для случая регулярной прецессии объекта / *Ю.А.Плаксий* // Вестник Харьк. политехн. ин-та. – 1992. – №2, выпуск 11. – С.79–83.

Надійшла до редколегії 18.04.2013

УДК 629.7.05

Степеневі алгоритми визначення кватерніонів орієнтації та їх інтерполяційні модифікації / Ю. А. Плаксій // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 168-177. – Бібліогр.: 3 назв.

На основі розкладення частинного розв'язку кінематичного рівняння в кватерніонах в ряд по степенях позірних поворотів отримані степеневі алгоритми визначення орієнтації та їх інтерполяційні модифікації. Показано, що врахування динаміки обертання твердого тіла в алгоритмах приводить до підвищення точності визначення орієнтації.

Ключові слова: кватерніон, орієнтація, безплатформена інерціальна навігаційна система

The orientation algorithms , bazed on the decomposition of the particular solution of the quaternion kinematic equation in the degree series of seeming turns, and their interpolation modifications are received. It is shown that the considering of a rigid body dynamics in algorithms gives orientation definitions to accuracy increase.

Keywords: quaternion, orientation, strapdown inertial navigation system

УДК 539.3

И. В. ФАУСТ, аспирант, НТУ «ХПИ»;
К.В.АВРАМОВ, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., ИПМаш НАН Украины, Харьков

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАРУНЕНА-ЛОЭВА ДЛЯ ИЗВЛЕЧЕНИЯ МОД КОЛЕБАНИЙ АРОЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Применен метод Карунена-Лоева к исследованию колебаний арочных конструкций при их нелинейном деформировании.

Ключевые слова: метод Карунена-Лоева, колебания, арочные конструкция.

1 Введение. Пологие конструкции используются в различных отраслях техники. Например, они применяются в электромеханическом оборудовании для переключения режимов работы оборудования. Арочные конструкции используются для изоляции и гашения колебаний [1, 2].

Метод ортогональной декомпозиции был разработан независимо в различных областях науки. В механики жидкостей этот метод был предложен Каруненом и Лоэве. Они его предложили, опираясь на работу Ламли [3]. Базисные функции, которые определяются вследствие его применения, в разных источниках называются: эмпирические собственные функции, эмпирические базисные функции и эмпирические нормальные функции [4]. Декомпозиции Карунена-Лоэве широко применятся в механике жидкости [5-7]. Для исследования нелинейной динамики конструкций этот метод применялся в работах Вакакиса с соавторами [8, 9].

В данной работе моды Карунена-Лоэве (К-Л) извлекаются из моделирования геометрически нелинейного деформирования арочных конструкций, которые описываются интегро-дифференциальным уравнением в частных производных. Метод сеток применяется для приведения уравнений в частных производных к нелинейной динамической системе с конечным числом степеней свободы большой размерности. Результаты прямого численного интегрирования этой системы являются основой для применения метода Карунена-Лоэве.

2 Декомпозиция Карунена-Лоева. К-Л декомпозиция позволяет из некоторого динамического поля $u(x,t)$ определить систему базисных функций, которая используется для получения из системы уравнений в частных производных, описывающих это поле, нелинейную динамическую систему с конечным числом степеней свободы. Отметим, что динамическое поле конструкции $u(x,t)$ определено в пространственной области Ω. Разложим, это поле $u(x,t)$ на среднее $u(x) = \langle u \rangle$ и переменное по времени $v(x,t)$ так:

$$u(x,t) = u(x) + v(x,t) \ . \qquad (1)$$

Из представленного ниже анализа следует, что поля $u(x,t)$, $v(x,t)$ задаются в виде сеточной пространственно – временной функции. Функцию $v(x,t)$ представим в виде временного ряда $\{v_n(x)\}$; $n = 1,2,...N$. Отметим, что каждая функция $v_n(x)$ зависит от пространственной координаты. Будем искать функцию $\varphi(x)$, которая наилучшим образом описывает все временные реализации $v_n(x)$. Эта задача может быть сформулировано так:

$$\min\left\{\sum_{n=1}^{N}\left(\varphi(x) - v_n(x)\right)^2\right\}. \qquad (2)$$

