УДК 539.374

В. Г. БАБАДЖАНОВА, доктор философии по техническим наукам, доцент, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан;
В. А. СУЛЕЙМАНОВА, Сумгаитский государственный университет, Азербайджан

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ТЕОРИИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ РЕОЛОГИИ

В статье решается неоднородная задача термовязкоупругости при неоднородной реологии и определенно параметры уравнения состояния теории термовязкоупругости. Построены определяющие соотношения для сдвигового деформирования полиметилметакрилата. Определена область, внутри которой такие соотношения могут применяться для описания термореологического поведения полиметилметакрилата.

Ключевые слова: термовязкоупругость, сдвиговое деформирование, полиметилметакрилат.

Введение. Широкое экспериментальное подтверждение получила следующая основная гипотеза: аналогичное изменение свойств полимерных материалов под воздействием температуры или времени есть внутренне присущее этим материалам свойство. Одним из простейших следствий этой гипотезы, используемых при получении определяющих соотношений термовязкоупругости является температурно-временная аналогия (ТВА) в форме «термореологической простоты» материала [1], фактор (множитель) при переменной, обозначающей время, – функция только температуры. Неудовлетворительный результат применения ТВА в форме «термореологической простоты» для гомополимеров в стеклообразном состоянии и многофазных сред приводит к попыткам усложнить временной масштабный фактор, считая его явно зависящим от времени [2], [3]. В приводимой здесь работе для получения определяющих соотношений термовязкоупругости применяется подход с позиций термодинамики необратимых процессов. Исходим из того, что в сплошной среде простого типа для заданных в каждой точке x тела траекторий абсолютной температуры $\theta(x,t)$ и градиента $F(x,t)$ соотношения:

$$T \cdot\cdot L - \rho\dot{\psi} - \rho\dot{\theta}\eta - \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla\theta \geq 0; \qquad (B.1)$$

$$\psi = \underset{\xi=-\infty}{\overset{\infty}{\psi}} \left[F, \theta, t, \xi, Z(t,\xi)\right]; \qquad (B.2)$$

$$\dot{Z}(t,\xi) = R\left[F, L, \theta, t, \xi, Z(t,\xi)\right] \qquad (B.3)$$

при некоторых [5], [6] к (В.2), (В.3) однозначно определяют зависимости для тензора напряжений T, массовой плотности энтропии η и функции диссипации энергии.

Здесь $L = \dot{F} \cdot F^{-1}$ – градиент скоростей деформации; $T \cdot\cdot L = tr[T \cdot L]$; ρ – плотность; ψ – массовая плотность свободной энергии, которая является непрерывным функционалом относительно $Z(\cdot,\xi)$ и функцией значений остальных переменных; q – вектор потока тепла через поверхность; $Z(t,\xi)$ – тензорнозначная структурная переменная, зависящая от параметра распределения ξ и времени t. $R[\ ]$ – тензорнозначная непрерывная функция значений своих переменных. Соотношения (В.1)-(В.3) являются обобщением термодинамики с внутренними переменными [7] на случай их непрерывного распределения.

В случаях, когда (В.3) имеет вид релаксационного соотношения, как в рассматриваемом ниже случае линейной термовязкоупругости, можно говорить о термореологической сложности материала в упомянутой выше смысле. Термореологическая сложность проявляется тогда в результате предположения о зависимости фактора температурно-временного сдвига от параметра распределения.

Вопрос практического применения предлагаемых уравнений сводится к задаче нахождения спектра времен релаксации и масштабного фактора времени непосредственно из данных кратковременных экспериментов при различных температурах, то есть не предполагая весьма условную и неоднозначную процедуру получения обобщенных характеристик путем сдвига и совмещения изотермических кривых.

Экспериментальные данные по релаксации напряжения и динамическим испытаниям известны лишь с некоторой точностью на конечном промежутке времени, интервале частот и температур. Здесь рассматриваются вопросы приближенной разрешимости задачи нахождения параметров, определяющих соотношений по таким экспериментальным данным.

