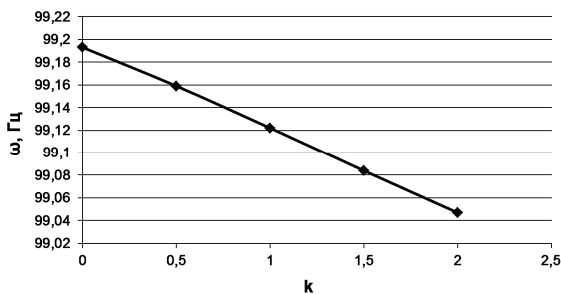


Рисунок 7 – Зависимость частоты от давления воды

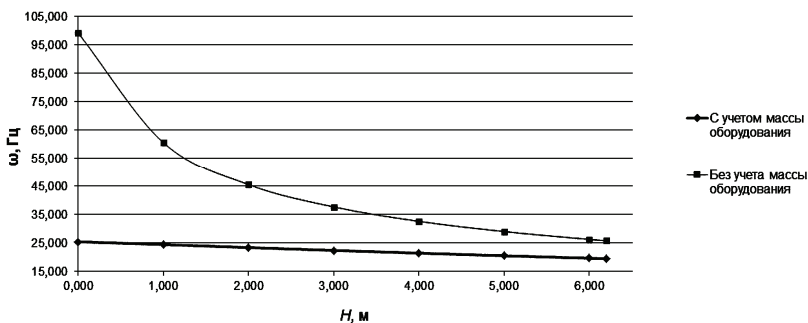


Рисунок 8 – Зависимость частоты  $\omega$  от глубины объема воды

Видно, что с увеличением глубины  $H$  частота гидроупругих колебаний снижается, а влияние глубины объема воды  $H$  проявляется более существенно при отсутствии массы оборудования  $M$  расположенного на крышке.

На рис. 9 показана зависимость частоты от глубины воды при наличии массы с учетом и без учета предварительно напряженного состояния.

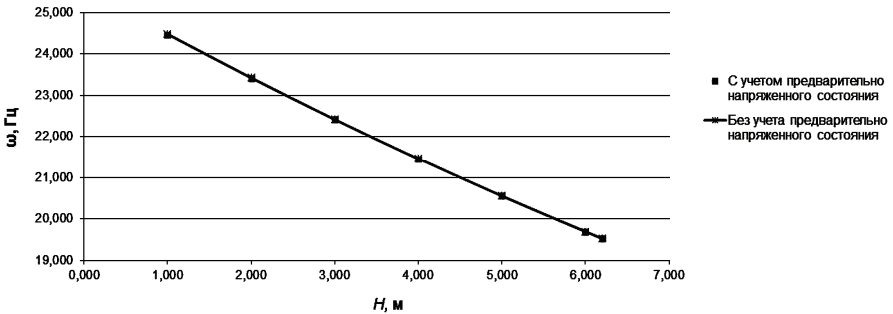


Рисунок 9 – Зависимость частоты от глубины воды с учетом и без учета предварительно напряженного состояния

Графики практически совпадают. При наличии массы  $M$  учет предварительно напряженного состояния проявляется слабо, а графики практически совпадают.

### Выводы

Представлена комплексная методика расчета собственных частот колебаний конструкций в вакууме и при взаимодействии с водой, а также с учетом инерционных сил от массы оборудования расположенного на крышке и предварительно напряженного состояния конструкции.

На тестовом примере проверена работоспособность предлагаемого подхода и подтверждена достоверность результатов, полученных на его основе.

Отличие между результатами, полученными на основе предлагаемого подхода и экспериментальными данными, составляет от 0,5 до 11 %. Отличие между результатами, полученными на основе предлагаемого подхода и рассчитанными по формуле (6), составляет от 0,9 до 15 %.

На основе представленной методики проведен анализ влияния факторов на первую собственную частоту колебаний конструкции крышки гидротурбины в вакууме и с учетом влияния воды и с учетом предварительно напряженного состояния конструкции.

