УДК 539.3

С. ДАРИЯ ЗАДЕ, аспирант, НТУ «ХПИ»

ЧИСЛЕННАЯ МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОДНОНАПРАВЛЕННО АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ

Данная статья посвящена исследованию эффективных характеристик однонаправленно армированных композитов. Результаты получены при помощи ПК ANSYS.В результате численного исследования напряженного состояния представительской ячейки были определены эффективные упругие свойства однонаправленно армированного композита.

Ключевые слова: однонаправленный композит, эффективные упругие свойства.

Введение. Первые работы в области механики структурно-неоднородных сред были посвящены исследованиям эффективных механических характеристик микронеоднородных материалов по правилу механического смешивания [1, 2]. В 1946 году И. М. Лифшиц и Л. Н. Розенцвейг [3] предложили рассчитывать макроскопические свойства поликристаллов, решая стохастическую краевую задачу. Этот математический метод моделирования был развит впоследствии в трудах основоположников современной механики композитных материалов стохастической структуры В. А. Ломакина [4], Л. П. Хорошуна [5], Т. Д. Шермергора [6], Г. А. Ванина [7], М. Берана [8], Н. А. Алфутова [9] и многих других ученых. В настоящее время достигнуты значительные результаты прогнозирования эффективных линейно и нелинейно-упругих свойств, упругопластических и вязкоупругих характеристик, процессов деформирования и разрушения структурно-неоднородных материалов.

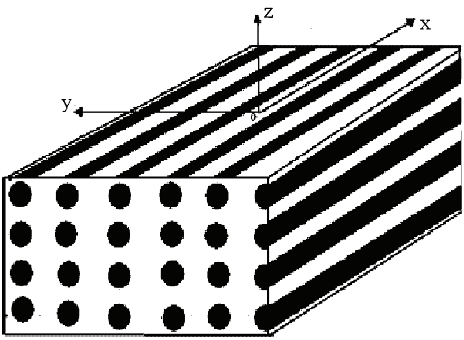


Рисунок 1 – Схема армирования композита

Рассмотрим композиционный материал, однонаправленно армированный волокнами, параллельными оси x (рис. 1).

В объемах, значительно превышающих радиус волокна, композит может рассматриваться как гомогенный ортотропный материал. Напряженное и деформированное состояния такого гомогенного материала характеризуется средними по объему V величинами:

$$\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ij} dV \ ; \quad \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij} dV \ . \tag{1}$$

В системе ортогональных декартовых координат, совпадающей с плоскостями симметрии гомогенного ортотропного материала, закон Гука имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\left\langle \sigma_x \right\rangle = b_{11}\left\langle \varepsilon_x \right\rangle + b_{12}\left\langle \varepsilon_y \right\rangle + b_{13}\left\langle \varepsilon_z \right\rangle ;\\ \left\langle \sigma_y \right\rangle = b_{21}\left\langle \varepsilon_x \right\rangle + b_{22}\left\langle \varepsilon_y \right\rangle + b_{23}\left\langle \varepsilon_z \right\rangle ;\\ \left\langle \sigma_z \right\rangle = b_{31}\left\langle \varepsilon_x \right\rangle + b_{32}\left\langle \varepsilon_y \right\rangle + b_{33}\left\langle \varepsilon_z \right\rangle ;\\ \left\langle \tau_{xy} \right\rangle = b_{44}\left\langle \gamma_{xy} \right\rangle ; \quad \left\langle \tau_{yz} \right\rangle = b_{55}\left\langle \gamma_{yz} \right\rangle ; \quad \left\langle \tau_{zx} \right\rangle = b_{66}\left\langle \gamma_{zx} \right\rangle .\end{gathered} \tag{2}$$

Здесь b_{ij} – упругие постоянные эквивалентного гомогенного материала.

Матрица упругих постоянных является симметричной, то есть $b_{ij} = b_{ji}$. Для квадратной схемы армирования упругие свойства рассматриваемого композита одинаковы в направлениях z и y. Вследствие этого имеет место равенство:

$$b_{22} = b_{33}; \quad b_{21} = b_{31}; \quad b_{55} = b_{66}. \tag{3}$$

Целью настоящей работы является определение этих характеристик по известным упругим свойствам волокон и связующего. Материал волокон и связующего предполагается изотропным.

Для численного исследования выделяется минимальный представительский объем (рис 2), грани которого являются плоскостями симметрии геометрической структуры композита.