Данная минимизация проводится поточено для различных значений x. В дальнейшем будет показано, что (2) сводится к проблеме собственных значений. Потребуем, чтобы функция $\varphi(x)$ удовлетворяла следующему условию нормировки:

$$\int_{\Omega}\varphi^2(x)\,dx = 1 \ . \qquad (3)$$

В работе [4, 5] показано, что минимизация функционала (2) сводится к максимизации скалярного произведения:

$$\left(v_n,\varphi\right)=\int_\Omega v_n(x)\varphi\left(x\right)d\Omega. \qquad (4)$$

Задачу представим в виде максимизации среднего значения, которое запишем так:

$$\left\langle\varphi,v_n\right\rangle=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\varphi,v_n\right).$$

В дальнейшем максимизируем $\left\langle\varphi,v_n\right\rangle^2$. Эту задачу можно записать так:

$$\max\left(\lambda\right);\quad \lambda=\left\langle\frac{\left(\varphi,v\right)^2}{\left(\varphi,\varphi\right)}\right\rangle. \qquad (5)$$

Числитель, входящий в функционал (5), представим так:

$$\left\langle\left(\varphi,v\right)^2\right\rangle=\left\langle\int_\Omega\varphi\left(x\right)v_n\left(x\right)dx\int_\Omega\varphi\left(x'\right)v_n\left(x'\right)dx'\right\rangle=\int_\Omega\left\{\left\langle v_n\left(x\right)v_n\left(x'\right)\right\rangle\varphi\left(x\right)dx\right\}\varphi\left(x'\right)dx'. \qquad (6)$$

Введем функцию

$$K(x,x')=\left\langle v_n(x),v_n(x')\right\rangle\equiv\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}v_n(x)v_n(x') \qquad (7)$$

и линейный оператор R от этой функции:

$$R(\cdot)\equiv\int_\Omega K(x,x')(\cdot)dx'. \qquad (8)$$

Тогда выполняется следующее соотношение:

$$\left\langle\left(\varphi,v_n\right)^2\right\rangle=\int_\Omega\{R\varphi\}\,\{\varphi\}dx=(R\varphi,\varphi). \qquad (9)$$

Тогда задачу максимизации можно представить в виде операторной проблемы собственных значений:

$$R\varphi=\lambda\varphi. \qquad (10)$$

В дальнейшем, воспользуемся методом, предложенным в [10]. Функцию $\varphi(x)$ разложим по временным реализациям:

$$\varphi(x)=\sum_k\alpha_k v_k(x). \qquad (11)$$

Тогда проблема собственных значений представляется в матричном виде так:

$$[C]\{\alpha\}=\lambda\{\alpha\}, \qquad (12)$$

где $\left\{\alpha\right\}=\left\lfloor\alpha_1,\alpha_2,\ldots\right\rfloor$; элементы матрицы $[C]$ определяются так:

$$C_{nk}=\frac{1}{N}\int_\Omega v_n(x)v_k(x')dx'.$$

Отметим, что матрица $[C]$ является симметричной и положительно определенной. Собственные значения (12) расположим в порядке убывания так: $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_N$. Первые p доминирующие собственные моды К-Л выбираются из условия:

$$\frac{\sum_{i=1}^{p}\lambda_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \geq 0.999\ . \qquad (13)$$

3 Уравнения колебаний пологой арки. Колебания арки с амплитудами, соизмеримыми с ее толщиной, опишем следующим уравнением в частных производных:

$$\frac{EA}{2L}y_{xx}\int_0^L\left\{\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}dx+EI(y-y_0)_{xxxx}+\rho A y_{tt}=0\,, \qquad (14)$$

где $y_0(x)$ – начальные несовершенства арки; $y(x,t)$ – прогиб арки; EI – изгибная жесткость арки; A – площадь поперечного сечения арки; ρA – масса единицы длины арки; L – длина арки. Величина

$$\frac{EA}{2L}\int_0^L\left\{\left(\frac{dy_0}{dx}\right)^2-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}dx$$

