

Ю. М. АНДРЕЄВ, О. О. ГОЛОВНЯ

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ ДИСКРЕТНИХ НЕГОЛОНОМНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ У ПСЕВДОКООРДИНАТАХ І КВАТЕРНІОНАХ

Стаття розглядає актуальні питання моделювання динаміки неголономних механічних систем, які широко застосовуються в сучасній робототехніці. Актуальність цієї теми зумовлена швидким розвитком складних робототехнічних пристроїв, таких як сферичні роботи та мобільні роботи на колесах, які зазвичай містять неголономні обмеження типу кочення без ковзання. Традиційні методи на основі узагальнених координат зазвичай призводять до громіздких рівнянь, які ускладнюють автоматизацію обчислень та аналіз керування механічних систем. У статті запропоновано більш ефективний підхід, який полягає у використанні псевдокоординат та псевдошвидкостей та кватерніонів. Даний підхід значно спрощує опис динамічних характеристик систем, зменшує порядок рівнянь і базується на аналітичній комп'ютерній реалізації. Запропоновано двоетапний алгоритм: спочатку будуються рівняння руху для голономної системи на основі векторно-матричної форми принципу д'Аламбера-Лагранжа, а потім виконується їх приведення до псевдокоординат за допомогою спеціальної матриці похідних залежних узагальнених швидкостей за псевдошвидкостями, що отримується комп'ютерним аналітичним диференціюванням рівнянь неголономних в'язей. Такий спосіб дозволяє автоматично отримати рівняння мінімальної розмірності та привести їх до нормальної форми Коші, яка є зручною для чисельного інтегрування. Для тестування запропонованого алгоритму було використано спеціальну систему комп'ютерної алгебри КіДиМ, яка призначена для кінематичних і динамічних розрахунків складних механічних систем. Було продемонстровано ефективність підходу на класичному прикладі кочення кулі в сферичні поверхні, де неголономні обмеження природно враховуються через псевдошвидкості. Для наочного представлення результатів розрахунків було використано кватерніон орієнтації кулі і на його підставі розраховано кути Крылова за оригінальною методикою. Було обґрунтовано, що застосування псевдокоординат і псевдошвидкостей дозволяє отримати суттєво більш прості динамічні рівняння, а використання кватерніону знімає проблеми виродженості обернених кінематичних рівнянь. Це відкриває нові можливості для моделювання та керування сучасними робототехнічними пристроями.

Ключові слова: неголономні, псевдокоординати, кватерніони, динаміка, робототехніка, принцип д'Аламбера-Лагранжа, форма Коші, КіДиМ

Y. M. ANDRIEIEV, O. O. HOLOVNIA

Vector-matrix equations of dynamics of discrete non-holonomic mechanical systems in QUASI-coordinates and quaternions

The article discusses topical issues of modelling the dynamics of non-holonomic mechanical systems, which are widely used in modern robotics. The relevance of the topic is driven by the rapid advancement of complex robotic devices, such as spherical robots and wheeled mobile robots, which typically contain non-holonomic constraints like rolling without slipping. Traditional methods based on generalized coordinates usually result in cumbersome equations that complicate the automation of calculations and the analysis of mechanical system control. The article proposes a more efficient method based on the use of quasi-coordinates, quasi-velocities, and quaternions. This approach significantly simplifies the description of system dynamics, reduces the order of the equations, and is based on analytical and computer implementation. A two-stage algorithm is proposed: first, equations of motion for a holonomic system are derived in vector-matrix form using the d'Alembert-Lagrange principle; and then, these equations are transformed to quasi-coordinates employing a special matrix of partial derivatives of dependent generalized velocities with respect to quasi-velocities, computed via symbolic differentiation of the non-holonomic constraint equations. This method allows one to automatically obtain equations of minimum dimension and reduce them to Cauchy normal form, which is convenient for numerical integration. To test the proposed algorithm, a special computer algebra system, KiDyM, was used, which is designed for kinematic and dynamic calculations of complex mechanical systems. The effectiveness of the method was illustrated through the classical example of a sphere rolling inside a spherical surface, where non-holonomic constraints are naturally taken into account through quasi-velocities. For visual representation of the calculation results, the quaternion orientation of the ball was used, and based on it, the Krylov angles were calculated using the original method. It was shown that the use of quasi-coordinates and quasi-velocities allows for significantly simpler dynamic equations, and the use of quaternions avoids singularities of inverse kinematic equations. This opens up new possibilities for modelling and controlling modern robotic devices.