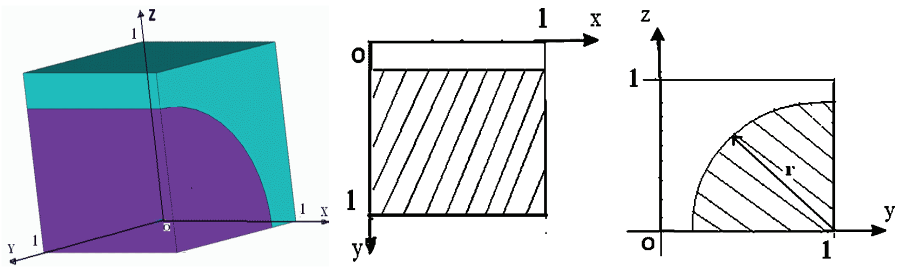


Рисунок 2 – Схема минимального представительского объема

Для нахождения эквивалентных упругих постоянных b_{ij} выполняется анализ напряженного состояния представительского объема в условиях, моделирующих один из видов одноосного деформированное состояния или чистого сдвига в трех плоскостях.

Первый численный эксперимент моделирует одноосное растяжение осредненного материала в направлении оси x.

Средние значения компонентов тензора деформации при этом имеют значения

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \qquad (4)$$

Граничные условия для структурного анализа представительского объема, соответствующие этому виду деформирования композита, следующие:

На грани $x = 1$:

$$u_x = 10^{-3}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0.$$

здесь u_x – перемещение в направлении оси x.

На остальных гранях задаются условия симметрии относительно соответствующих в плоскостей.

Для численного анализа методом конечных элементов применен программный комплекс ANSYS. Для моделирования использовали элемент SOLID 95 с 20 узлами конечно-элементная имела 15436 элементов (рис. 3) [10].

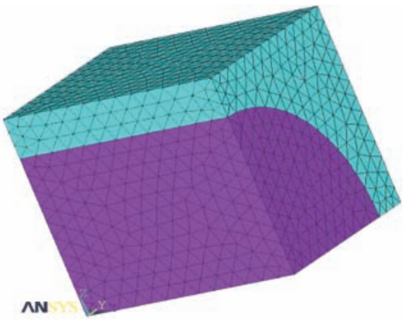


Рисунок 3 – Схема разбиения конструкции на КЭ

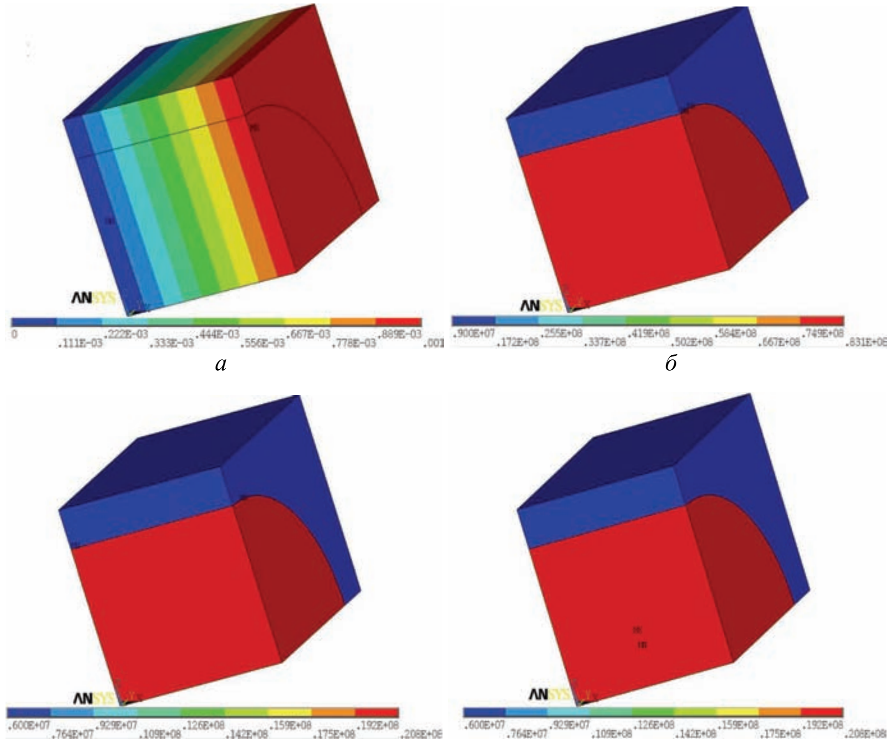
После завершения анализа в постпроцессоре вычислялись средние значения напряжений:

$$\langle \sigma_x \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_x dydz; \quad \langle \sigma_y \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_y dxdz; \quad \langle \sigma_z \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_z dxdy. \qquad (5)$$

Результаты первого численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) три упругие характеристики эквивалентного материала

$$b_{11} = \frac{\langle \sigma_x \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{21} = \frac{\langle \sigma_y \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}; \quad b_{31} = \frac{\langle \sigma_z \rangle}{\langle \varepsilon_x \rangle}. \qquad (6)$$

Численный анализ представительского объема дает возможность исследовать его напряженно-деформированное состояние и оценить локальную концентрацию напряжений. На рис. 4 представлены результаты для первого численного эксперимента.