описывает цепные усилия, возникающие в арке; $\rho A y_{tt}$ – инерционная сила единицы длины. При умеренных амплитудах величины цепных усилий являются значительными. Начальные несовершенства арки представим так:

$$y_0=\lambda_1\sin(\pi x/L)\ . \qquad (15)$$

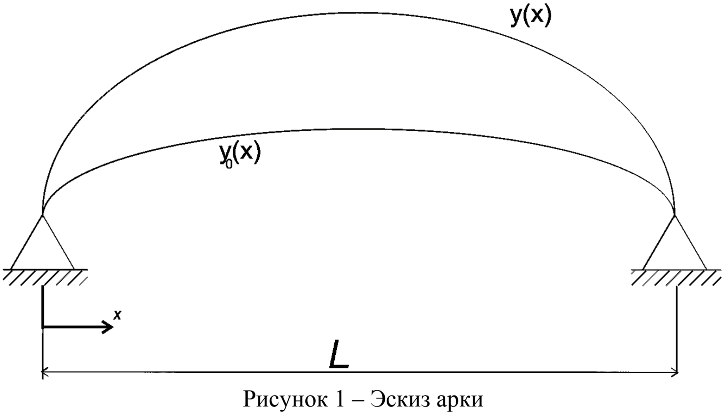


Рисунок 1 – Эскиз арки

Введем следующие безразмерные переменные:

$$u_0=\frac{y_0}{\lambda_1};\quad u=\frac{y}{\lambda_1};\quad \xi=\frac{\pi}{L}x;\quad \tau=\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{E}{\rho}}\lambda_1 t\ . \qquad (16)$$

Тогда уравнения движения арки в безразмерных переменных примут следующий вид:

$$\frac{u_{\xi\xi}}{2\pi}\int_0^L \{u_{0,\xi}^2 - u_\xi^2\}d\xi + EI(u-u_0)_{\xi\xi\xi\xi} + u_{\tau\tau} = 0\,; \tag{17}$$

$$u_0 = \sin(\xi)\,.$$

Для дискретизации уравнения (17) применяется метод конечных разностей. Использовались следующие соотношения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_i \approx (u_{i-1} - u_i)\cdot\frac{1}{h}\,;$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right|_i \approx (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})\cdot\frac{1}{h^2}\,;$$

$$\left.\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4}\right|_i \approx (u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2})\cdot\frac{1}{h^4}\,.$$

Тогда уравнение в частных производных (14) преобразуется к следующей системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_i}{d\tau^2} + \varepsilon[\frac{1}{h^4}(u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}) - \sin(\xi_i)] - \frac{1}{4\pi h}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) \\ \times\sum_{j=1}^{n+1}[\frac{1}{h^2}((u_{j-2} - u_{j-1})^2 + \left(u_{j-1} - u_j\right)^2) - (\cos^2(\xi_{j-1}) + \cos^2(\xi_j))] = 0\,; \\ i = 1,\ldots,M,\end{gathered} \tag{18}$$

где $\xi_i = ih$; $\varepsilon = \dfrac{r^2}{\lambda_1^2}$.

Так как рассматриваемая арка является шарнирно-опертой, то граничные условия представим так:

$$\begin{aligned} &u_0 = 0; \\ &u_{n+1} = 0; \\ &u_{-1} - 2u_0 + u_1 = 0\,; \\ &u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} = 0\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Начальные условия для динамической системы (18) выбирались следующими:

$$u_i(0) = 0{,}024\sin(\xi_i) + 1{,}263\sin(2\xi_i)\,;$$

$$\left.\frac{du_i}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0; \qquad (20)$$

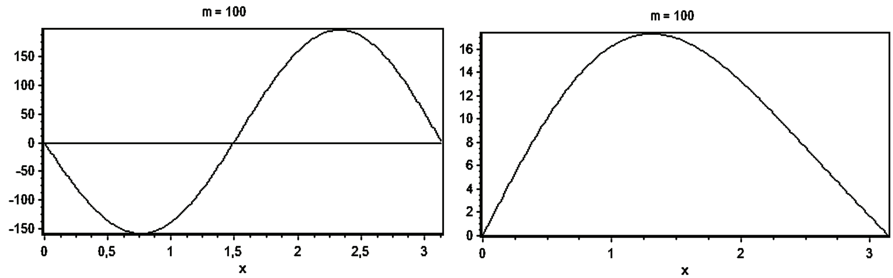
$$i = \overrightarrow{1,n}\,.$$

4 Численные исследования. Для исследования динамики арки, система (18) интегрировалась численно методом Мерсона при различном числе точек дискретизации арки M. Число M варьировалось от 30 до 100. Каждый шаг численного интегрирования давал новую функцию временного ряда $v_n(x)$; $n = 1,\ldots,N$. Число N членов временного ряда выбирались равным 400. Эти временные реализации использовались для расчета матрицы $[C]$. Рассчитывались собственные значения матрицы $[C]$ на основании соотношений (12).

