

**А. В. ВОРОПАЙ**, канд. техн. наук, доц. ХНАДУ, Харьков;  
**А. Н. ШУПИКОВ**, д-р техн. наук, профессор, зав. отделом ИПМаш  
НАН Украины, Харьков

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УПРУГОЙ ОПОРОЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Механическая система состоит из прямоугольной пластины средней толщины шарнирно-опертой по контуру и дополнительной сосредоточенной упругой опоры. На пластину воздействует неизвестное нестационарное нагружение, вызывающее колебания. Решается обратная задача по идентификации неизвестного нагружения по известным изменениям во времени прогиба точек пластины. Также рассматривается возможность определения жесткости дополнительной упругой опоры.

**Ключевые слова:** пластина, нестационарные колебания, обратная задача, идентификация, интегральные уравнения Вольтерра, регуляризация.

**Введение.** Настоящая работа относится к циклу работ, посвященных моделированию влияния различных механических особенностей (дополнительных опор, присоединенных сосредоточенных масс и т.п.) на нестационарное деформирование пластин. Учет таких особенностей очень важен и помогает перейти к более точному моделированию элементов реальных пластинчатых конструкций. Рассмотренная обратная задача, является логическим продолжением работы [1], в которой описано решение прямой задачи о нестационарных колебаниях пластины с дополнительной линейно-упругой опорой. Отметим, работы [2] и [3], в которых решаются задачи для прямоугольной шарнирно-опертой пластины с амортизатором и сосредоточенной массой соответственно.

**Постановка задачи.** Механическая система состоит из прямоугольной упругой изотропной пластины средней толщины шарнирно-опертой по ее периметру и дополнительной сосредоточенной линейно-упругой опоры, контактирующей с пластиной в некоторой точке (рис. 1). Считается, что дополнительная опора (например, винтовая пружина) установлена ортогонально срединной плоскости пластины и шарнирно соединена с ее нижней лицевой поверхностью, жесткость пружины постоянна, а сила сопротивления прямо пропорциональна перемещению точки  $(x_C, y_C)$ :

$$R(t) = c \cdot w_C(x_C, y_C, t), \quad (1)$$

где  $c$  – коэффициент жесткости, Н/м.

Обратная нестационарная задача может иметь несколько постановок:

1) идентификация закона изменения во времени возмущающей нагрузки при известных жесткости дополнительной опоры и временной зависимости прогиба или деформации в некоторой точке пластины.

2) идентификация жесткости дополнительной линейно-упругой опоры при известных временной зависимости прогиба или деформации в некоторой точке пластины и законе изменения во времени возмущающей нагрузки (подобная постановка – подбор жесткости, в соответствии с требуемыми значениями нестационарного прогиба или деформации).

В любом из двух случаев задача сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра. Только в первом случае нужно идентифицировать неизвестную функцию во времени  $P(t)$ , а во втором случае – константу  $c$  (задача более простая) при условии, что все координаты (и другие параметры) известны.