С учетом этих результатов, по экспериментальным данным, взятым из литературных источников, построены определяющие соотношения для сдвигового деформирования полиметилметакрилата (ПММА) в области между α и β релаксационными переходами, где ТВА в форме «термореологической простоты» материала неприменима. Определена область, внутри которой такие соотношения могут применяться для описания термореологического поведения ПММА. Приводятся некоторые примеры, доказывающие справедливость полученных результатов.

1 Соотношения линейной термовязкоупругости

В результате линеаризации соотношений (В.1)-(В.3) относительно деформаций, которые предполагаются малыми, получим:

$$T \cdot\cdot \dot{E} - \rho\dot{\psi} - \rho\dot{\theta}\eta - \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla\theta \geq 0; \tag{1.1}$$

$$\psi = \psi_0(t,\theta) + \int_{-\infty}^{\infty} Z(t,\xi) \cdot\cdot P_1(t,\theta,\xi)\, d\xi +$$

$$+\int\int_{-\infty}^{\infty} Z(t,\xi_1)\cdot\cdot P_2(t,\theta,\xi_1,\xi_2)\cdot\cdot Z(t,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2; \qquad (1.2)$$

$$\dot{Z}(t,\xi)=\dot{E}(t)-\dot{E}_\theta(t)+A(\theta,\xi)\cdot\cdot[E(t)-E_\theta(t)]-B(\theta,\xi)\cdot\cdot Z(t,\xi); \quad Z(-\infty,\xi)=0\,. \qquad (1.3)$$

Здесь $E(t)$ – линейный тензор полных деформаций; $E_\theta(t)=E_\theta^*(t,\theta)$ – в общем случае тензорнозначный функционал теплового расширения; $A(\theta,\xi)$, $B(\theta,\xi)$ – положительно определенные тензорнозначные четвертого ранга функции с симметрией компонент:

$$\alpha_{ijkl}=\alpha_{jikl}=\alpha_{ijlk}=\alpha_{klij}=\alpha_{klji}\,, \qquad (1.4)$$

$P_1()$ – симметричный тензор второго ранга; $P_2()$ – тензорнозначная четвертого ранга, симметричная относительно ξ_1, ξ_2 функция с симметрией компонент типа (1.4).

Из (1.1), (1.2) следует

$$T=\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\theta,\xi)\cdot\cdot Z(t,\xi)d\xi\,; \qquad (1.5)$$

$$\begin{aligned}\eta=&-\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_0(t,\theta)+2\frac{\partial E_0}{\partial\theta}\cdot\cdot\int_{-\infty}^{\infty} P_2^*(t,\theta,\xi)\cdot\cdot Z(t,\xi)d\xi-\\&-\int\int_{-\infty}^{\infty} Z(t,\xi_1)\cdot\cdot\frac{\partial P_2(t,\theta,\xi_1,\xi_2)}{\partial\theta}\cdot\cdot Z(t,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2;\end{aligned} \qquad (1.6)$$

$$\begin{aligned}\omega=&-\frac{\partial\psi_0(t,\theta)}{\partial\theta}-2[E(t)-E_\theta(t)]\cdot\cdot\int_{-\infty}^{\infty} P_{2a}(t,\theta,\xi)\cdot\cdot Z(t,\xi)d\xi-\\&-\int\int_{-\infty}^{\infty} Z(t,\xi_1)\cdot\cdot\left[\frac{\partial P_2(t,\theta,\xi_1,\xi_2)}{\partial t}-2P_{2b}(t,\theta,\xi_1,\xi_2)\right]\cdot\cdot Z(t,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned} \qquad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned}P_{2a}(t,\theta,\xi)&=\int_{-\infty}^{\infty} P_2(t,\theta,\xi,\xi_1)\cdot\cdot A(\theta,\xi_1)d\xi_1;\\P_{2b}(t,\theta,\xi_1,\xi_2)&=P_2(t,\theta,\xi_1,\xi_2)\cdot\cdot B(\theta,\xi_1);\\G(t,\theta,\xi)&=2\rho_0\int_{-\infty}^{\infty} P_2(t,\theta,\xi_1,\xi_2)d\xi_1;\\P_2^*(t,\theta,\xi)&=\frac{1}{2\rho_0}G(t,\theta,\xi),\end{aligned} \qquad (1.8)$$

где ρ_0 – плотность материала в недеформированном состоянии; ω – функция диссипации энергии; $P_1(t,\theta,\xi)\equiv 0$ в силу предположения об отсутствии дополнительных, не связанных с деформированием напряжений.