а *б* *в* *г*

Рисунок 4 – Результаты для первого численного эксперимента: *а* – перемещение вдоль оси x при $u_x = 10^{-3}$; *б-г* – распределение нормальных напряжений σ_x, σ_y, σ_z.

Второй численный эксперимент моделирует одноосное деформирование в направлении оси y. Средние значения компонентов тензора деформации при этом имеют значение

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0\,; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 10^{-3}\,; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0\,; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0\,; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0\,; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0\,. \qquad (7)$$

Для структурного анализа представительского объема, граничные условия, соответствующие этому виду деформирования композита, являются следующими:

На грани $y = 1$:

$$u_y = 10^{-3}; \quad \tau_{xy} = \tau_{zy} = 0.$$

здесь u_y – перемещение в направлении оси y.

На остальных гранях задаются условия симметрии относительно соответствующих плоскостей. Средние значения напряжений вычислялись в постпроцессоре после завершения анализа:

$$\left\langle \sigma_y \right\rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_y dxdz \; ; \quad \left\langle \sigma_z \right\rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_z dxdy \; . \tag{8}$$

Результаты второго численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) следующие упругие постоянные

$$b_{22} = \frac{\left\langle \sigma_y \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_y \right\rangle} \; ; \quad b_{32} = \frac{\left\langle \sigma_z \right\rangle}{\left\langle \varepsilon_y \right\rangle} \; . \tag{9}$$

Третий численный эксперимент моделирует сдвиг материала в плоскости xy. Средние значения компонентов тензора деформации при этом имеют значение:

$$\left\langle \varepsilon_x \right\rangle = 0 \; ; \quad \left\langle \varepsilon_y \right\rangle = 0 \; ; \quad \left\langle \varepsilon_z \right\rangle = 0 \; ; \quad \left\langle \gamma_{xy} \right\rangle = 10^{-3} \; ; \quad \left\langle \gamma_{yz} \right\rangle = 0 \; ; \quad \left\langle \gamma_{xz} \right\rangle = 0 \; . \tag{10}$$

На грани $x = 1$:

$$u_y = 10^{-3}; \quad \sigma_x = \tau_{xz} = 0.$$

На гранях $y = 0$, $y = 1$:

$$u_x = 0; \quad \sigma_y = \tau_{yz} = 0,$$

здесь u_y – перемещение грани $x = 1$ в направлении оси y.

На грани $x = 0$ перемещение во всех направлениях равно нулю, на гранях $x = 1$; $z = 0$; $z = 1$ задаются условия симметрии относительно соответствующих в плоскостей.

После завершения анализа в постпроцессоре вычислялись средние значения напряжений:

$$\left\langle \tau_{xy} \right\rangle = \int_0^1 \int_0^1 \tau_{xy} dydz \; . \tag{11}$$

Результаты третьего численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) упругую характеристику эквивалентного материала

$$b_{44} = \frac{\left\langle \tau_{xy} \right\rangle}{\left\langle \gamma_{xy} \right\rangle} \; . \tag{12}$$

Четвертое численное исследование моделирует сдвиг материала в плоскости yz. Средние значения компонентов тензора деформации при этом имеют значение

$$\left\langle \varepsilon_x \right\rangle = 0 \; ; \quad \left\langle \varepsilon_y \right\rangle = 0 \; ; \quad \left\langle \varepsilon_z \right\rangle = 0 \; ; \quad \left\langle \gamma_{xy} \right\rangle = 0 \; ; \quad \left\langle \gamma_{yz} \right\rangle = 10^{-3} \; ; \quad \left\langle \gamma_{xz} \right\rangle = 0 \; . \tag{13}$$

На грани $z = 1$:

$$u_y = 10^{-3}; \quad \sigma_z = \tau_{zx} = 0.$$

На гранях $y = 0$; $y = 1$:

$$u_z = 10^{-3}; \quad \sigma_y = \tau_{yx} = 0,$$

здесь u_y – перемещение грани $z = 1$ в направлении оси y.

На грани $z = 0$ перемещение во всех направлениях равно нулю; на гранях $x = 0$; $x = 1$; $z = 1$ задаются условия симметрии относительно соответствующих плоскостей.