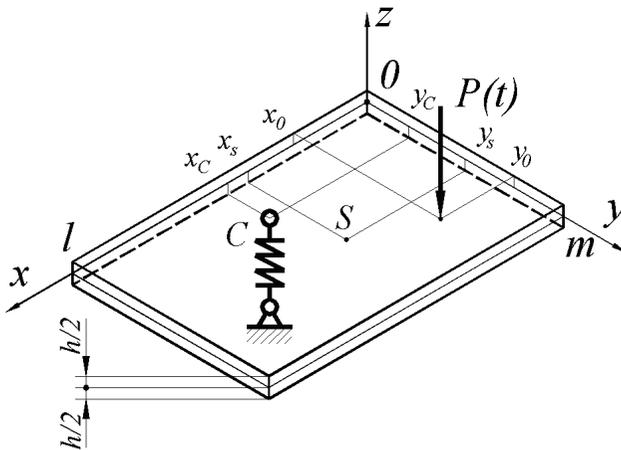


Рисунок 1 – Схема нагружения

**Решение задачи.** Рассмотрим подробно более сложный первый случай. Воздействие дополнительной опоры на пластину моделируется в виде неизвестной нестационарной силы, таким образом, поставленная задача аналогична задаче идентификации двух независимых нестационарных нагрузок, действующих на пластину в разных точках [3]. Как показано в работе [3], для идентификации двух нагрузок нам необходимо знать изменение во времени в двух любых точках пластины. Однако в данном случае величина реакции  $R(t)$  зависит от прогиба пластины и для определения двух независимых функций  $P(t)$  и  $R(t)$  нам достаточно знать изменение во времени прогиба или деформации только в одной точке, которую обозначим  $(x_s, y_s)$ .

В работе [1] показано, что в результате решения системы дифференциальных уравнений, описывающих деформирование пластины согласно теории типа Тимошенко, получается следующее аналитическое выражение для

прогиба пластины:

$$w(x, y, t) = \int_0^t P(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_i^W(x, y, t - \tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $K_i(x, y, t)$  – соответствующие ядра интегралов Дюамеля (сверток) вида:

$$K_i(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{ikn}}{\Delta_{kn}} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \sin \frac{n\pi \cdot y}{m} \cdot \sum_{p=1}^2 \Omega_{pkn} \cdot \sin \omega_{pkn} t.$$

Укажем, что все обозначения соответствуют приведенным в работе [1].

Для точек  $(x_S, y_S)$  и  $(x_C, y_C)$  с учетом выражений (2) и (1) можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} w(x_S, y_S, t) = \int_0^t P(\tau) K_{SP}(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_{SR}(t - \tau) d\tau; \\ w(x_C, y_C, t) = \int_0^t P(\tau) K_P(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_R(t - \tau) d\tau; \\ w(x_C, y_C, t) = \frac{R(t)}{c}. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) может быть преобразована к системе двух интегральных уравнений Вольтерра относительно функций  $P(t)$  и  $R(t)$ , причем первое уравнение будет интегральным уравнение Вольтерра II рода, а второе – I рода. Для удобства решения интегральное уравнение Вольтерра II рода может быть легко преобразовано к уравнению I рода путем внесения функции  $R(t)$  под интеграл.

$$\begin{cases} c \int_0^t P(\tau) K_{CP}(t - \tau) d\tau - c \int_0^t R(\tau) [K_{CR}(t - \tau)] d\tau - R(t) = 0, \\ \int_0^t P(\tau) K_{SP}(t - \tau) d\tau - \int_0^t R(\tau) K_{SR}(t - \tau) d\tau = w(x_S, y_S, t). \end{cases} \quad (4)$$

Система интегральных уравнений (4) решается с использованием регуляризирующего алгоритма А. Н. Тихонова [4]. Согласно методу регуляризации, при решении некорректных задач выполняется конечномерная аппроксимация интегральных уравнений.

После преобразования и дискретизации решение системы интегральных уравнений Вольтерра (4) эквивалентно решению следующей блочной системы линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{w}_s \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрицы  $\mathbf{A}_{ij}$  отвечают соответствующим дискретизированным ядрам ин-

тегральных уравнений, векторы **P** и **R** соответствуют неизвестным функциям  $P(t)$  и  $R(t)$ , а  $w_S$  – известной функции изменения прогиба пластины  $w(x_S, y_S, t)$ .

Описание решения БСЛАУ аналогичных (5) приведено, например, в [3].

**Результаты расчетов.** При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью  $xOy$  декартовой системы координат. Численные расчеты производились при следующих значениях:  $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $E = 2,07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ;  $h = 0,04 \text{ м}$ ;  $l = 0,6 \text{ м}$ ,  $m = 0,4 \text{ м}$ . Координаты точки приложения возмущающей нагрузки:  $x_0 = 0,15 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0,3 \text{ м}$ . Координаты точки крепления дополнительной линейно-упругой опоры к пластине:  $x_C = 0,45 \text{ м}$ ,  $y_C = 0,15 \text{ м}$ . Координаты точки, в которой считалось известным изменение прогиба во времени:  $x_S = 0,25 \text{ м}$ ,  $y_S = 0,1 \text{ м}$ . Величина коэффициента жесткости дополнительной опоры  $c = 10^4 \text{ Н/м}$ . Число членов в соответствующих двойных рядах Фурье  $50 \times 50$ .