Установлено, что:

- с увеличением глубины объема воды частота гидроупругих колебаний снижается;
- с увеличением весовых нагрузок  $M$  частота колебаний снижается;
- с увеличением давления воды частота колебаний снижается.
- учет предварительно напряженного состояния не оказывает существенного влияния.



**Список литературы:** 1. Сапожников С.Б. Экспериментальное и численное исследование колебаний тонкостенной оболочки, заполненной вязкоупругой жидкостью / С. Б. Сапожников, Е. Я. Фот, В. В. Мокеев // Известия Челябинского научного центра. – 2004. – № 4 (26). – С. 66-70. 2. Тусупова С.А. Математическое моделирование собственных колебаний цилиндрических оболочек с конструктивными особенностями. Влияние радиального давления / С. А. Тусупова // – Режим доступа к журн.: [http://www.rusnauka.com /33\\_NIEK\\_2008/Matemathics/36458.doc.htm](http://www.rusnauka.com /33_NIEK_2008/Matemathics/36458.doc.htm). 3. Акустическое излучение механоакустических систем, находящихся под воздействием гидростатического давления / В. А. Кикеев, П. И. Коротин, М.Б. Салин, Суворов А. С. // Тр. Нижегородского гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексеева. – 2011. – № 1 (86). – С. 161-168. 4. Волошиновский Ю. П. Собственные колебания замкнутых цилиндрических оболочек и панелей при наличии равномерного статического давления / Ю. П. Волошиновский // Исслед. по теор. пластин и оболочек. – 1978. – № 13. – С. 186-192. 5. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с. 6. Inc. Release Theory Reference // ANSYS. – 2010. 7. Бреславский В. Е. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием гидростатического давления / В. Е. Бреславский // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. – 1956. – № 12. – С. 117-120. 8. В.Е. Бреславский Собственные колебания цилиндрических и конических оболочек, находящихся под действием нормального давления / В. Е. Бреславский // Тр. ХВАИВУ. – 1957. – Вып. 65. – 14 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Sapozhnikov, S.B., E. Ja. Fot, V. V. Mokeev Jeksperimental'noe i chislennoe issledovanie kolebanij tonkostennoj obolochki, zapolnennoj vjazkouprugoj zhidkost'ju. Izvestija Cheljabinskogo nauchnogo centra. № 4(26). 2004. 66-70. Print. 2. Tusupova, S.A. Matematicheskoe modelirovanie sobstvennyh kolebanij cilindricheskikh obolochek s konstruktivnymi osobennostjami. Vlijanie radial'nogo davlenija. <[http://www.rusnauka.com / 33\\_NIEK\\_2008/Matemathics /36458.doc.htm](http://www.rusnauka.com / 33_NIEK_2008/Matemathics /36458.doc.htm)>. 3. Kikeev, V. A., P. I. Korotin, M.B. Salin, A. S. Suvorov A. S. Akusticheskoe izluchenie mehanoakusticheskikh sistem, nahodjashhihsja pod vozdejstviem gidrstati-cheskogo davlenija. Tr. Nizhegorodskogo gos. tehn. un-ta im. R.E. Alekseeva. 2011. № 1(86). 161-168. Print. 4. Voloshanovskij, Ju. P. Sobstvennye kolebanija zamknutyh cilindricheskikh obolochek i panelej pri nalichii ravnomer-nogo staticeskogo davlenija. Issled. po teor. plastin i obolochek. 1978. № 13. 186-192. Print. 5. Zenkevich O. Metod konechnyh jelementov v tehnikе. М.: Мир. 1975. 541 Print. 6. Inc. Release Theory Reference. ANSYS. – 2010. 7. Breslavskij, V. E. Sobstvennye kolebanija krugovoj cilindricheskoj obolochki, nahodjashhejsja pod dejstviem gidro-staticeskogo davlenija. Izvestija Akademi nauk SSSR. Otdelenie tehniche-skih nauk. 1956. № 12. 117-120. Print. 8. Breslavskij, V.E. Sobstvennye kolebanija cilindri-cheskih i konicheskikh obolochek, nahodjashhihsja pod dejstviem normal'nogo davlenija. Tr. HVAIVU. 1957. Vyp. 65. 14 Print.

*Поступила (received) 03.10.2014*