В частном случае

$$P_2(t,\theta,\xi_1,\xi_2) = \widetilde{P}_2(t,\theta,\xi_1,\xi_2)\delta(\xi_1 - \xi_2),$$

где $\delta(t)$ – дельта функция Дирака и $\widetilde{P}_2(t,\theta,\xi_1,\xi_2)$ – изотропный тензор четвертого ранга; $A(\theta,\xi) \equiv 0$, $\psi_0(t,\theta) \equiv 0$ (1.2)-(1.8) эквивалентны интегральным соотношениям, приведенным в работах [8, 9]. Однако, авторы работ [8, 9] ограничиваются рассмотрением «термореологически простого» материала.

В изотропном случае соотношения (1.3), (1.5) принимают вид:

$$\dot{Z}_S(t,\xi) = \dot{E}((t) + \alpha_1(\theta,\xi)E(t) - b_1(\theta,\xi)Z_S(t,\xi); \tag{1.9}$$

$$\dot{Z}_\sigma(t,\xi) = \dot{e}((t) - \dot{e}_\theta(t) + \alpha_2(\theta,\xi)(e - e_\theta)(t) - b_2(\theta,\xi)Z_\sigma(t,\xi); \tag{1.10}$$

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(t,\theta,\xi)Z_S(t,\xi)\,d\xi; \tag{1.11}$$

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} G_2(t,\theta,\xi)Z_\sigma(t,\xi)\,d\xi. \tag{1.12}$$

Здесь S, σ – девиатор и шаровая часть тензора напряжений; $E(t)$, $e(t)$ – девиатор и шаровая часть тензора деформаций; $e_\theta(t)$ – шаровая часть тензора теплового расширения (его девиатор равен нулю); $Z_S(t,\xi)$, $Z_\sigma(t,\xi)$ – девиатор и шаровая части тензора $Z(t,\xi)$.

Представим функцию $b_1(\theta,\xi)$ из (1.9) (аналогично $b_2(\theta,\xi)$ из (1.10)) в виде:

$$b_1(\theta,\xi) = \lambda_1(\xi)\exp[\widetilde{u}_1(\theta,\xi)]. \tag{1.13}$$

И предположим, что $\widetilde{u}_1(\theta,\xi)$ (аналогично $\widetilde{u}_2(\theta,\xi)$) имеет вид полинома от ξ, то есть

$$\widetilde{u}_1(\theta,\xi) = u_0(\theta) + u_1(\theta)\xi + \ldots + u_n(\theta)\xi^n\ . \tag{1.14}$$

Определение 1. Назовем вязкоупругий материал, для описания термомеханических свойств которого применяется в (1.4) полином n-ой степени от ξ, материалом n-го порядка «термореологической сложности».

В рамках этого определения известная теория «термореологически простых» материалов [1] имеет нулевой порядок «термореологической сложности», так как она строится на предположении:

$$\widetilde{u}_1(\theta,\xi) = u_0(\theta).$$

Естественный следующий шаг – рассмотреть случай

$$\widetilde{u}_1(\theta,\xi) = u_0(\theta) + u_1(\theta)\xi, \tag{1.15}$$

то есть материал I-го порядка «термореологической сложности».

2. Постановка задачи нахождения параметров определяющих соотношений из данных термомеханических экспериментов.