При проведении тестовых расчетов на величины прогибов  $\overline{w}_s(t)$ , которые являются результатами решения прямой задачи при заданном законе изменения во времени внешней нагрузки  $P(t)$ , налагался «шум» в соответствии с формулой.  $w_s(t) = \overline{w}_s(t) + w_{\max} \cdot \delta \cdot Rnd(t)$ , где  $\delta$  – относительная погрешность;  $w_{\max}$  – величина максимального прогиба пластины в рассматриваемой точке,  $Rnd(t)$  – случайные числа в интервале  $[-1; 1]$ . Укажем, что процедура «зашумления» моделирует погрешности, возникающие при реальных измерениях параметров НДС элементов конструкций, и позволяет проверить вычислительный алгоритм на устойчивость.

Существенное влияние на устойчивость численного решения БСЛАУ (5), особенно при «зашумленной» правой части, оказывают параметры регуляризации  $\alpha_i$ , содержащиеся в РА Тихонова. Эти параметры целесообразно брать независимыми для каждой из идентифицируемых функций, хотя они могут и совпадать – это зависит от соответствующих ядер интегральных уравнений. Они определяются на основе минимизации по  $\alpha_i$  соответствующих функционалов невязки. Для приведенного численного расчета величина «зашумления» принималась  $\delta = 0,05$ , а параметры регуляризации целесообразно было принять равными  $\alpha_P = 10^{-36}$ , а  $\alpha_R = 10^{-38}$ .

На рис. 2 показано изменение возмущающей нагрузки  $P(t)$  (полуволна синусоиды) и определенная в результате решения прямой задачи реакция дополнительной линейно-упругой опоры  $R(t)$  – жирные черные кривые. Серыми кривыми на рис. 2 показаны результаты решения обратной задачи, а именно: идентифицированные значения возмущающей силы  $P(t)$  и реакции упругой опоры  $R(t)$ . Как видно из рис. 2 идентифицированные кривые практически полностью совпадают с исходными данными для прямой задачи. Заметим, что при решении обратной задачи зависимости  $P(t)$  и  $R(t)$  считались неизвестными и были найдены при решении БСЛАУ (5).

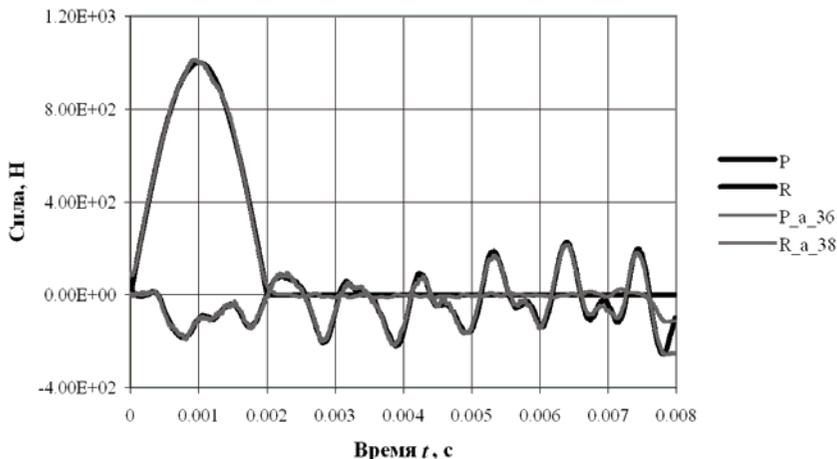


Рисунок 2 – Идентификация неизвестных нагрузок

На рис. 3 показаны две кривые изменения перемещения точки пластины:  
 – кривая 1 показывает изменение прогиба в некоторой точке пластины найденное при решении прямой задачи;  
 – кривая 2 – исходные данные для задачи идентификации («зашумленное» изменение прогиба).