Таблица – Результаты расчета собственных значений

	λ_i
1	0,3488
2	0,0078
3	8,64E-17

Отметим, что для различного числа точек дискретизации арки M собственные значения арки λ_i являются близкими. Результаты расчета собственных значений приведены в таблице. Отметим, что величина собственного значения выше третьего чрезвычайно мала. Она имеет порядок 10^{-17}. Теперь используя условия (13), определим число доминирующих собственных мод p. Из анализа собственных значений следует, что это число $p = 2$. По результатам расчета собственных векторов, сформированы собственные моды колебаний $\varphi_i(x)$. К.-Л. моды колебаний для различного числа точек дискретизации арки M чрезвычайно близки. Первые две моды колебаний К-Л приведены на рис. 2.



а *б*

Рисунок 2 – Карунена-Лоэве моды колебаний: *а* – первая мода, *б* – вторая мода

Выводы. В статье рассмотрен случай, когда амплитуды колебаний пологой арки малы и система не прощелкивает между тремя состояниями равновесия. Поэтому моды колебаний получились близкими к первым двум модам собственных колебаний шарнирно- опертой балки. Мода колебаний (см. рис. 2, *а*) близка к моде $\sin(2\pi x/L)$, а мода (см. рис. 2, *б*) чрезвычайно близка к $\sin(\pi x/L)$. По-видимому, в движение прощелкивания могут быть вовлечены более высокие моды колебаний Карунена-Лоэве. Это будет исследовано в последующих статьях авторов.

Список литературы: **1.** *I. Breslavsky, K. Avramov, Yu. Mikhlin, R. Kochurov* Nonlinear modes of snap-through motions of a shallow arch // Journal of Sound and Vibration (2007). – doi:10.1016/j.jsv. – 2007.09.015. **2.** *L.N. Virgin, R.B. Davis* Vibration isolation using buckled structures // Journal of Sound and Vibration. – 260 (2003). – P. 965-973. **3.** *J. L. Lumely* The structure of inhomogeneous turbulence. In *A. M. Yaglom* and *V. L. Tatarski*, editors, Atmospheric Turbulence and Wawe Propagantion, pp 166-178. – Moskow: Nauka, 1967. **4.** *P.Holmes, J.L.Lumley, G.Berkooz* Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry // Cambridge university press. – 1996. **5.** *P. Bakewell and J. L. Lumely* Viscous sublayer and adjacend wall region in turbulent pipe flows // Physics of Fluids. – 10:1880-9, 967. **6.** *S. Herzog* The Large Scale Structure in the Near Wall Region of a Turbulent Pipe Flow // PhD thesis, Cornell University. – 1986. **7.** *P. Moin, R. D. Moser* Characteristic-eddy decomposition of turbulence in a channel // J. Fluid Mech. – 200:471-509. – 1989. **8.** *M.F. Azeez, A. F. Vakakis* Proper Orthogonal Decomposition of a Class of Vibroimpact Oscillations // J. of Sound and Vib A. – 240(5):589-889, 2001. **9.** *A. F. Vakakis, X. Ma* Nonlinear Transient Localization and Beat Phenomena due to a Copled Flaxible System // J. of Sound and Vib A. – 236(1):42-44. – 2001. **10.** *L. Sirovich, M.Kirby* An eigenfunction approach to large scale transitional structures in jet flow // 1989 Phisics of flueds **A2. –** PP. 127-136.

Поступила в редколлегию 24.07.2013

УДК 539.3

Применение метода Карунена-Лоэва для извлечения мод колебаний арочных конструкций при их геометрически нелинейном деформировании / И. В. Фауст, К. В. Аврамов // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 177-183. – Бібліогр.: 10 назв.

Застосовано метод Карунена-Лоева до дослідження коливань арочних конструкцій при їх нелінійному деформуванні.

Ключові слова: метод Карунена-Лоева, коливання, арочні конструкції.

The Karhunen-Loeve method is applied to study an arched constructions fluctuations subject to geometrically nonlinear deformation.

Key words: Karhunen-Loeve method, fluctuations, arched constructions.