Key words: non-holonomic, quasi-coordinates, quaternions, dynamics, robotics, d'Alembert-Lagrange principle, Cauchy normal form, KiDyM

Список літератури:

- [1]. He, Bin & Xu, Fuze & Zhang, Pengchang. (2022). Kinematics approach to energy efficiency for non-holonomic underactuated robotics in sustainable manufacturing. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 119. DOI:10.1007/s00170-021-08305-7.
- [2]. Diouf, Aminata & Belzile, Bruno & Saad, Maarouf & St-Onge, David. (2024). Spherical rolling robots—Design, modeling, and control: A systematic literature review. Robotics and Autonomous Systems. 175. 104657. DOI:10.1016/j.robot.2024.104657.
- [3]. Mirtaheeri, Seyed Mohammad & Zohoor, Hassan. (2021). Quasi-velocities definition in Lagrangian multibody dynamics. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 235. DOI:10.1177/0954406221995852.
- [4]. Ю. М. Андреев, В. Л. Дзюба Удосконалений алгоритм розв'язання обернених задач динаміки робототехнічних пристроїв у ССКА КіДіМ / Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2023. – № 2 (2023). – С. 34 – 40. DOI: 10.20998/2078-9130.2023.2.293010.
- [5]. Y. Andrieiev, D. Breslavsky, H. Shabanov, K. Naumenko, H. Altenbach. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom / Applied Sciences. 2025; 15(5):2840. DOI: 10.3390/app15052840.
- [6]. Chitour, Yacine & Godoy Molina, Mauricio & Kokkonen, Petri. (2013). The rolling problem: Overview and challenges. Springer INdAM Series. 5. DOI:10.1007/978-3-319-02132-4_7.
- [7]. Bloch, Anthony & Marsden, Jerrold & Zenkov, Dmitry. (2009). Quasivelocities and symmetries in nonholonomic systems. Dynamical Systems. 24. DOI:10.1080/14689360802609344.
- [8]. Balseiro, Paula & Sansonetto, Nicola. (2021). First Integrals and symmetries of nonholonomic systems. DOI:10.1007/s00205-022-01753-9.
- [9]. Jarzębowska, Elżbieta. (2009). Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 71. e118–e131. DOI:10.1016/j.na.2008.10.049.
- [10]. Phillips, James R. & Amirouche, Farid. (2021). Kane's Equations for Nonholonomic Systems in Bond-Graph-Compatible Velocity and Momentum Forms. DOI:10.3311/ECCOMASMBD2021-171.
- [11]. Colombo, Leonardo & León, Manuel & López-Gordón, Asier. (2022). Contact Lagrangian systems subject to impulsive constraints. DOI: 10.1088/1751-8121/ac96de.
- [12]. Андреев Ю. М. Теоретичне обґрунтування для практичної реалізації аналітичного комп'ютерного побудовання динамічних рівнянь в псевдокоординатах керованого польоту БПЛА / Ю. М. Андреев, Д. В. Лавінський, Є. І. Дружинін // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – № 1 (2025). – Бібліогр.: 10 назв. – ISSN 2078-9130. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.1.332027>.
- [13]. Bai, Qing-Shun & Shehata, Mohamed & Nada, Ayman. (2022). Review study of using Euler angles and Euler parameters in multibody modeling of spatial holonomic and non-holonomic systems. International Journal of Dynamics and Control. 10. DOI:10.1007/s40435-022-00913-9.
- [14]. А. В. Борисов, А. А. Кулин, И. С. Мамаев, Качение однородного шара по динамически несимметричной сфере, Нелинейная динамика, 6:4 (2010), 869–889. <https://www.mathnet.ru/rus/nd10>.
- [15]. Неймарк, Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. – М.: Наука, Гл. ред. физмат. лит., 1967. – 520 с.