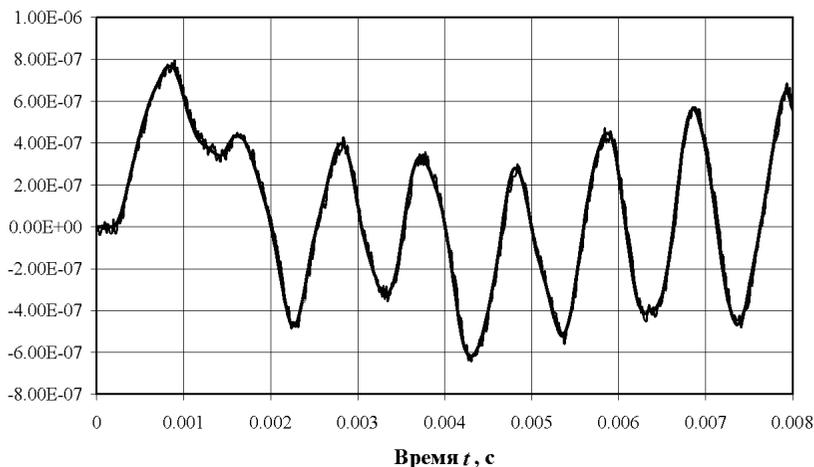


Рисунок 3 – Исходные данные идентификации

**Выводы.** В настоящей работе решена обратная нестационарная задача механики твердого деформируемого тела. Благодаря использованию РА Тихонова получено устойчивое численно-аналитическое решение систе-

мы интегральных уравнений Вольтерра. Показана возможность идентификации неизвестной возмущающей нагрузки по «зашумленным» исходным данным, что обуславливает применимость описанной методики при экспериментальных исследованиях для реальных результатов измерений.

**Список литературы:** 1. *Воропай А. В.* Нестационарные колебания прямоугольной пластины с упругой подпоркой / *Воропай А. В.* // Вестник НТУ «ХПИ». Серия «Динамика и прочность машин». – Х.: НТУ «ХПИ», 2012. – № 55. – С. 30-37. 2. *Воропай А. В.* Нестационарные колебания прямоугольной пластины с амортизатором / *Воропай А. В.* // Вестник НТУ «ХПИ». Серия «Динамика и прочность машин». – Х.: НТУ «ХПИ», 2011. – № 52. – С. 42-48. 3. *Янютин Е. Г., Воропай А. В., Поваляев С. И., Янчевский И. В.* Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Часть II. – Х.: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 212 с. 4. *Тихонов А. Н., Гончаровский А. В.* и др. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 200 с.

*Поступила в редколлегию 11.10.2013.*

УДК 539.3

**Обратная задача для шарнирно-опертой пластины с дополнительной упругой опорой при нестационарном нагружении / А. В. Воропай, А. Н. Шупиков** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 63 (1036). – С. 29-34. – Бібліогр.: 4 назв.

Механічна система складається з прямокутної пластини середньої товщини шарнірно-опертої по контуру та додаткової зосередженої пружної опори. На пластину діє невідоме нестационарне навантаження, що збудує коливання. Розв'язується обернена задача з ідентифікації невідомого навантаження при відомих зміні у часі прогину точок пластини. Також розглядається можливість визначення жорсткості пружної підпірки.

**Ключові слова:** пластина, нестационарні коливання, обернена задача, ідентифікація, інтегральні рівняння Вольтерра, регуляризація.

Mechanical system consists of hingedly supported medium-thickness rectangular plate with additional concentrated elastic support. The nonstationary concentrated load, which initiates vibration, is acting on the plate. The inverse problem of an unknown loading identification is solving, when plate's points deflections in time are known. Also the possibility of elastic support stiffness determination is considering.

**Keywords:** plate, nonstationary vibrations, inverse problem, identification, Volterra integral equation, regularization.