Пусть с некоторой точностью Δ известно напряженное состояние:

$$S_\Delta(t) - S \pm \Delta; \quad \sigma(t) = 0; \quad t \in [t_\Delta, t_1]; \quad t_0 < t_\Delta; \quad t_0 \in (-\infty;\infty).$$

Для следующих типов деформации:

1) $E(\tau)=E^*(\tau)h(\tau-t_0);\quad \theta=\theta(\tau);\quad e(\tau)=e_0(\tau);$ (2.1)

2) $E(\tau)=E_0\sin(\omega\tau);\quad \theta=\text{const}\in[\theta_1,\theta_2];\quad e(\tau)=e_0.$ (2.2)

Компоненты тензора $E^*(t)$ непрерывны и производные их ограничены; $h(t)$ – единичная ступенчатая функция Хэвисайда:

$$\tau\in(-\infty;t);\quad \omega\in[\omega_0,\omega_1].$$

Требуется определить неизвестные функции $G_1(t,\theta,\xi),\ \alpha_1(\theta,\xi),\ b_1(\theta,\xi)$, исходя из соотношений (1.9)-(1.12).

Мы ограничиваемся рассмотрением формоизменения. Поскольку соотношения для шаровых составляющих имеют аналогичный вид все результаты автоматически переносятся на случай наличия объемного напряженного состояния.

Обозначим: $C(\Omega)$, $M(\Omega)$ – пространства непрерывных, ограниченных на Ω функции соответственно; H – пространство тензоров с нормой

$$\|R\|_H=\sqrt{R\cdot\cdot R}\,. \tag{2.3}$$

Лемма 1. Пусть:

1) имеют место соотношения (2.1), (1.9), (1.11);
2) при $(t,\xi)\in[t_0;\infty)\times(-\infty;\infty)$ функции $b_1(\theta(t),\xi)=b_1^*(t,\xi)$, $\alpha_1(\theta(t),\xi)=\alpha_1^*(t,\xi)$ – положительные действительные непрерывные по ξ и кусочно-непрерывные по t;
3) при фиксированном $t\cdot b^*_1(t,\xi)$ – неубывающая функция ξ;
4) при любом $(t,\xi)\in[t_0;\infty)$ и $\xi\in[\xi_N,\infty)$ существуют интегралы:

$$G_\infty(t,\theta)=\int_{-\infty}^{\xi_1}G_1(t,\theta,\xi)d\xi\,; \tag{2.4}$$

$$G_0(\xi,t,\theta)=\int_{-\xi_N}^{\xi_1}G_1(t,\theta,\xi)d\xi\,, \tag{2.5}$$

Где $-\infty<\xi_1<\xi_N<\infty$.

Тогда соотношение (1.11) имеет вид:

$$\begin{gathered}S=\int_{\xi_1}^{\xi_N}G_1(t,\theta,\xi)Z_S(t,\xi)d\xi+G_\infty(t,\theta)E^*(t)+\\+G_0(\infty,t,\theta)E^*(t_0)\times\exp\left[-\int_{t_0}^{t}b_1^*(t',\xi_N)dt'\right]+R(t),\end{gathered} \tag{2.6}$$

где для $R(t)$ справедлива оценка:

$$\|R(t)\|_H\le\sqrt{\sum_{i,j}\left\|E_{ij}^*\right\|^2_{c[t_0,t_1]}}\left\{1-\exp\left[-(t_1-t_0)\times\left\|b_1^*(t,\xi_1)\right\|_{M[t_0,t_1]}\right]\right\}G_\infty(t,\theta)\times$$

$$\times\left\|1-\frac{\alpha_1^*(t,\xi)}{b_1^*(t,\xi)}\right\|_{M(\Lambda_1)}+G_0(\infty,t,\theta)\sqrt{\sum_{i,j}\left\|\left[\alpha_1^*(t,\xi)+\frac{d}{dt}\right]E_{ij}^*(t)\right\|^2_{M(\Lambda_2)}}\times$$
$$\times\left\|\frac{1}{b_1^*(t,\xi_N)}\right\|_{M[t_0,t_1]}. \qquad (2.7)$$

Здесь $\Lambda_1=[t_0,t_1]\times(-\infty,\xi_1]$; $\Lambda_2=[t_0,t_1]\times[\xi_N,\infty)$.