- [1]. He, Bin & Xu, Fuze & Zhang, Pengchang. (2022). Kinematics approach to energy efficiency for non-holonomic underactuated robotics in sustainable manufacturing. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 119. DOI:10.1007/s00170-021-08305-7.
- [2]. Diouf, Aminata & Belzile, Bruno & Saad, Maarouf & St-Onge, David. (2024). Spherical rolling robots—Design, modeling, and control: A systematic literature review. Robotics and Autonomous Systems. 175. 104657. DOI:10.1016/j.robot.2024.104657.
- [3]. Mirtaheeri, Seyed Mohammad & Zohoor, Hassan. (2021). Quasi-velocities definition in Lagrangian multibody dynamics. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 235. DOI:10.1177/0954406221995852.
- [4]. Andreev Yu. M., Dziuba V. L. Udoskonaleniey algoritmy rozv'yazannya obrnennykh zadach dynamiky robototekhnichnykh prystroyiv u SSKA KiDiM // Visnyk NTU "KhPI". Seriya: Dynamika ta mitsnist' mashyn. – Kharkiv : NTU "KhPI", 2023. – № 2 (2023). – S. 34–40. DOI: 10.20998/2078-9130.2023.2.293010.
- [5]. Y. Andrieiev, D. Breslavsky, H. Shabanov, K. Naumenko, H. Altenbach. Solution to the Inverse Problem of the Angular Manipulator Kinematics with Six Degrees of Freedom / Applied Sciences. 2025; 15(5):2840. DOI: 10.3390/app15052840.
- [6]. Chitour, Yacine & Godoy Molina, Mauricio & Kokkonen, Petri. (2013). The rolling problem: Overview and challenges. Springer INdAM Series. 5. DOI:10.1007/978-3-319-02132-4_7.
- [7]. Bloch, Anthony & Marsden, Jerrold & Zenkov, Dmitry. (2009). Quasivelocities and symmetries in nonholonomic systems. Dynamical Systems. 24. DOI:10.1080/14689360802609344.
- [8]. Balseiro, Paula & Sansonetto, Nicola. (2021). First Integrals and symmetries of nonholonomic systems. DOI:10.1007/s00205-022-01753-9.
- [9]. Jarzębowska, Elżbieta. (2009). Quasi-coordinates based dynamics modeling and control design for nonholonomic systems. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 71. e118–e131. DOI:10.1016/j.na.2008.10.049.
- [10]. Phillips, James R. & Amirouche, Farid. (2021). Kane's Equations for Nonholonomic Systems in Bond-Graph-Compatible Velocity and Momentum Forms. DOI:10.3311/ECCOMASMBD2021-171.
- [11]. Colombo, Leonardo & León, Manuel & López-Gordón, Asier. (2022). Contact Lagrangian systems subject to impulsive constraints. DOI: 10.1088/1751-8121/ac96de.
- [12]. Andrieiev Yu. M. Theoretical justification for the practical implementation of analytical computer construction of dynamic equations in pseudocoordinates of controlled UAV flight / Yu. M. Andrieiev, D. V. Lavinsky, E. I. Druzhynin // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2025. – No. 1 (2025). – Bibliography: 10 titles. – ISSN 2078-9130. DOI: <https://doi.org/10.20998/2078-9130.2025.1.332027>.
- [13]. Bai, Qing-Shun & Shehata, Mohamed & Nada, Ayman. (2022). Review study of using Euler angles and Euler parameters in multibody modeling of spatial holonomic and non-holonomic systems. International Journal of Dynamics and Control. 10. DOI:10.1007/s40435-022-00913-9.
- [14]. Borysov A. V., Kylyn A. A., Mamaev Y. S., Kachenye odnorodnoho shara po dynamichesky nesymmetrychnoi sfere, Nelyneinaia dynamika, 6:4 (2010), 869–889.
- [15]. Neimark, Yu. I., Fufaev N. A. Dinamika negolonomnykh sistem. – M.: Nauka, Gl. red. fizmat. lit., 1967. – 520 s.

References (transliterated):

Надійшла (received) 21.12.2025

Відомості про авторів / About the Authors

Андреев Юрій Михайлович – доктор технічних наук, професор, професор кафедри «Комп'ютерне моделювання процесів та систем», **Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»**, м. Харків; Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; тел. +380 (67) 1101672, e-mail: yurii.andrieiev@khpi.edu.ua.

Andrieiev Yuriy Mykhailovych – Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv, Ukraine; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3213-8496>; tel. +380(67)1101672, e-mail: yurii.andrieiev@khpi.edu.ua.

Головня Олексій Олександрович – аспірант кафедри комп’ютерного моделювання процесів і систем, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (095) 256-08-17; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4465-3474>; e-mail: oleksiygolovnya@gmail.com.

Holovnia Oleksii Oleksandrovyich – Graduate Student at the Department of Computer Modeling of Processes and Systems, National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute", Kharkiv; tel. (095) 256-08-17; ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-4465-3474>; e-mail: oleksiygolovnya@gmail.com.

Бібліографічні описи / *Bibliographic descriptions*

Андрєєв Ю. М. Векторно-матричні рівняння динаміки дискретних неголономних механічних систем у псевдокоординатах та кватерніонах/ **Ю. М. Андрєєв, О. О. Головня** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка та міцність машин. – Харків : НТУ «ХПІ», 2025. – № 2 (2025). – С. XX – XX. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2078-9130.

Andrieiev Yu. M. Vector-matrix equations of dynamics for discrete nonholonomic mechanical systems in quasi-coordinates and **quaternions** / *Yu. M. Andrieiev, O. O. Holovnia* // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Dynamics and strength of machines. – Kharkiv: NTU “KhPI”, 2025. – No. 2 (2025). – pp. XX – XX. Bibliography: 13 titles. – ISSN 2078-9130.