После завершения анализа в постпроцессоре вычислялись средние значения напряжений

$$\langle \tau_{yz} \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \tau_{yz} dydx \ . \tag{14}$$

Результаты четвертого численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) упругую характеристику эквивалентного материала

$$b_{55} = \frac{\langle \tau_{zy} \rangle}{\langle \gamma_{zy} \rangle} . \tag{15}$$

Для решения практических задач часто используется закон Гука в прямой форме

$$\langle \varepsilon \rangle = [A].\langle \sigma \rangle . \tag{16}$$

где $[A]$ – обратная матрица упругих постоянных $[A] = [B]^{-1}$.

На основе матрицы $[A]$ определяем упругие характеристики свойства, включая модули упругости, коэффициенты Пуассона и модули сдвига эквивалентного материала

$$a_{11} = \frac{1}{E_x}; \qquad a_{22} = \frac{1}{E_y}; \qquad a_{33} = \frac{1}{E_z};$$

$$a_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}; \quad a_{13} = -\frac{\nu_{zx}}{E_z} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x}; \quad a_{23} = -\frac{\nu_{zy}}{E_z} = -\frac{\nu_{yz}}{E_y}.$$

$$G_{xy} = b_{44}; \quad G_{yz} = b_{55}; \quad G_{zx} = b_{66} . \tag{17}$$

Таблица 1 – расчет эффективных упругих постоянных

Параметр		Значение	Единица измерения
Модуль упругости	E_x	43840	МПа
	E_y	18050	
	E_z	18050	
Модуль сдвига	G_{xy}	4100	МПа
	G_{xz}	4900	
	G_{yz}	4900	
Коэффициент Пуассона	ν_{xy}	0,18	–
	ν_{xz}	0,18	
	ν_{yz}	0,33	

Численные расчеты. Механические свойства матрицы типа эпоксидного полимера следующие: E_m = 4200 МПа; G_m = 1500 МПа, ν_m = 0,4, для волокна с модулем упругости E_a = 74800 МПа; G_a = 31000 МПа; коэффициент Пуассона ν_a = 0,2 [3,6].

Для композита с постоянным радиусом $0 < r < 1$ для волокна коэффициент объемного содержания определяется из соотношения (см. рис. 2):

$$\xi = \frac{1}{4}\pi r^2 . \qquad (18)$$

В табл. 1 даны упругие свойства при $\xi = 0{,}636$.

Выводы. Разработана методика нахождения эффективных упругих характеристик однонаправленно армированных волокнистых композитов.

Были определены эффективные упругие свойства стеклопластики с использованием программного комплекса ANSYS. Исследования проводились методом конечных элементов.

Список литературы: **1.** *Voigt W.* Lehrbuch der Kristallphysic. – B.: Teubner, 1928. – 962 S. **2.** *Reuss A.* Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizit tsbedingung für Einkristalle // Z. Angew. Math. u. Mech. – 1929. – Bd. 9, №. 4. – S. 49-64. **3.** *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16, вып. 11. – С. 967-980. **4.** *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1980. – 512 с. **5.** *Хорошун Л. П., Вецало Ю. А.* К теории эффективных свойств идеальнопластических композитных материалов // Прикл. мех. – 1987. – Т. 23, № 1. – С. 86-90. **6.** *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с. **7.** *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. – К.: Наукова думка, 1985. – 304 с. **8.** *Beran M.* Statistical continuum theories. – N.-Y.: Interci. Publ., 1968. – 493 p. **9.** *Алфутов Н. А.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. **10.** *Jahedmotlagh H. R., Nooban. M. R., Eshraghee. M. A.* ANSYS. – Tehran University, 2006.

Поступила в редколлегию 25.04.2013

УДК 539.3

Численная методика определения эффективных характеристик однонаправленно армированных композитов / С. Дария Заде // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 58 (1031). – С. 71-77. – Бібліогр.: 10 назв.

Стаття присвячена дослідженню ефективних характеристик однонаправленно армованих композитів. Результати отримані за допомогою ПК ANSYS. В результаті чисельного дослідження напруженого стану представницької комірки були визначені ефективні пружні властивості однонаправлено армованого композиту.

Ключові слова: однонаправлений композит, ефективні пружні властивості.

This paper is devoted to the study of effective characteristics of unidirectionally reinforced composites. The results were obtained using ANSYS software. As a result of numerical studies of stress state in a representative cell were determined the effective elastic properties of unidirectionally reinforced composite.

Keywords: unidirectional composite, effective elastic properties.