Лемма 2. Пусть:

1) имеют место соотношения (2.2), (1.9), (1.11) и $\omega\in[\omega_0,\omega_1]$;

2) при каждом θ $b_1(\theta,\xi)$ – неубывающая положительная функция ξ и $\alpha_1(\theta,\xi)$ – ограничена по ξ;

3) выполняется пункт 4) леммы 1.

Тогда соотношение (1.11) имеет вид:

$$S=\int_{\xi_1}^{\xi_{/N}}G_1(t,\theta,\xi)Z_S(t,\xi)d\xi+G_\infty(t,\theta)E(t)+R^*(t,\omega), \qquad (2.8)$$

где для $R^*(t,\omega)$ имеет место оценка:

$$\left\|R^*(t,\omega)\right\|_H\le\left\|E_0\right\|_H\left\{G_\infty(t,\theta)\frac{b_1^*(\theta,\xi_1)}{\omega}+G_0(\infty,t,\theta)\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{\omega^2+\left\|\alpha_1(\theta,\xi)\right\|^2_{M(\xi\in[\xi_N,\infty))}}{\omega^2+b_1^2(\theta,\xi_N)}\right]^{1/2}\right\}. \qquad (2.9)$$

Для того, чтобы яснее представить, что следует из (2.6), (2.7), рассмотрим случай: $\theta=\text{const}$; $b_1(\theta,\xi)$ – возрастающая функция ξ с областью $(0,\infty)$. Из оценки (2.7) в этом случае следует, что для фиксированной величины t_1-t_0 (время эксперимента), заданной деформации $E^*(t)$ и выполнении условий леммы 1 последнее слагаемое в правой части (2.6) для любых ограниченных значений $G_\infty(t,\theta)$, $G_0(\infty,t,\theta)$ становится сколь угодно малым (меньше погрешности Δ) при достаточно малом ξ_1 и большом ξ_N. Таким образом, величина t_1-t_0 и значения $b_1(\theta,\xi)$, $\alpha_1(\theta,\xi)$ диктуют нам положение и величину отрезка $[\xi_1,\xi_N]$ на оси $\xi\in(-\infty,\infty)$, связанные с условием разрешимости задачи определения неизвестных функций $G_1(t,\theta,\xi)$. Вне этого отрезка такая задача становится неразрешимой. Кроме того, третье слагаемое в (2.6) становится порядка Δ и менее при достаточно большой величине $b_1(\theta,\xi_N)\times(t_1-t_0)$. Пренебрежение этим слагаемым накладывает ограничение на величину $t_\Delta=t-t_0$ – минимальное время, для которого при этом будут справедливы соотношения (2.6) для нагружений (2.1), если за начало отсчета принять t_0.

Таким образом, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. Пусть выполняется условие

$$b_1(\theta,\xi)-\alpha_1(\theta,\xi)>0$$

и условия лемм 1, 2 для $t\in[t_0,t_1]$, $\omega\in[\omega_0,\omega_1]$, $\theta(t)\in[\theta_1,\theta_2]$.

Тогда по заданным $E^*(t)$, E_0 и сколь угодно малому Δ найдутся положительные числа $\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,\delta_5,\xi_1,\xi_N,t_\Delta\}$ такие, что при

$$\begin{gathered}
(t-t_0)\left\| b_1^*(t,\xi_1)\right\|_{M[t_0,t_1]}\le\delta_1;\\
\left\|\frac{1}{b_1^*(t,\xi_N)}\right\|_{M[t_0,t_1]}\le\delta_2;\\
(t-t_0)\left\| b_1^*(t,\xi_N)\right\|_{M[t_0,t_1]}\ge\delta_3;\\
\frac{\left\| b_1^*(\theta,\xi_1)\right\|_{M[\theta_1,\theta_1]}}{\omega_0}\le\delta_4;\\
\frac{\omega_1^2+\left\|\alpha_1(\theta,\xi)\right\|_{M([\theta_1,\theta_2]\times[\xi_N,\infty))}}{\min\limits_{\theta\in[\theta_1,\theta_2]}\left[b_1^2(\theta,\xi_N)\right]}\le\delta_5.
\end{gathered}\tag{2.10}$$

Соотношение (1.11) с точностью Δ имеет вид:

$$S=\int\limits_{\xi_1}^{\xi_N}G_1(t,\theta,\xi)Z_S(t,\xi)d\xi+G_\infty(t,\theta)E(t);\quad t\in[t_\Delta,t_1].\tag{2.11}$$

Список литературы: 1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.*Основы математической теории термовязкоупругости. – М., Наука, 1970. **2.** *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977.-384с. **3.** *Гасанов А.Б., Ильясов М.Х., Кийко Т.А.* Распространение нестационарных волн в вязкоупругом полупространстве с учетом внутреннего теплообразования и зависимости свойства материала от температуры // Известия АН СССР, Механика твердого тела. – 1987. – № 1. **4.** *Гасанов А.Б.* Релаксация механических систем на нестационарные внешние воздействия. – Баку: Изд. «Элм», 2004. **5.** *Курбанов Н.Т., Бабаджанова В.Г.* Определяющие соотношения для термореологически сложных вязкоупругих материалов // Актуальные проблемы современной науки. – М.: 2009. – № 2. – С. 90-96.

Поступила в редколлегию 07.10.2013

УДК 539.374

Определение параметров уравнения состояния теории термовязкоупругости при неопределенной реологии / В. Г. Бабаджанова, В. А. Сулейманова // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 63 (1036). – С. 17-24. – Бібліогр.: 5 назв.

У статті розв’язується неоднорідна задача термов’язкопружності при неоднорідною реології та визначено параметри рівняння стану теорії термов’язкопружності. Побудовано визначальні співвідношення для зсувного деформування поліметилметакрилату. Визначена область, усередині якої такі співвідношення можуть застосовуватися для опису термореологічного поведінки поліметилметакрилату.

Ключові слова: термов’язкопружність, зсувне деформування, поліметилметакрилат.

In clause the decision of non-stationary nonlinear problems termoviscoelastics is investigated at change of property of materials under influence of temperature or time and the approach is applied to reception of determining parities termoviscoelastics from positions of thermodynamics of irreversible processes.
Key words: termoviscoelastics, shear deform, polymethylmethacrylate.

УДК 531/534

$\boxed{\textit{\textbf{А. Е. БОЖКО}}}$, д-р техн. наук, профессор, член-корр. НАН Украины, ИПМаш НАН Украины, Харьков;
Е. М. ИВАНОВ, канд. техн. наук, доцент, ХНАДУ «ХАДИ», Харьков;
З. А. ИВАНОВА, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Анализируется возможность предварительного определения устойчивости колебательных систем с *n*-степенями свободы на основе структурной теории, так как наличие положительных обратных связей в структурах могут приводить к неустойчивым режимам работы колебательных систем.
Ключевые слова: колебательная система, структура, устойчивость, степени свободы, передаточная функция.

Введение. В данной статье рассматриваются линейные и линеаризованные колебательные системы (КС) с *n*- степенями свободы. Анализ осуществляется для предварительного определения устойчивости КС на основе структурной теории [2, 3, 5]. В работах [3, 5] имеется некоторый анализ устойчивости КС, но на наш взгляд он может быть дополнен более доскональным применением теории автоматического управления [4]. Впервые построение структур КС с позиций теории автоматического управления было осуществлено в работе [1]. Однако до сих пор возникает вопрос об устойчивости КС с *n*-степенями свободы. Этот вопрос появляется из-за того, что в структурах КС с *n*-степенями свободы имеются положительные обратные связи, которые согласно теории автоматического регулирования [4] могут приводить к неустойчивым режимам работы систем. В связи с таким обоснованием попытаемся проанализировать КС с *n*-степенями свободы.

Постановка проблемы. Механическая система такой КС приведена на рис. 1, где $m_k, c_k, b_k, x_k, k = \overline{1,n}$ – масса, коэффициенты жесткости, демпфиро-